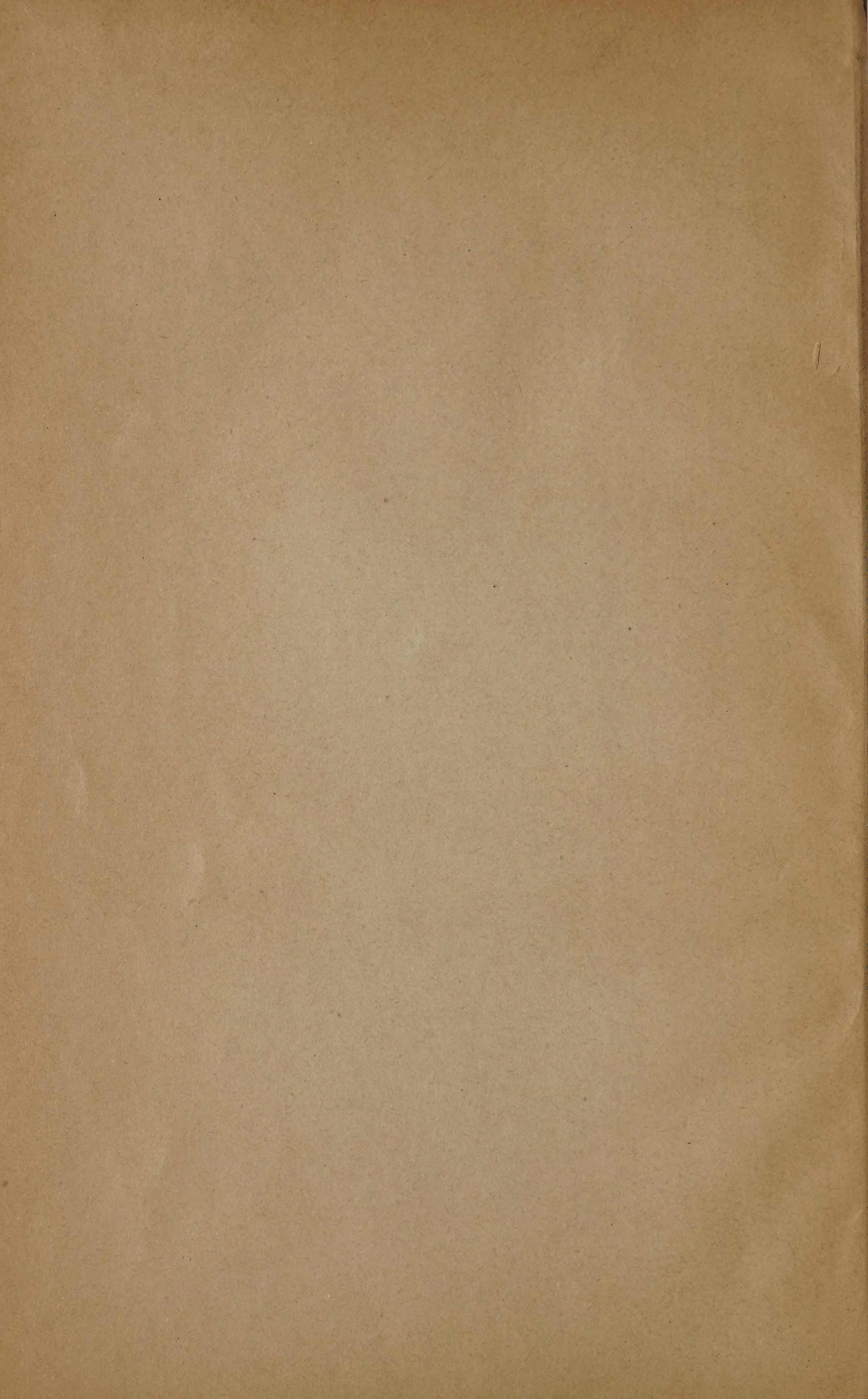






ABHANDLUNGEN

BEI BEGRÜNDUNG DER

KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

AM TAGE DER

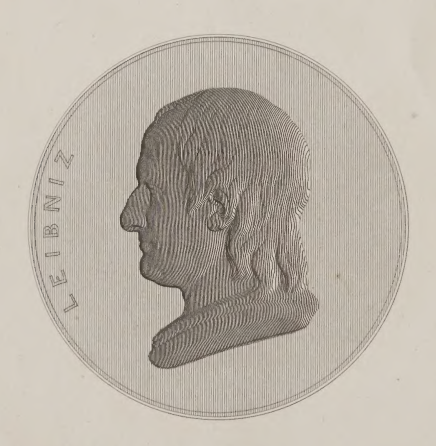
ZWEIHUNDERTJÄHRIGEN GEBURTSFEIER

LEIBNIZENS

HERAUSGEGEBEN

VON DER

FÜRSTLICH JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT.



LEIPZIG

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG

1846.

ABHANDLUNGEN

HERAUSGEGEBEN

VON DER

FÜRSTLICH JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT.

INHALT.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft, welche sich, ihrer Stiftung gemäss, hauptsächlich damit beschäftigt, wissenschaftliche Preisfragen zu stellen, die zu deren Beantwortung eingereichten Abhandlungen zu prüfen, und die des Preises würdig erachteten zum Drucke zu befördern, fand in der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens und der an diesen Tag sich knüpfenden Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig eine doppelte Veranlassung, ausnahmsweise, durch Herausgabe von Abhandlungen ihrer eignen Mitglieder und einiger anderen von ihr zu Beiträgen aufgeforderten Gelehrten, ein öffentliches Zeugniss von ihrer Theilnahme an den genannten feierlichen Ereignissen abzulegen. Denn es galt, sowohl den Manen des grossen Mannes, der in Leipzig, dem Sitze der Gesellschaft, geboren ward und seine erste wissenschaftliche Ausbildung erhielt, eine Huldigung darzubringen, als, das Verhältniss der ältern Gesellschaft zu der neu zu stiftenden durch die That in das rechte Licht zu setzen. Dieses Verhältniss besteht aber einfach darin, dass beide Vereine zwar die gleiche Selbstständigkeit behaupten, aber fortwährend in enger Verbindung für den gemeinschaftlichen Zweck der Beförderung wissenschaftlicher Forschungen zusammenwirken und sich zur gegenseitigen Ergänzung dienen werden. Diese Verbindung ist um so natürlicher und inniger, als in der Mitte der Jablonowski'schen Gesellschaft selbst die Idee eines an Leibnizens Geburtstag zu begründenden umfassenderen wissenschaftlichen

Vereins entstanden, durch gemeinschaftliche Berathung ihrer Mitglieder mit mehreren anderen, die Gebiete der deutschen, classischen und orientalischen Philologie vertretenden Leipziger Gelehrten weiter ausgebildet und ihrer Verwirklichung entgegengeführt worden ist. Wenn daher die sämmtlichen jetzigen Mitglieder der ältern Gesellschaft, so wie die übrigen Verfasser der in dem vorliegenden Bande enthaltenen Abhandlungen, der neuen Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften angehören werden, so können sie nur wünschen, dass gegenwärtige Sammlung als erster Beleg von der gemeinsamen Wirksamkeit beider Vereine und zugleich als Vorläufer der Schriften der Königlichen Gesellschaft, insbesondere ihrer mathematischphysischen Classe, angesehen werden möge.

BRIEFE VON LEIBNIZ

AN

CHRISTIAN PHILIPP,

HERAUSGEGEBEN

VON

W. WACHSMUTH.



In der Handschriftensammlung der leipziger Stadtbibliothek befindet sich eine ansehnliche Zahl an einen Herrn Christian Philipp gerichteter Briefe, unter ihnen sechsundzwanzig von Leibniz*) geschrieben, die, so viel sich hat ermitteln lassen, mindestens zusammen noch nicht im Drucke erschienen sind. Diese bei einer Säcularfeier, welche in Leibnizens Geburtsstadt zu seinen Ehren veranstaltet wird, der Oeffentlichkeit zu übergeben, liegt schon aus dem Grunde nahe, dass es sich wohl ziemt, bei solcher Gelegenheit etwas geltend zu machen, was von seiner Hand stammt und in seiner Geburtsstadt aufbewahrt wird; ausserdem aber sind jene Briefe nach Inhalt und Form sehr geeignet, Art und Kunst ihres weltberühmten Verfassers unter einem besondern Gesichtspunkte anschaulich zu machen. Zwar geben sie nicht etwa reiche Ausbeute für die Wissenschaften, welche Leibniz pflegte; sie enthalten nicht etwa tiefdurchdachte und in bündiger doctrineller Form dargelegte wissenschaftliche Erörterungen; sie zeigen vielmehr Leibniz nur als den, welcher mit dem vielseitigsten Interesse an Welthändeln und Wissenschaft**) in einer vertraulichen und ganz zwanglosen Privatcorrespondenz sich ohne alle meditative oder stylistische Anstrengung gehen lässt und so zu sagen im Negligé dem Papiere anvertraut, was ihm eben in den Sinn kommt. Wir sehen in bunter Mischung Nachrichten und Anfragen über Kaiser und Reich, über Frankreich, Schweden, Dänemark und andere europäische Staaten, über Kriegshändel, Rüstungen, Friedensverhandlungen und diplomatische Sendungen, über Höfe, fürstliche Reisen und Besuche, die Oper in Hannover etc.; wiederum Mittheilungen über mathemati-

---

*) So, nicht Leibnitz sind diese Briefe, abgerechnet diejenigen, welche nur ein L. zur Unterschrift haben, unterzeichnet, und so hat Leibniz, dessen Vater sich Leibnüz schrieb, in jener Zeit und nachher im Deutschen und Französischen seinen Namen geschrieben. Herr Doctor Grotefend zu Hannover hat die Güte gehabt, in Leibnizens handschriftlicher Hinterlassenschaft deshalb eine Nachforschung anzustellen, und diese bestätigt, dass die Schreibung Leibnitz, in der schon seine Zeitgenossen nach ihrer Vorliebe für Häufung der Consonanten übereinstimmen, durchaus keine Gewähr in seiner eignen Handschrift hat, vielmehr in dieser sich nur Leibniz vorfindet. Wie früh Leibniz das ü mit einem i — Leibniz statt Leibnüz — vertauscht habe, ist schwerlich zu ermitteln; in der leipziger Inscriptionsmatrikel vom Jahre 1653 im Sommer, wo ihm, nach einem Brauche, der sonst bei Söhnen leipziger Professoren vorkam, muthmasslich zum Geburtstage als siebenjährigem Knaben, ein Geschenk mit dem sogenannten Depositionsscheine gemacht worden ist, steht Leipniz; doch ist das nicht seine eigene Handschrift, und nichts darauf zu geben; auf seinen ersten Dissertationen steht noch Leibnuzius.

**) Brief II.: Je vous supplie Monsieur de me faire part aussi de ce que vous apprendrés à l'égard des affaires aussi bien que des lettres.

sche, physikalische und chemische Probleme und Entdeckungen, über Harzgruben, Zink, Talk, Phosphorus, Borax, über Auflösung des Goldes, Balsamirung, Mikroskop, Stand des Barometers, ferner über die neuesten Erscheinungen im Buchhandel, Lebensumstände damaliger Gelehrten, Bestellung eines Hofmeisters, ja endlich von Bücherkäufen und Schuldforderungen des Verfassers. Dies Alles ist mit schroffen Uebergängen, zum Theil ohne Absatz und Punctum, zum Theil mit Randglossen und Postscripten, aneinander gereiht oder untereinander gemischt. Eben so wenig genau als mit dem Zusammenhange und der Reihenfolge der Gedanken hat es Leibniz mit der Aeusserlichkeit ihrer Darstellung genommen; nachlässig ist der französische Styl, der nicht etwa blos in Orthographie Blössen giebt, nachlässig und incorrect die Schreibung von Eigennamen; die Handschrift endlich, nicht selten durch Stellen, wo Wörter und Sätze ausgestrichen sind, unterbrochen, ist schwer leserlich und manchmal nur mit Mühe und durch Combination zu entziffern; elegant mit einem Worte ist an den Briefen nur der goldene Schnitt, den einige haben. Darum ist in der Form keine Entschädigung dafür, dass der Gehalt in wissenschaftlicher Hinsicht wenig befriedigt. Ob man nun aber sehr zu beklagen habe, dass Leibniz der damaligen Unsitte der Deutschen, bei dem Briefwechsel mit Deutschen sich der französischen Sprache zu bedienen, sich hingab, ohne diese, mindestens in den vorliegenden Briefen, elegant oder correct zu gebrauchen? Mit aller Ehrerbietigkeit gegen Leibnizens spätere Bemühungen die deutsche Sprache zu fördern gesprochen, lässt sich behaupten, dass diese Briefe, wenn deutsch geschrieben, nicht um des deutschen Ausdrucks willen an Werth gewinnen würden (s. die Note zu Brief XXIV.), und wenn Leibniz es nun einmal hier mit dem sprachlichen Ausdruck nicht genau genommen hat, so kann man sich um so leichter darüber trösten, dass diese Briefe nicht deutsch geschrieben worden sind. Dass der Herausgeber es für angemessen erachtet hat, sie, abgerechnet die Weglassung des regelmässig wiederkehrenden Schlusses, Monsieur, votre très-humble et très-obéïssant serviteur, mit urkundlicher Genauigkeit abdrucken zu lassen, bedarf kaum der Anzeige. Uebrigens haben sich nicht alle Briefe von Leibniz an Philipp erhalten; dem ersten in unserer Reihe mögen mehrere vorausgegangen sein, sicherlich wenigstens einer, denn nach einer gefälligen Mittheilung, die der Herausgeber dem Herrn Doctor Grotefend zu Hannover verdankt, beginnt der erste der in der königlichen Bibliothek daselbst aufbewahrten Briefe Philipp's an Leibniz, vom 4. September 1678: Je ne receûs votre agreable lettre du 28 Aoust que par le dernier ordinaire, also war der zu Anfang unserer Sammlung befindliche nicht der erste gewesen; desgleichen kann kein Zweifel sein, dass in der Zeit vom November 1679 bis dahin 1680, in welcher Zeit Philipp 23 Briefe an Leibniz gesandt hat, in unserer Sammlung aber eine Lücke ist (zwischen Brief XVI. und XVII.), Leibniz seinem Correspondenten zu wiederholten Malen geantwortet habe; bei einem der zu Hannover aufbewahrten Briefe Philipp's (vom 25. Februar 1680) befindet sich eine Antwort von Leibniz.

Wer nun war dieser fleissige Correspondent von Leibniz nach seiner Stellung in Leben und Wissenschaft? Wir geben nicht eben viel darauf, dass er in Briefwechsel mit Leibniz gestanden hat, denn dies haben Manche mit ihm

gemein, die nicht werth sind, mit Leibniz zusammen genannt zu werden; wohl aber mag ein günstiges Vorurtheil für ihn sich daraus entnehmen lassen, dass er die Vielseitigkeit von Leibnizens Interessen theilte, das Verschiedenartigste mit seinem Geiste umfasste und von Leibniz nicht minder mit Anfragen in Anspruch genommen wurde, als Belehrung von demselben empfing. Ueber seine äusseren Lebensverhältnisse geben Inhalt und Aufschrift einer Anzahl der an ihn gerichteten Briefe (es sind deren, die von Leibniz mitgerechnet, 196), nothdürftig Aufschluss. Dass er geborner Deutscher war, liesse auch ohne seine im dresdner Archive befindlichen deutschen Berichte sich aus einem Briefe entnehmen, den ihm eine geistreiche Französin, Mad. Prunget, geschrieben hat; diese rühmt an ihm als Deutschem eine vorzüglich gute Aussprache des Französischen und dass er durchaus keinen deutschen Accent habe. Ueber Ort und Jahr seiner Geburt hat sich keine ganz befriedigende Notiz vorgefunden. In einigen Briefen der leipziger Sammlung finden sich Andeutungen, nach denen er geborner Sachse und als Student in Leipzig gewesen war. Die leipziger Inscriptions-Matrikel vom Wintersemester 1652 — 53 hat einen Christian Philippi, Sohn des D. Johann Philippi. Diesen für unsern Christian Philipp zu halten, scheint etwas Bedenkliches zu haben; jedoch aus Leibnüz ist Leibniz geworden, aus Puffendörfer Pufendorf, am Rande der leipziger Matrikel steht D. Joh. Philipp; mit dem Geschlechtsnamen ward es damals minder genau als mit dem Vornamen genommen; in der leipziger Matrikel sind mehrere Jahre hindurch die Inscribirten nach den Vornamen alphabetisch geordnet; endlich ist auffallend, dass jener Christian Philippi nach dem Funeralprogramm für seinen Vater (Witten memoriae ICtorum p. 537) im Jahre 1674 als badenscher Geheim-Secretair sich in Wien befunden hat, dass aber unser Christian Philipp ebenfalls 1672 in Durlach und 1674 in Wien — freilich zur Zeit der Briefe unserer Sammlung, die dessen erwähnen, als Secretair des Es. Pufendorf — gewesen ist. Mögen Andere entscheiden, ob eine Identificirung der beiden Personen zulässig sei. Christian Philipps Jugendbildung scheint vielseitig gewesen zu sein und ihn zu Hofmeister- oder Secretairstellen empfohlen zu haben. In den Jahren 1665 und 1666 lebte er bei einer Marquise de la Gastevine, wie es scheint als Hofmeister des jungen Marquis; darauf 1668 und 1669 bei dem schwedischen Residenten Esaias Pufendorf in Paris; 1671 und 1672 war er zu Stockholm als Hofmeister des jungen Grafen Gabriel Oxenstierna; 1672 in Durlach, 1674 Secretair eben jenes Esaias Pufendorf, nunmehrigen schwedischen Kanzlers zu Stade, und mit diesem zu Dresden, Prag und Wien In einem der Briefe aus jener Zeit ist die Rede von Conferenzen Pufendorf's mit dem kursächsischen Hofe; an diese scheint sich der Uebertritt Philipp's in sächsischen Staatsdienst, muthmasslich durch Vermittlung des damaligen Geheimeraths-Directors Freiherrn von Friesen, von dessen Tochter sich einige Briefe an Philipp über französische Lecture vorfinden, geknüpft zu haben. Vom Frühjahre des Jahres 1675 an finden wir ihn als kursächsischen Rath und Residenten zu Hamburg, mit dem Auftrage, was er von Staats- und Hofangelegenheiten erfahre, zu berichten. Die vom 3. Juli 1675 bis 9. November 1681 von ihm erstatteten Berichte befinden sich in dem königlichen Archive zu Dresden; der erste beginnt mit einer Verheissung Philipp's, dass er seine Oblie-

genheiten getreulich erfüllen werde, „ich verspreche Ew. Churfürstlichen Durchlaucht, als meinem gnädigsten Landesfürsten alle treu und gehorsam, die ein natürlicher unterthan nach allem seinem vermögen leisten soll". Der letzte Bericht vom 9. November 1681 äussert sich über die an Philipp ergangene Abberufung von seinem Posten und enthält die Bitte um eine andere feste Anstellung. Diese erfüllte sich zu Anfang des Jahres 1682; die in jener Zeit an ihn gerichteten Briefe betiteln ihn Bibliothekar zu Dresden, auf dem letzten der Leibnizischen Briefe befindet eine Note Philipp's: „soll mir sagen, wo ich etwas gutes de bibliothecis ordinandis finde" und in dem letzten der zu Hannover aufbewahrten Briefe Philipp's vom 21. November 1682 heisst es: Comme son Alt. El. mon maître m'a fait la grace de me continuer le titre de son conseiller avec mes gages, et qu'outre cela Elle m'a confié la direction de sa Bibliothéque, qui est fort nombreuse et curieuse, mais un peu en desordre par la negligence de mes predecesseurs, je vous prie, Monsieur, de m'informer, ou je trouveray quelque bonne methode de Bibliothecis ordinandis; vous obligerez infiniment un homme, qui sans cela est deja par affection et par reconnaissance etc. Seiner damaligen Anstellung und seines bald nachher erfolgten Todes gedenkt Ebert, Geschichte und Beschreibung der dresdner Bibliothek S. 231. Von seiner Ausstattung und Bildung fürs Leben ergiebt sich schon aus dem Inhalte des grössern Theils der an ihn gerichteten Briefe und dem Stande und Berufe ihrer Verfasser (Graf Lynar, die Herren von Friesen, von Gersdorff, von Wolframsdorf, von Haugwiz, Graf Nugnez, Habbeus von Lichtenstein, Graf Hauteville, Wicquefort, Samuel Pufendorf, Nikol. Lilierot etc.), dass er gewandter und gefälliger Welt- und Geschäftsmann war; von seiner Tüchtigkeit zu diplomatischen Berichterstattungen, insofern es bei diesen nur auf Einsammlung und Mittheilung von Neuigkeiten, nicht auf Verhandlungen ankam, zeugen die im königlichen Archiv zu Dresden befindlichen Berichte. Sie sind in deutscher Sprache abgefasst; ihr Inhalt ist mannigfach wie der einer politischen Zeitung, richtet sich jedoch zumeist auf die nordischen Höfe; mitunter kommt auch ein Stückchen der chronique scandaleuse vor; von gelehrten Sachen dagegen ist nichts darin zu finden. Der deutsche Styl ist fliessend und reiner als in den gewöhnlichen deutschen Druckschriften jener Zeit, und dies mag, Philipp's Vertrautheit mit dem Französischen gegenüber, wohl als ein bedeutsames Zeugniss von seiner Begabtheit gelten. Dass er nun aber mit seiner Bildung als Weltmann und mit seiner Gewandtheit in diplomatischer Geheimschreiberei vielseitiges Interesse für die Wissenschaft, namentlich die Naturwissenschaften, und einen nicht verächtlichen Vorrath von Kenntnissen verband, bezeugt nicht blos die zwischen ihm und Leibniz geführte Correspondenz, sondern mehrere andere der in gedachter Sammlung enthaltenen Briefe, als von Hewelcke, Alberti, Tittel, insbesondere von O. Mencke, der ihn 1682 auffordert, für die eben damals gegründeten Acta Eruditorum aus französischen, englischen und italienischen Zeitschriften auszuziehen, was ihm passend scheine und dies sofort ins Latein übersetzt für die Acta einzusenden. Endlich würde schon seine Anstellung als Bibliothekar für seinen Beruf zur Gelehrsamkeit sprechen. Schriftsteller scheint er nicht gewesen zu sein; seine Lieferungen und Beiträge für die Acta Eruditorum hat-

ten kaum begonnen, als er starb. Nach einem Briefe von O. Mencke ist das in den Actis, Januar 1682, p. 192 seq. befindliche Excerpt aus den Philosophical Transactions, eine von Rob. Boyle erfundene Lampe betreffend, das gewöhnlich mit dem Namen Joh. Bohn angeführt wird, eine Arbeit Philipp's. Zur vollständigeren Erkenntniss seiner geistigen Begabtheit würde nun zumeist aus seinen Briefen an Leibniz, deren gegen sechszig in der königlichen Bibliothek zu Hannover aufbewahrt werden, zu gelangen sein. Es konnte deshalb, aber auch in näherer Beziehung auf die Briefe von Leibniz an ihn, in Frage kommen, ob nicht mit diesen auch Philipp's Erwiederungen zu veröffentlichen seien. Indessen mahnte davon ab der Bedacht, dass es hier nicht sowohl auf Philipp als auf Leibniz ankommt, dass der Briefwechsel zwischen beiden nicht von einer Beschaffenheit ist, wo die Briefe Zug um Zug sich ineinander schieben und zusammengliedern, einzeln aber ihrer Selbständigkeit ermangeln, dass vielmehr die Briefe von Leibniz, einige geringfügige Punkte ausgenommen, ohne Philipp's Antworten verständlich sind, das minder Verständliche aber durh wenige kurze Bemerkungen aufgeklärt werden kann; endlich hatte die Furcht, aus dem Bedacht auf Vollständigkeit sich mit Ueberflüssigkeit blosszustellen, ihre Stimme. Es wird also zur doppelseitigen Beleuchtung dieses Briefwechsels genügen, wenn einige Briefe Philipp's an Leibniz als Probestücke seines Styls abgedruckt werden (s. die Noten zu Brief VI. XII. XVII. XXIV.); zur Vermittlung der Abschrift hat Herr Doctor Grotefend in Hannover freundlichst die Hand geboten. Ferner war fraglich, in welcher Art bei den minder verständlichen Stellen in Leibnizens Briefen dem wissbegierigen Leser die Mühe des Nachsuchens erspart werden könne. Glossirung jeglicher Stellen, wo von Personen oder Dingen die Rede ist, die nicht in den Briefen selbst näher bezeichnet sind und vielleicht nicht jedem Leser sofort gegenwärtig sein werden, drohte die Sorgfalt des Herausgebers nicht selten zu dem lästigen Geschwätz eines redseligen Cicerone, der auf jede Bagatelle hinweist, zu machen; auch kommt es bei diesen Briefen nicht darauf an, dass Alles und Jedes, was sie berühren, zu selbständiger Anschaulichkeit gebracht werde; es handelt sich nur um den Lichtschein, der davon auf Leibnizens Subjectivität zurückfällt; ohne diesen würde fast Alles, was in den Briefen vorkommt, in dem betreffenden Gebiete der Staatshändel oder Gelehrsamkeit als vollkommen aus- und abgemacht, zum Theil auch als der Vergessenheit mit Recht verfallen gelten müssen. Daher konnte dem Herausgeber eine vollständige und ausführliche Commentirung nicht in den Sinn kommen, und auch die wenigen Bemerkungen, die dem Texte der Briefe zugegeben worden sind, bittet er, nur als eine ganz anspruchslose Hülfsleistung für diejenigen seiner Leser anzusehen, welche sich nicht die Mühe geben mögen, einen Zedler, Niceron, Jöcher, Gmelin, Fischer, Wachler, Guhrauer etc. bei Lesung dieser Briefe selbst zur Hand zu nehmen. Auch im Allgemeinen hat der Herausgeber, was die zunächst in Frage kommenden, in Leibnizens Briefen vielfältig erwähnten, Staatsangelegenheiten jener Zeit betrifft, nur Weniges zu erinnern. Die ersteren von jenen sind in der Zeit geschrieben worden, wo der grosse, 1672 begonnene Krieg sich seinem Ende nahte, ausser dem Kriege zwischen Frankreich und dessen Gegnern aber ein zweiter, Schwedens gegen Dänemark, Brandenburg,

Zelle, Wolfenbüttel und Münster beizulegen war, mit dem nimweger Frieden auch ein Friede der Herzoge von Zelle und Wolfenbüttel mit Schweden zu zu Stande kam (zu Zelle 5. Februar 1679), der grosse Kurfürst von Brandenburg aber noch eine Zeitlang in Waffen blieb und erst nachdem die Franzosen am Niederrhein die Feindseligkeiten erneuert hatten, am 29. Juni 1679 zu St. Germain en Laye Friede mit Frankreich und Schweden schloss. Die letzten Briefe fallen in die Zeit der Reunionen und gedenken ihrer. Von den welfischen Herzögen war Johann Friedrich von Hannover, in dessen Diensten Leibniz stand, zur katholischen Kirche übergetreten und mit Frankreich im Anfange des Kriegs von 1672 verbündet, und auch, nachdem man ihn 1675 zur Neutralität gezwungen, mit Frankreich befreundet; ohne männliche Leibeserben (18.) 28. December 1679 verstorben, hatte er seinen Bruder Ernst August, bisherigen Bischof von Osnabrück, zum Nachfolger; Georg Wilhelm, der älteste dieser drei Brüder, war Herzog von Zelle; Braunschweig-Wolfenbüttel hatte deren Stammvetter Rudolf August zum Herzoge. Ueber den damaligen Zustand der Gelehrtenrepublik, so weit diese bei unsern Briefen von Leibniz in Betracht kommt, wird die Bemerkung genügen, dass die Geschichtschreibung damals nicht in gedeihlichem Zustande war, die Philologie darniederlag, die Philosophie ihre jüngsten grossen Pfleger in Des Cartes und Spinoza gehabt hatte, dass im Gebiete der Mathematik und der Naturwissenschaften, für welche Leibniz vorzugsweise empfänglich und thätig war, ein junges und reges Leben sich aufthat, jedoch neben den grossartigsten Leistungen eines Newton, Huygens, Boyle, Cassini u. a. und neben dem Frohlocken über wichtige Entdeckungen noch die wahnhafte Vorliebe für alchymistische Operationen, Goldmacherei etc. fortdauerte.

I.

POUR MONSIEUR PHILIPPI[1])

Cons^r. de S. A. E. de Saxe.

Monsieur

Je vous renvoye la conversation du Dr Dee avec les esprits pretendus: et je vous en remercie beaucoup. Je croy d'avoir découvert le mystere de toute cette fourberie, et je tiens qu'elle doit estre attribuée à la malice des hommes plustost qu'à l'adresse des demons, qui à mon avis n'y avoient point d'autre part que celle qu'ils prennent à tout ce qui se fait de mauvais dans le monde. Je croy fermement que le pauvre Dr Dee a esté la duppe de Kelley, de sa propre femme, et de quelques autres, qui tachoient de tromper le monde par le credit et la reputation de ce bon homme (dont la vie et le sçavoir estoient sans reproche) apres l'avoir trompé le premier. Je m'étonne que Mons. Meric Casaubon qui a publié ce livre[2]) n'y a pas assez pris garde, puisqu'il ne manquoit ny d'erudition ny de jugement. Je suis avec passion et zele

Monsieur

vostre tres humble
et tres obeissant
serviteur

Ohne Ort und Datum; Empfangszeichen am 22. Juli 1678.

LEIBNIZ.

1) Erst die spätern Briefe haben in der Adresse den Namen Philipp richtig.

2) Der Engländer Joh. Dee (s. Gmelin Gesch. d. Chem. 1, 311), war schon 1607 gestorben; seine magischen Schriften wurden erst später (1659) von Mer. Casaubonus herausgegeben.

II.

à Hanover ce 28 d'Aoust 1678.

Monsieur

Estant de retour, je n'ay pas voulu manquer de vous remercier de toutes vos bontés, que je souhaite de meriter. Je suis arrivé Lundi matin, et ayant fait tenir à Monsieur le Chancelier Pufendorf les deux pacquets qu'on m'avoit confiés, j'ay appris dépuis qu'il estoit parti le même jour. Ainsi j'ay esté privé de l'avantage de le voir. Hier, c'est à dire Mardy, Mons. le Duc de Zelle est arrivé à Herrnhausen qui est une maison de plaisance à une demyheure d'icy. On dit qu'il partira démain, si ce n'est pas encor ce soir[1]). Vous pouvez juger Monsieur, que mon Prince tachera de procurer par ses negotiations tous les avantages raisonnables aux Princes de sa maison, à qui il auroit esté bien plus utile de se maintenir tousjours dans une étroite liaison que de prendre si souvent de differentes routes[2]). Je n'ay pas besoin de vous mander le détail de la demonstration de M. Römer[3]) touchant le mouvement de la lumiere puisque je la trouve dans le journal no. 20. de l'anné 1676. et puisque vous avés maintenant tous ces journaux, je serois bien aise d'apprendre la dessus les sentimens de M. Hevelius[4]). Car cette pensée est belle, et la matiere importante. Mons. des Cartes avoue dans une de ses lettres que toute sa physique seroit renversée si l'on pouvoit prouver que la lumiere demande du temps. S. A. S mon maistre a encor les journaux qu'on m'avoit envoyés: et je ne luy ay parlé que peu de temps à cause de ses occupations et de l'arrivée de M. le duc de Zell. Quand j'auray ces journaux je vous en feray part. Je vous supplie Monsieur de me faire part aussi de ce que vous apprendrés à l'égard des affaires aussi bien que des lettres. Je vous supplie aussi de faire dire par votre homme au Sr. Konig et au Sr. Hertel libraires, que je n'ay pas pû prendre les livres que j'avois mis à part chez eux, estant pressé de partir, et l'un n'estant pas au logis, l'autre n'estant pas dans sa boutique. Mais ils n'auront qu'a les garder encor, et je feray en sorte que le Sr. Weber nostre agent paye ce dont vous aurés la bonté de convenir avec eux. Le dictionnaire de Cramer Allemand-Italien me paroist peu de chose, si ce n'est que vous en jugiés autrement, car je ne l'ay pas examiné à loisir. Je voudrois sçavoir si le nouveau dictionnaire Italien françois-Allemand comprend celuy d'Oudin (que vous avés) tout entier. Je Vous supplie de m'honorer de vos commandemens et je suis avec passion etc.

Leibniz.

1) Als P. S. am Rande: il est parti mercredy.

2) S. das Vorwort über die Stellung der welfischen Herzoge bei den damaligen Staatshändeln.

3) Oberst Römer aus Aarhuus, trefflicher Astronom, vorzugsweise durch die im Texte erwähnte Lehre von der Fortpflanzung des Lichtes berühmt. Fischer Gesch. d. Phys. 2, 154.

4) Hewelcke, Astronom zu Danzig, einer von Philipp's Correspondenten, von gewichtiger Stimme für Leibniz. S. Br. 14. 16.

III.

Hanover
ce 20 de septembre 1678

Monsieur

Je vous dois encor une réponse à la lettre tres obligeante que Vous m'avés écrite le 4me de ce mois. J'attendois d'envoyer un pacquet à Hambourg, et j'y voulois adjouter les journaux pour Vous. Mais je suis encor obligé de le differer jusqu'à la semaine qui vient.

Je vous supplie de me recommander à Mons. le Chancelier Pufendorf, qui est parti si promptement apres mon retour, que je n'ay pas eu le bonheur de luy parler. La mort de l'Evesque de Munster fera naistre bien de differens. Les trouppes de Zelle se sont saisi de Verden par un stratageme[1]. En voicy les particularites tirées d'une lettre datée du 19. c'est à dire qui a esté écrite hier à Verden.

Le 12me de ce mois le magistrat de la ville de Verden avoit demandé les clefs à la regenee, par ce qu'il n'y avoit point de soldats dans la ville, et les bourgeois estoient obligés à la garde. La regence s'en excusa, cependant les clefs qui avoient esté entre les mains du major de la ville furent mises entre les mains d'un vieux conseiller nommé Marchal. Le Magistrat ayant appris la mort de Mons. de Munster fit doubler la garde des bourgeois et fit prier la Regence de ne faire ouvrir les portes que bien tard, et de les faire fermer de bonne heure, (am Rande: de peur de quelque surprise). La même nuit le Colonel Melle qui est au service de Zell, fait avancer quelques compagnies vers la ville: et luy même se cache tout auprés de la porte (am Rande: avec quelques cavaliers). À la pointe du jour le vieux bonhomme Marchal ayant oublié la resolution prise le jour passé de ne faire ouvrir la porte que bien tard et avec bien de precaution, donne les clefs à l'ordinaire. À peine la porte estoit ouverte, que quelques cavaliers s'en saisissant commandent aux bourgeois qui estoient de garde de mettre les armes bas, ce qu'ils n'ont pas fait difficulté de faire, tout incontinent le reste de la cavalerie cachée arrive et entre jusques au nombre de 80 maistres (reitres?)[2]) sans que personne se remue, et sans que les bourgeois s'en apercoivent. L'infanterie entre une demie heure apres. Et tout le monde est bien surpris de voir la ville occupée par ces trouppes. Le Sieur Huss conseiller du temps des Suedois, ayant fait quelque affront à la regence monasterienne estoit gardé par quelques mousquetaires; le Colonel Melle les luy fit oster et les fit mettre à la porte du Sieur Peper oberamtman ou grand ballif de la part de M. de Munster. On se saisit aussi de ses papiers, et de ceux du Sieur Muller, qu'on fit mettre dans des caisses, et porter à l'hostel de ville. Le même jour on se saisit aussi de Languen-Wedel, le lendemain on alla devant Rotenbourg, qu'on croit encor rendu. Il n'y a qu'Ottersdorf[3]) qu'on croit se pouvoir defendre, le lieutenant colonel Sibelsdorf y estant, avec 500 hommes.

On dit que le successeur de feu Mons. de Munster[4]) est fort malade: il est a souhaiter qu'il en releve, cas c'est un prince de merite.

On me mande de Paris une chose fort singulière, scavoir que Mons. Baluze a trouvé un Manuscrit d'un ouvrage de Lactance qui n'a pas encor paru. C'est une histoire Ecclesiastique[5]. Je suis avec passion etc.

LEIBNIZ.

P. S. J'ay déja trouvé icy le nouveau dictionnaire d'Oudin. J'ay fait ecrire a Mons. Weber de payer a Mons. Konig libraire ce que vous ordonnerés. Mons. Konig pourra faire donner le pacquet à la poste, mon nom y estant dessus. la logique de Jungius[6] doit estre parmi les autres livres de Konig.

1) Das schwedische Herzogthum Bremen und Verden war 1675 von zellischen, wolfenbüttelschen und münsterschen Truppen besetzt worden; nach dem Tode des kriegerischen Bischofs von Münster, Bernhard von Galen († 1678), ging Herzog Georg Wilhelm von Zelle ans Werk, dessen Kriegsvolk zu verdrängen.

2) Vor maistres ist ein Wort ausgestrichen, es scheint cavaliers gewesen zu sein, was Leibniz schon vorher gebraucht hatte. Unbezweifelt hat Leibniz dafür reîtres schreiben wollen; so schreibt er von Karl VII.: „er trägt und kleidet sich wie ein „Reiter" nach der alten Mode". Guhrauer, Leibniz 2, 269.

3) Muss heissen Ottersberg (so Br. 4.); damals fester Platz im Bremischen.

4) Ferdinand von Fürstenberg, Bischof zu Paderborn.

5) Das Buch de mortibus persecutorum, aus der Colbert'schen Bibliothek mit Et. Baluze's Noten h. g. g. v. P. Bauldry. Utr. 1693. 8.

6) Joach. Jung aus Lübeck, starb 1657 als Professor der Physik und Logik zu Hamburg. Vergl. Guhrauer 1, 144. Beil. S. 26.

IV.

Monsieur

La cyjointe vous devoit estre envoyée par le dernier courrier: mais elle arriva trop tard. Je n'ay pas voulu laisser de la vous envoyer avec cellecy, à cause de quelque détail qu'il y a de ce qui s'est passé a Verden quoyque cela soit vieux. Maintenant on dit que ceux de Zell ont changé de langage: que le Colonel Mellen écrivant au Commandant d'Ottersberg luy a seulement offert des trouppes s'il en avoit besoin, puisque ce qu'on avoit fait, n'estoit que pour empecher un tiers de se saisir de ce pays. Ils ont osté aussi les mousquetaires au grand baillif Peper, mais ils ne l'avoient pas encor relaché.

Je vous envoye icy quelques journaux de cette année. S. A. S. mon maistre en a le reste. quand je les auray je les enverray aussi. (Am Rande: Ceux que j'envoye sont jusqu'au 12me journal de cette année inclusivement.) On espere le rétablissement de la santé de Mons. de Patteborne, apresent Evèsque de Munster. Cela n'est que pour accompagner le pacquet, j'écriray plus amplement une autrefois. Le Sr Weber me pourra renvoyer les journaux, quand vous ne vous en servirez plus. J'ay receu les livres du Sr Konig, et je vous en ay beaucoup d'obligation je suis avec passion etc.

à Hanovre ce 24 de septembre 1678. LEIBNIZ.

V.

Monsieur

J'ay receu les journaux, et je vous en envoyeray d'autres quand je les auray. Mons. du Vernay dont il y est fait mention, est l'Anatomiste de l'Academie Royale des sciences et fort de mes amis. Jeune homme encor, mais qui promet beaucoup. L'auteur du journal s'appelle de la Rocque. Il m'écrit quelques fois. Mais pour vous dire la verité, il n'est pas de la force de Mons. l'Abbé Gallois qui faisait les journaux avant luy, et qui est apresent prés de M. Colbert, et dans la faveur[1]). Pour ce qui est des verres hyperboliques, et de leur usage pour les grandes lunettes, on y trouve quelque difficulté, mêmes aprés la demonstration de Mr. des Cartes. Il prouve bien que tous les rayons paralleles à l'axe de l'hyperbole aprés la refraction viennent se rendre au foyer, et que par consequent tous les rayons qui viennent d'un point éloigné qui repond à l'axe (ou qui tombe dans l'axe continué) pouvans passer pour paralleles à cause de l'éloignement, seront ramassés mechaniquement ou a peu prés en un seul point. Mais cela n'a pas si bien lieu à l'égard des autres points de l'objet, qui sont à costé. Et si nous voulons pousser trop loin le parallelisme pretendu mechanique ou sensible, des rayons qui viennent d'un point éloigné, il faudra prendre mêmes des rayons de differens points, pour paralleles par ce qu'il y a toujours un rayon A B d'un point donné A, parallele au rayon L M d'un autre point donné, L. Donc tous les rayons d'un point donné éloigné A, par exemple A B et A C; estant tenus paralleles entre eux pour la practique à cause de l'éloignement[2]), et L M et L N aussi venans du point eloigne L, estant tenus paralleles entre eux pour la practique; Et A B, L M estant paralleles entre eux absolument et en effect, il s'ensuit que les rayons quelconques A B, A C, L M, L N, de deux points éloignés seront tenus paralleles pour la practique et par consequent ramassés ensemble par l'hyperbole, ce qui féroit une vision confuse des rayons de differens points. (Mehrere Zeilen ausgestrichen.) Le cercle n'amasse pas assés bien tous les rayons d'aucun point, mais en échange il se rapporte mieux à de differens points tout à la fois, à cause de son uniformité; on voit par la que l'hyperbole a des avantages, et des desavantages; et pour demonstrer exactement que les uns sont plus grands, que les autres, il faut une recherche geometrique assés subtile, que je n'ay pas encor faite quoyque j'en aye eu quelques fois le dessein. Mais la difficulté qu'il y a de bien faire des hyperboles m'en a osté l'envie La maniere dont Mons. des Cartes s'est servi est trop difficile et trop embarassée, il y en a de bien meilleures. Les machines n'étoient pas son fait. Mais apres tout Mons. Hudde[3]) quoyque grand Cartesien a fait voir par le calcul que le Cercle peut presque faire le même effect dans la practique que l'Hyperbole

La Bibliotheque de Konig paroist assés bonne; on y trouve au moins le plus ordinaire, qu'on auroit de la peine de chercher ailleurs.

J'ay eu il y a long temps la même pensée que vous avés, Monsieur, de faire rendre justice à M. Brand[4]) auteur du phosphore: mais c'est un homme qui recoit fort mal les biens qu'on luy fait. Non seulement j'ay fait parler de

luy, mais même je luy ay procuré un avantage considerable de S. A. S. mon maistre. M. Brand m'avoit prié de n'en pas parler de peur que M. Craft ne le sceût, de qui il pretend encor quelque argent. C'est pour quoy je ne vous en avois point parlé. Maintenant M. Brand même m'oblige de vous en conter l'histoire. Estant à Hambourg je fus ému de pitié de son mauvais état et des plaintes qu'il faisoit. Et ayant écrit à S. A. S. mon maistre j'obtins d'elle le pouvoir de luy accorder une pension de 120 écus par an. En echange il s'obligea premierement de communiquer son phosphore et en deuxieme lieu de communiquer ses autres secrets, dont il parloit bien hautement; et troisiémement de les executer icy ou à Hambourg quand S. A. S. le demanderoit moyennant que la peine et la dépense luy en fut payée. Il a eu de moy à Hambourg effectivement la somme de 74 écus et ayant esté icy 2 ou 3 semaines, il a eu encor outre sa dépense jusqu'a 24 écus. Mais comme ces gens la ont de prétensions ridicules: il s'en plaignit à son retour à Hambourg par une lettre impertinente qu'il m'écrivit; comme si on ne luy en avoit pas donné asses, et comme si j'en estois la cause. Je m'en fachai un peu, comme de raison, et je luy écrivis une reprimande, demandant en même temps, qu'il revint icy, pour executer ce qu'il avoit promis icy à S. A. S. qui en le renvoyant à cause de son voyage de Linsbourg*) ou elle a séjourné tout l'automne, luy avoit ordonné de se retrouver icy à son retour. C'est pour quoi je luy écrivis de s'expliquer icy sur ce qu'il vouloit avoir pour sémaine en tout, pendant qu'il seroit icy, à fin qu'il n'y eût point de dispute. Il ne m'a pas répondu; mais S. A. S. ayant pris cela en mauvaise part, et moy qui l'a recommandé — ne trouvant pas cela plaisant, je luy écris présentement la lettre cyjointe, pour le presser: et comme vous m'avés donné occasion dans la vostre de songer à luy, Vous vous estes attiré une affaire, et je vous supplie Monsieur de luy parler et de luy rendre la lettre; il a une femme qui contribue fort à sa ruine. C'est une salotte qui mange tout ce que le pauvre homme gagne; de plus elle est impertinente: c'est pour quoy il vaudroit mieux le faire venir chez vous plustost que d'aller chés luy: à fin de luy faire des remonstrances à part, et le faire entendre des raisons. Car asseurément, s'il fait l'impertinent, il perdra sa pension, puisqu'il ne fait pas ce qu'il a promis. Il y a déja du temps, que je n'ay pas eu de réponse de luy. C'est pour quoy à fin d'en tirer une de luy qui soit positive, j'ay crû que je ne pouvois mieux faire que de vous supplier de la procurer. En vous donnant la réponse, il la vous donnera ouverte, à fin que vous voyiés, si elle est telle qu'il faut; et l'obligiés d'en dresser une autre, si elle n'est pas convenable. Vous luy ferés une charité, Monsieur, et à moy une faveur. Faites semblant, Monsieur d'avoir receu ma lettre à Mons. Brand il y a déja 15 jours mais d'avoir esté empêché, par ce que j'ay oublié de luy écrire et de luy envoyer la cyjointe qui vient de M. Kunkel par la voye de M. Craft (am Rande: ma lettre est retrodatée pour cette raison). De plus S. A. S. m'avoit ordonné il y a déja quelques semaines de presser M. Brand. Mais d'autres occupations m'ont empeché d'y songer. Je vous supplie Mons. de ne pas trouver cette liberté mauvaise.

Je suis avec zele etc.

Leibniz.

P. S. Je vous remercie du memoire de Messrs les Ambr[s] de Suede. Il paroist bien fait. J'ay veu ce que les Ministres de Brandebourg écrivent aux états; ou ils flattent la France ils y mettent en avant que Messrs de Suede ont asseuré d'avoir fait un traité avec le Roy de Pologne contre l'Electeur. Mais cela est sans apparence. S. A. S. mon maistre est allé à Linsbourg; il y aura une conference des ministres tout au prés, à Stockhem. L'un ou l'autre des princes ses freres se rendra aussi à Linsbourg à ce qu'on dit. Mons. l'Evesque de Munster est tres mal satisfait du Roy de Dannemark qui luy retient ses trouppes au dela du temps dont ils sont convenus.

Hannovre ce 6. Dec. 1678.

1) Ueber Abbé Gallois und Colbert vergl. Br. 6 und Guhrauer 1, 197. Es ist die Rede vom Journal des sçavans.

2) Am Rande hat Leibniz gezeichnet A /\ B C L /|\ M N N

3) Ueber Hudde s. Leibniz selbst Br. 16. Vergl. Guhrauer 1, 183.

4) Brand, Kunckel (von Löwenstern) und Crafft (so ist seine Unterschrift) kommen oft nachher vor; der erste ein ruinirter Kaufmann zu Hamburg, der zweite damals geheimer Kammerdiener und Aufseher des kurfürstlichen Laboratoriums zu Dresden (von ihm überhaupt s. Gmelin Gesch. d. Chem. 2, 153), Crafft, reich an industriellen Projecten, Begründer einer Seidenmanufaktur bei Dresden und zu Leipzig, aber viel angefochten (s. Br. 25, 26.). Es war Streit, ob Brand oder Kunckel Erfinder des Urinphosphorus sei. Leibniz spricht sich für Brand aus (s. Br. 26.) und hat später der Sache eine eigne Schrift historia inventionis Phosphori gewidmet (Schrift. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1, 9., vergl. Guhrauer 1, 197. Beil. 25); doch giebt es noch Stimmen für Kunckel. S. Fischer Gesch. d. Phys. 3, 186; Gmelin Gesch. d. Chem. 2, 85. u. 116.

5) Linsburg, hannöversches Lustschloss nicht weit von Nienburg an der Weser.

VI.

à Hanover ce 17 de Xbre
1678

Monsieur

Je vous suis bien obligé de la peine que vous avés prise pour voir M. Brand. Cependant il m'a écrit une lettre par la quelle il s'offre de venir quand on luy voudra envoyer ce qu'il faudra et pour venir icy, et pour faire subsister les siens à Hambourg' Mais il n'aura de l'argent que lors qu'il sera icy, si ce n'est qu'on luy donne quelques écus pour le voyage. Car il n'y a pas grande seureté en sa parole. Je luy écris par la presente poste de vous aller trouver et de vous declarer distinctement combien il demande par semaine, à fin de luy donner autant que de raison, et de determiner tout avant que de venir icy. En cas qu'il vous vient trouver, je vous supplie, Mons., de le reduire à quelque chose de raisonnable, sur le pied de sa subsistance et de celles des siens. Il est homme à faire des demandes extravagantes, et à dire des choses aux quelles

il ne faut pas s'arrester. Vous jugéres à peu prés Monsieur ce qu'un homme comme cela avec sa femme et enfans doit avoir pour vivre à Hambourg. Quand vous aurés reduit sa demande à quelque chose de raisonnable, alors je la proposeray à S. A. S. mon maistre de qui il depend de l'approuver ou moderer. J'espere Monsieur que vous aurés cette bonté pour moy, et cette charité pour cet homme qui en a si besoin. Et je souhaitte des occasions, pour vous estre utile en quelque chose.

M. de la Rocque est auteur du journal dépuis qu'il a recommencé d'estre continué sans interruption Car auparavant M. l'Abbé Galloys (qui luy a transporté son privilege pour un certain temps) ne donnoit quelques fois que deux ou 3 journaux par an dépuis que M. Colbert l'avoit attiré à luy. Car apresent il est son domestique, et il y a des gens qui disent qu'il pourra estre Evesque un jour. — Les conferences de M. Denys n'ont rien de commun avec le journal. Quand M. de la Rocque commença, les Conferences avoient déja cessé. M. Denys fut obligé de changer ses memoires en conferences, à cause du privilege de M. Galloys au quel ces memoires estoient contraires.

S. A. S. est revenu de Linsbourg samedy passé ou elle s'était abbouchée à Mons. l'Evesque d'Osnabrug; il y avoit une conference à Stockhem gueres loin de la, entre les ministres de la maison.

Il y assés long temps que M. Buchwald[1]) a passé icy. Mais alors tout le monde croyoit qu'il n'avoit pas eu de grandes negotiations à faire je croy que toutes ses negotiations icy doivent aboutir à procurer la paix à l'Allemagne, et quelque satisfaction à la Suede sans le passage des François dans l'Empire, qui est dangereux et honteux tout ensemble.

Leibniz.

P. S Je voudrois bien sçavoir des particularités de ce que vous m'avois dit un jour en passant du secret chymique de l'Electeur Auguste. Il me semble que l'Electeur a eu le secret de David Beuther[2]) Vous m'avés dit qu'il ne manque aujourd'hui que le ciment: il seroit à souhaiter que l'on pût voir au moins ce qu'on en a, parceque j'ai trouvé un Manuscrit ou il y a quelques secret de ce Beuther et entre autres un ciment[3]).

1) v. Buchwald, dänischer Abgeordneter für Hannover. Vergl. Br. 16.

2) Dav. Beuther, Alchymist b. Kurfürst August v. Sachsen.

3) Hier die Antwort Philipp's: Hambourg ce 21 Decembre 1678.

Monsieur

je vous jure, que je m'employeray toûjours avec la plus grande joye du monde à vos services, de sorte que vous n'avez pas besoin d'user d'aucune excuse lorsque vous m'en donnez l'occasion, puisque je le prendray toujours pour une marque de vostre sIncere amitié, que j'estime infiniment. Mr. Brand me vint voir hier au soir, où après quelques paroles generales, je le priay, de me dire sans façon, ce qu'il demandoit par semaine pour l'entretien de sa personne et de sa famille. il me repondit, qu'il nourrissoit chez luy 8 bouches qui, avec la sienne, luy coûtoient chaque jour 7 marcs à entretenir, et qu'il ne croyoit pas que ce seroit trop, s'il demandoit 2 écus par jour, qu'il pouvoit gagner facilement icy avec ses malades. et quoyque je luy disois, que c'estoit trop, et qu'il devoit estre raisonable dans une affaire où il s'agissoit de son établissement, il persista pourtant en cette demande, et me dit qu'il vous en vouloit écrire luy-mesme. Il est bien vray, qu'il fait assez cher vivre icy, sur tout quand on doit entretenir une famille; avec tout cela, je crois que 500 écus suffisent par an pour un homme de sa

sorte. Je trouve les conferences de Mr. Denis assez joliës et la pluspart fondées sur des experiences, et je voudrois bien en avoir les suites depuis le mois de Fevrier an 1674 qui est la derniere de celles que Mr. Elzevier a inserées dans son impression du journal: si vous me les pourriez faire avoir, Monsieur, vous m'obligeriez sensiblement. J'ay ecrit aujourd'huy à Dresden pour sçavoir au fonds ce qui est du Procés chymique de l'Electeur Auguste, et aussy-tost qu'on me le fera sçavoir, je vous en donneray part. On m'a dit, que Mr. de Buchwald, qui est presentement retourné à Celle, y negocie avec chaleur pour son Roy, mais qu'il y est contrecarré par Mr. le Conte de Rebenac qui y est allé d'icy, et par Mad. la Duchesse de Mecklembourg Suerin, qu'on dit avoir apporté des propositions fort avantageuses de France pour Mr. le Duc. Comme cette Cour-là communique sans doute ses affaires avec la vostre, je vous prie, Monsieur, de me donner quelques lumieres en cette intrigue. Il me semble, que le dernier malheur qui est arrivé aux Suedois près de Bornholm, les obligera de faire des propositions à Nimmegue plus acceptables que celles qu'ils ont faites jusqu'icy, et que mesme le Roy de France sera bien aise qu'ils le fassent, et qu'ainsy ils le degagent en partie de la parole qu'il leur a donnée de les assister jusqu'à ce qu'ils soient entierement restituez. L'Armée de Livonie n'a jusqu'icy trouvé aucune resistance en Prusse, et l'on craint, qu'elle n'ait déja attaqué et mesme emporté la ville de Conigsberg: l'Electeur de Br. est resolu de l'aller combattre en personne. Nostre prince Electoral est presentement à Vienne, mais on attend son retour de jour à autre à Dresden: il me semble, que cette cour là est un peu dangereuse pour les princes protestants, a cause des Jesuites qui y sont toutpuissans.

Je suis avec un zele tres-sincere,

Monsieur

vostre tres-humble et tres-obeissant serviteur

C. Philipp.

Ein unbedeutendes Postscript ist weggelassen worden.

VII.

à Hannover
ce 3 de janvier 1679

Monsieur

Apres avoir satisfait et à la coûtume, et à mes sentimens en Vous souhaittant une nouvelle suite de prosperités avec la nouvelle année, je suis obligé de vous dire, que j'ay esté assés empeché depuis quelques jours; sans cela j'aurois écrit il y a long temps.

Il a esté icy un Envoyé de l'Empereur, c'estoit l'Evesque de Tina (en Dalmatie) autrement le Père Rocca[1]) il a esté aussi à Mayence, à Cassel, à Zell; en partant d'icy il alloit à Wolfenbutel, et je croy qu'il retournera chés luy par Dresde. Ses propositions n'estoient que des exhortations de la part de l'Empereur à concourir au bien public: mais elles n'avoient gueres de relation aux affaires de Nimwegue.

J'ay leu une lettre imprimée qui contient des remarques sur le memoire de Brandenbourg, je la trouve belle mais fort piquante. En effect le memoire du Ministre de Brandenbourg a donné belle prise à l'auteur de la lettre, lors qu'il se met à flatter la France, assés hors de saison

On croyoit l'affaire faite à Nimwegue entre l'Empereur et la France, mais elle se trouve accrochée de nouveau sur la question du passage, et de la satisfaction de Lorraine. Il me semble, que l'Empereur ne pourroit mieux satisfaire à sa reputation, qu'en prenant sur luy et sur l'Empire la restitution de la Suede, en execution d'un resultat de la diete, qu'il aura sans doute quand il voudra. La France pourroit joindre quelques mille hommes aux siens en cas de necessité; mais sans doute les affaires ne viendroient pas alors à cette extremité. Je croy qu'on a de la disposition a Zell d'entendre à un accommodement raisonnable, et qu'on ne s'arrestera gueres aux oppositions des Ministres de Dannemark et de Brandebourg. Mons. l'Evesque de Munster ne dissimule pas qu'il croit qu'on ne doit pas risquer le principal pour un petit accessoire. Si la Suede se relachoit tant soit peu, je croirois les affaires faites.

L'Ambassadeur d'Espagne a esté mal satisfait de ce que le prince Electoral de Saxe a eu place immediatement apres l'Empereur au divertissement des traisneaux; je trouve les Espagnols bien impertinents avec toutes leurs rodomontades hors de saison. Il est constant qu'il n'y a guères de bonne intelligence entre Vienne et Madrit et que les Espagnols cherchent des pretextes pour empecher le mariage du Roy d'Espagne avec l'Archiduchesse fille de l'Empereur.

J'écris au Sr. Brand par la même poste.

J'aurois quelques autres journaux pour les vous envoyer; je suis avec passion etc.

Leibniz

P. S. Je vous supplie de me recommander à M. le Chancelier de Puffendorf et à Mons. le Consr. Gudius[2]). Si vous voyés même Mons. le Baron de Marenholz[3]), je vous supplie d'en faire autant. Vous m'obligeriés aussi en faisant souvenir M. Klinger de quelques choses qu'il m'a fait esperer de Jena. Je voudrois bien sçavoir en quel estat est apresent la cour de M. le duc de Meclenbourg Schwerin.

1) Rojas oder Roxas aus dem Geschlechte der Spinola, Bischof von Thina, bekannt durch seine henotischen Versuche, die ihn damals an den Hof des katholischen Herzogs Johann Friedrich führten. Vergl. Guhrauer 1, 210. 359. 360. Beil. 46. Bd. 2, 19.

2) Marq. Gude, zu bekannt, um hier näher bezeichnet zu werden, hochgeachtet und oft begrüsst von Leibniz. S. u. a. Br. 11.

3) Von diesem Diplomaten s. auch Br. 13. 23. 24.

VIII.

Monsieur

Nous n'attendons que des mechantes nouvelles du costé du Rhin, soit de Cologne ou de Strasbourg; à cause du froid qui continue et qui donnera moyen aux François de passer les rivieres sans difficulté. Je crois que la paix seroit déja conclue, si les François vouloient avoir quelque égard à l'honneur et à la reputation de l'Empereur. Mais ils veulent qu'on recoive d'eux la paix comme une grace, et qu'on les supplie à mains jointes de proroguer le terme

qu'ils ont l'insolence de fixer à de certains jours. Cependant nous sommes presque dans l'impossibilité de continuer la guerre: et il faut bien que le Roy de France en soit persuadé puisqu'il a enfin fait executer le licentiement de 45m. hommes de pied, et 11m. chevaux. Non obstant tout cela on me mande de Vienne qu'on y a resolu finalement la continuation de la guerre. Dieu veuille que cette resolution soit salutaire à l'Empire: mais de la maniere que les choses sont disposées j'apprehende des evenemens funestes. Il est vray qu'on se tient à couvert à Vienne, mais le Rhin, et peut estre le Weser en patiront. — Peut estre que les François relacheront quelque chose, en consideration des Suedois; car s'ils veuillent n'avoir égard qu'à eux mêmes, ils doivent estre ravis d'avoir pretexte de continuer une guerre ou il n'y a plus rien à apprehender pour eux, et qui ne sçauroit presque incommoder la France puisque le Commerce est libre.

Je seray bien aise de voir par vostre faveur la lettre de l'Electeur de Brandebourg à l'Empereur écrite de Doberan. Je vous envoye la description du nouveau Microscope de la maniere qu'on le fait à Paris, l'artisan s'appelle Butterfield, Anglois. Je Vous supplie Monsieur de faire envoyer par M. Schulz ou quelque autre libraire l'histoire de feu M. d'Ulefeld[1], parceque S. A. S. mon maistre desire de l'avoir promtement. Je vous supplie de me pardonner cette liberté et de me croire etc.

L.

Hanover ce 17 janvier 1679.

P. S. Mons. le Major Jordan est icy dépuis quelques jours. On fera un essay de nostre Opera la semaine qui vient. On le representera quand Mad. la duchesse d'Osnabrug viendra, ce qu'on ne sçait pas encor precisement.

Je vous supplie de me renvoyer les encloses.

1) Le Comte d'Ulfeld. Par. 1677.

IX.

à Hanover ce 28 janvier 1679

Monsieur

Il y a icy maintenant Monsieur le Duc d'Osnabrug, Mad. la Duchesse d'Osnabrug, Madame de Meclenbourg, les quatre princes d'Osnabrug; et en un mot bien du monde. Nostre opera contribue en partie, à nous attirer ces affaires. Cependant il faudra encor attendre quelques jours, avant qu'il se puisse representer: l'impression n'est pas encor achevée non plus, et je la vous envoyeray aussi tost que je l'auray. (Am Rande: Ce n'est pas une traduction de l'opera de Paris, mais une tout autre piece.) Nous attendons la conclusion de la paix avec bien de l'impatience. Cependant qu'elle (soll heissen quelque) esperance qu'il y en ait, elle nous a trompée si souvent, que je ne

la croiray que lors qu'il n'y aura plus lieu de douter. Mons. le Major Jordan est icy et à son poste chés l'aisné des princes d'Osnabrug. Les lettres disent que les François ont pris Lechenich, et assiegent (c'est à dire prendront) Grevenstein[1]. L'assemblée de Francfort doit commencer bientost, et Mons. Busch que j'ay veu icy, et qui vient de Vienne y doit aller de la part de M. d'Osnabrug. On presse ce Prince d'accepter la qualité de General des armées alliées du costé du Rhin, mais il s'en defend, jusqu'à ce qu'il y ait plus d'apparence d'avoir tout ce, qu'il faudra pour exercer dignement une telle charge. Ils font grand bruit à Ratisbonne sur ce que Monsieur le duc de Lorraine a sommé les estats voisins en des termes un peu forts de contribuer à l'entretien de la garnison de Philipsbourg. On se formalise sur des bagatelles et on neglige l'essentiel.

Si le refutateur des Longitudes de Bond[2] pretend d'avoir demonstré l'immobilité de la terre, il ne doit pas estre grand Mathematicien. C'est comme si on vouloit demonstrer l'immobilité d'une piece de bois qui flotte dans la mer. Je n'ay point de commerce immediatement avec Mons. Hook, et M. Grew[3] m'envoya seulement un billet de sa main. Je n'ay pas encor écrit dépuis en Angleterre, mais j'écriray au premier jour

Si la regle de la declinaison de l'aimant estoit trouvée, les longitudes le seroient aussi. Or pour y arriver j'ay un dessein en teste, qui me paroist considerable et qui pourroit aumoins nous faire avancer beaucoup. C'est que je me suis imaginé une espèce de compas plus sensible sans comparaison que les ordinaires, par le moyen du quel on pourroit peut estre observer les changemens de la declinaison de semaine en semaine et de lieue en lieu au lieu que dans les ordinaires on l'observe seulement d'année en année, et de 10 lieues en cinquante lieues plus ou moins. Le mal est que les ouvriers icy sont trop mal adroits et trop intraitables pour executer quelque chose de cette nature. Cela se pourroit bien faire à Hambourg, mais je n'oserois vous prier d'avoir l'oeil la dessus, car vous avés bien d'autres affaires. Cependant c'est dommage qu'une telle chose demeure là, car je ne doute point que cette sorte de compas ne soit un jour mise en vogue.

Je ne sçay rien qui merite d'estre écrit à M. Hevelius; car il cherche des observations et je ne sçay point d'observateur à 100 lieues à la ronde. Mons. de Mariotte[4] à Paris travaille à un traité de l'arc en ciel, ou il pretend expliquer des choses ou M. des Cartes est demeuré court; sur tout à l'égard des couleurs, il y pretend aussi de rendre raison des experiences de M. Neuton, qui semblent renverser les maximes ordinaires de la dioptrique.

Au reste, Monsieur, je suis obligé de vous demander une grace, qui vous emportera quelques heures, si vous avés la bonté de l'accorder; c'est que j'ay bien des livres de M. Schulze qui ne sont pas encor accordés. Cependant il a déja receu quelque argent, et il demande le reste, comme de raison. Or il n'est pas aisé de marchander par lettre. C'est pourquoy je vous envoye icy les deux memoires de M. Schulze marqués de A. B. en vous suppliant d'accorder avec luy comme vous le trouverés àpropos et comme vous le voudriés faire pour vous même. Mais à fin que vous ayiés moins de peine pour le faire, je vous envoye deux autres memoires ou mon valet a calculé

tous les livres suivant le nombre des feuilles ou suivant l'Alphabet: marquant par tout le lieu ou le livre est imprimé, et s'il y a des tailles douces, et combien il y en a à peu près. Il ne faut pas s'y arrester en effect, mais au moins cela peut servir de base, pour faire l'estime du livre, en joignant par apres les autres considerations de la reputation et de la rareté du livre; quoy qu'il n'y ait gueres de rares parmy. Il ne faudroit par monstrer à M. Schulz ces deux memoires C. D., ils vous pourront servir aumoins à vous arrester à quelque chose et à accorder avec luy. Le tout estant accordé M. Schulz en fera autant de comptes separés, qu'il y a de 40 écus dans la somme totale Et comme je luy ay déja payé deux fois 40 écus, il y mettra à deux de ces comptes une quittance ou aveu, qu'il a receus de moy ces 40 écus, suivant le temps, que je les luy ay payé. Voila Monsieur une hardiesse, que je prends, qui passe un peu les bornes, et vostre bonté fait que je m'emancipe peut estre un peu.

Cependant je ne scay point d'autre moyen pour sortir bientost d'affaires avec M. Schulze; je m'imagine que cela ne vous donnera point de peine, veu la connaissance que vous avés des livres, et je serois ravi que vous me donnassiés occasion de vous témoigner ma reconnaissance; je suis avec passion etc. L.

Hr. Schulze wird ersucht noch einmahl zu schicken Barrovii Archimedem[5]) item die letzten Transactiones.

1) Lechenich, damals fester Platz im Erzstift Cöln; Grevenstein im Herzogthum Westphalen.

2) Die Schrift: The longitude not found war gegen Bond's Treatise, longitude found (s. Fischer 3, 513. 558.) gerichtet.

3) Rob. Hooke, englischer Mathematiker und Physiker († 1703), vergl. Br. 14 u. 16. Gmelin 2, 123. Fischer 2, 424. 523. 606. 3, 59. 179. 488. Von Grew s. Gmelin 2, 109.

4) Der berühmte Physiker Mariotte († 1684) kommt hier als Gegner von Newtons Farbentheorie in Betracht. Fischer 3, 136.

5) Archimedis opera, Lat. ed. Is. Barrowius Lond. 1675. 4.

X.

Monsieur

J'ay receu la vostre du 1er fevrier, et j'espere que vous aurés cependant receu nostre opera; que vous verrés n'estre pas une traduction du françois. il a assés bien reussi, si ce n'est que les changemens de theatre ne se faisoient pas avec assés de promtitude. Je vous supplie, Monsieur, de me témoigner, si j'ay un peu passé les bornes, en vous chargeant des choses, qui ne sont au dessous de vous[1]), en effect Monsieur, vous les pouvés ajuster en partie par vostre valet, ayant seulement l'oeil dessus. La monnoye d'Hannover ne vous doit pas embarasser, car sans y avoir égard, je ne la vous ay ecrit

qu'a fin que vous puissiés incontinent juger, combien d'Alphabets chaque livre contient, et ce qu'il peut valoir à peu prés, y joignant par apres les autres circonstances: c'est pourquoy si même la monnoye d'Hannover n'y estoit pas marquée ce seroit tousjours la même chose. Elle sert neantmoins à vous dispenser de calculer la valeur du livre sur le nombre des Alphabets, car il est aisé de convertir la monnoye d'Hannover en celle de Hambourg, en considerant seulement que 36 mariegros (gros de Hannover) font un écus et que huict deniers font un mariegros; par consequent 4 schilings de Hambourg font 3 mariegros, je suppose que le schiling de Hambourg est la 48me partie d'un écus.

Il n'est pas necessaire de dire à M Schulz que je vous ay envoyé un tel compte suivant les Alphabets, par ce que ces Messieurs y ont de la repugnance. suffit, qu'on se puisse regler a peu prés la dessus.

Je n'ay garde, Monsieur, de vous incommoder par l'execution du compas que j'ay concû, et à moins qu'on ne trouve un ouvrier tres habile, et tres capable d'executer les choses qu'on luy a une fois bien expliquées; il n'y faut point songer. C'est pourquoy la bonté que vous avés de vous y offrir me donne plustost matière de vous remercier, qu'envie de m'en prevaloir.

Monsieur le Comte de Revenac[2]) a conté icy des particularités de ce qui est arrivé en Schwede à Monsieur Aschenberg, qui a eu la satisfaction de voir que son Roy luy a demandé pardon à ce qu'on dit. Mais il est tousjours dangereux de reduire les souverains à une telle necessité.

Madame la Duchesse de Meclenbourg est partie aujourdhuy, on dit qu'elle ira à Hambourg ou Harbourg avec Monsieur le Duc de Zell. On espere qu'elle repassera bien tost par icy, en retournant en France. On me dit que M. le Chancelier Puffendorf n'est pas à Hambourg dépuis quelques semaines.

J'ay receu le livre the longitude not-found[3]) et je le trouve miserable, l'auteur n'entend pas mêmes ce qu'il refute On est malheureux, quand on est refuté par un tel auteur. Monsieur Bulow qui est revenu d'Angleterre ou il estoit Envoyé de nos Princes, me l'a apporté, avec quelques autres livres. dont je vous entretiendrois une autrefois. Car la poste va partir.

Je suis avec passion et zele

L.

à Hanover, ce 4 de fevrier
1679

1) Statt au dessous hatte Leibniz geschrieben pas dignes; dies ist ausgestrichen und dafür au dessous an die Stelle gekommen; aber Leibniz hat vergessen auch das ne zu streichen; daher jenes quid pro quo.

2) Graf Rebenac, franz. Gesandter am brandenburgischen Hofe.

3) S. Br. 9. N. 2.

XI.

à Hanover ce 25 de
fevrier 1679

Monsieur

J'ay eu le bonheur de voir icy Monsieur le Chancelier Puffendorf. Je croy qu'il va plus avant du costé de Leipsig, et qu'il est party aujourdhuy Je suis en peine de vostre santé, puisque j'ay esté quelque temps sans en avoir des nouvelles; — car il me semble que mes dernieres lettres sont demeuré sans réponse.

Il y a du temps que je n'apprends rien de nouveau ny de Paris ny de Londres: mais c'est en partie par ma faute. Voicy les livres que M. Bulow m'a apporté d'Angleterre, je vous supplie de me renvoyer ce catalogue. Je vous supplie de me recommander à Monsieur Gudius quand l'occasion se presente. Je souhaite ardemment de jouir quelque temps de sa conversation, et de la vostre.

J'ay conçû une si haute estime de M. Gudius que je le mets en parallele avec les Scaligers et Saumaises: et je le tiens au dessus de Monsieur Vossius malgré toutes les fanfaronades de ce grand homme pretendu. J'ay feuilleté dernierement son livre de lumine[1]). O le beau raisonneur. S'il est aussi temeraire en histoire et en belles lettres, qu'il l'est en matiere de physique et de mathematiques, je ne me fierois gueres à ce qu'il dit, sans l'avoir bien examiné moymême.

J'ay grande peur de vous avoir importuné mal àpropos par le catalogue des livres de Schulz. Ayés la bonté, Monsieur, de me le témoigner ouvertement: àfin, que je n'abuse pas de vostre amitié.

On me dit que M. le Comte de Revenac va et vient à Zell, et qu'on tient la negotiation fort avancée. Vous en estes sans doute mieux informé que moy: et je vous supplie de me faire part de ce que vous en sçaurés. Je suis avec passion etc.

Leibniz.

1) Die Schrift von Is. Vossius, de natura et proprietate lucis, erschien 1662.

XII.

à Hanover ce 14 de
Mars 1679

Monsieur

Je vous suis bien obligé de la peine que vous avés prise avec Monsieur Schulz, et je vous supplie de regler l'affaire comme vous le jugerés à propos. Vous pourriés le faire en gros, comparant la somme qu'il demande avec celle que je vous ay envoyé, suivant le conte des Alphabets. Il y a long temps qu'on m'avoit envoyé de Paris la table des chapitres du livre critique sur le

texte de la Bible[1]); je ne l'ay pas encor pû retrouver parmy mes papiers, aussi tost que je l'auray je le vous envoyeray: mais j'espere d'avoir le livre même.

Voicy les journaux que j'ay pû avoir depuis ceux que je vous ay envoyés. Mais je donneray ordre qu'on envoye de Paris ceux qui manquent de l'année passée, et de m'envoyer la continuation de cellecy. Comme S. A. S. mon maistre les recoit le premier, il arrive souvent, qu'il s'en egare quelques uns.

Je m'etonne fort que le Roy de Dannemark et l'Electeur de Brandebourg veuillent se roidir. il est vray, que la France et la Suede pouvoient parler un peu plus doucement pour leur faciliter le chemin. Cependant je m'imagine que la France prevoyant les grandes dépenses qu'il faudroit pour penetrer dans ces pays eloignés à fin de forcer ces deux princes à la paix, tachera de faire une armée dans le pays de Breme et dans les environs sous le nom de la Suede, et je ne sçay si elle ne voudra pas y engager encor quelques autres aumoins indirectement. Car cela luy coustera moins que d'envoyer des armées qui seroient obligées de payer tout dans une grande partie de leur route.

Je doute encor de tous ces bruits qu'on fait courir du mariage de M. le dauphin, et même de celuy du Roy d'Espagne. Tout ce qu'on dit aussi de l'achat de Casal et de la guerre d'Italie me paroist fabuleux. Pour moy je croy que la France reposera quelque temps. Mais vous en jugerés bien mieux.

On m'a dit que Mons. Vicquefort[2]) s'est sauvé par le moyen de la fille du geolier qui s'est sauvée avec luy: et je le veux croire. Car au reste je ne croy pas qu'on se soit mis en peine à Zelle de le faire evader.

Mons. Reiselius dont le journal parle est un Medecin de Wormes[3]), homme de jugement et d'experience. Mais l'auteur du journal ne sçait pas discerner les choses grandes des mediocres: et quelque fois il eleve des bagatelles jusqu' aux nues, et parle froidement des choses d'importance. Je croy que la Machine de M. Reiselius pour representer le mouvement animal est asses mediocre, et peut estre qu'elle n'est pas achevée. Aumoins j'ay appris par la lettre d'un Medecin de ses amis, qu'il s'en faut beaucoup qu'elle soit ce que le journal en semble dire.

Je suis avec passion etc.

Leibniz.

P. S. ayés la bonté Monsieur de faire dire à Mons. Schulz qu'il m'envoye deux catalogues de la Bibliotheque de feu M. Kirstenius[4]).

Philipp's Antwort s. N. 5.

1) Vergl. Br. 13.

2) Wicquefort, holländischer Historiker und Diplomat, nach dem Fall der Brüder de Witt eingekerkert 1675, befreit 1679.

2) Reiselius, später Leibarzt der Herz. v. Würtemberg, Erfinder mehrer Maschinen

4) Mich. Kirsten, Professor d. Poesie und Physik zu Hamburg, † 1678.

5) Hier Philipp's Antwort:

Hambourg ce 26 Mars 1679.

Monsieur,

en vous remerciant tres-humblement du Journal que je vous renvoye, je vous fais scavoir, que j'ay parlé encore une fois avec Mr. Schultz, et que je luy ay fait la propo-

sition, de faire le prix de ses livres selon le nombre des feuilles de papier, ou bien en rabattant quelques sols sur chacque Marc. sur quoy il m'a répondu, qu'il ne pouvoit pas permettre qu'on estimat ses livres selon les alphabets, parce que la plupart en estoient imprimez dans des païs étrangers, et qui par consequent ne pouvoient pas estre estimez selon le prix de nostre païs; que sans cela il perdoit beaucoup, parceque vous, Monsieur, le faisiez payer aux foires de Leipzig en monnoye de Misnie, où il perdoit toujours 16 pour cent; cependant si on le vouloit payer en argent de banque, qu'alors il souffriroit qu'on rabattît sur chaque Marc trois sols de Hambourg, et que c'estoit là sa derniere resolution. je n'ay pas voulu manquer, Monsieur, de vous mander tout cela, afin que vous me puissiez faire sçavoir ce qu'il faut faire en cette affaire. Mr Schultz m'a dit aussy, qu'il vous a envoyé 2 exemplaires du Catalogue des livres de feu Mr Kirstenius.

J'ay un grand desir de voir la table des chapitres du livre critique sur la Bible, mais je souhaite bien plus de voir le livre entier.

Aprés que la paix faite entre l'Empereur et les Rois de France et de Suede a este ratifiée à Ratisbonne, je ne crois pas, que le Roy de Danemarc et l'Electeur de Br. fassent plus des difficultez de s'accommoder aussy; sur tout puisque l'Evéque de Munster a fait aussy sa paix à l'imitation du Duc de Zelle: aussy parle-t-on d'une treve d'un mois, agreée à Nimmegue entre les plenipotentiaires des princes qui sont encore en guerre; si cela est, on ne doit plus douter qu'une paix generale ne se fasse bientost. Cependant les Suedois sont obligez de laisser par tout quelque chose du leur, pour sortir du mauvais estat où ils se trouvent presentement. Le bruit, qui a couru du mariage entre le Roy d'Espagne et la princesse hereditaire de Portugal, me semble estre un peu vray-semblable: tous les autres bruits sont chimeriques.

Les pendules de carton, dont il est fait mention dans le journal me font souvenir d'une proposition de Mr Becher dans sa psychosophie, de faire des rouës d'horloges sans dents.

Monsieur Marenholtz partit d'icy la semaine passée avec toute sa famille, pour faire un voyage jusqu'à Paris: il m'a dit avant que de partir, de vous faire ses recommandations, Monsieur, et de vous prier de sa part de le conter toujours au nombre de vos amis et serviteurs.

Je ne sçay, si je vous ay déja mandé, que Mr Wicquefort fait imprimer une troisieme edition de son traité d'Ambassadeurs, augmenté d'une troisieme partie.

Je vous prie, Monsieur, de me faire sçavoir, si le Duc de Hannover congedie ses troupes, ou s'il les garde encore; et si la France paye presentement les arrerages, ainsy qu'on m'a asseuré.

Je vous envoye un Catalogue de livres imprimez en Danemarc que je vous prie de me renvoyer. Je suis plus que jamais etc.

XIII.

à Hanover
ce 4 d'Avril
1679

Monsieur

J'ay cherché partout le registre des chapitres du livre de la critique de la bible: mais je ne l'ay pas encor trouvé; comme je fais bastir; mes papiers sont un peu en desordre. Aussi tost que je l'auray je ne manqueray pas de l'envoyer. On me promet le livre entier. Voicy ce qu'on me mande de l'auteur:

La Critique de la Bible a esté effectivement defendue et le R. P. Simon qui en est l'auteur et de mes amis, a esté congedié de l'oratoire à cause de cet ouvrage. On ne le trouve chés aucun libraire. Mais je tacherai de l'avoir par le moyen de ce pere, qui est apresent curé dans un village de Normandie.

Je ne comprends rien à la maniere d'agir de M. Schulz. Si on le paye en monnoye commune; c'est qu'on l'a tousjours fait ainsi avant moy. Mais faut il qu'il fasse pour la passer tout ce qu'il demande pour indisputable, en sorte qu'il n'en faille par retrancher un iota. Je vous laisse juger, Monsieur, si le prix qu'il demande est assés moderé et raisonnable pour ne pas souffrir de diminution.

Néantmoins s'il ne veut pas écouter des raisons il faut passer pour cette fois par tout ce qu'il voudra; mais doresnavant avant que de faire venir de ses livres, il faudra premierement sçavoir et le prix qu'il demande et la grandeur precise du livre; et ce sera alors à moy de juger si je le veux pour ce prix. Cependant je suis faché Monsieur de vous donner de la peine pour cela. Je croy de vous avoir écrit d'un livre de Lactance, qui n'a pas encor esté veu, et qui sera bientost publié à Paris.

Je ne croy pas qu'il soit difficile de faire des horloges sans roues dentelées; mais il est à sçavoir si ces horloges seront meilleures que les autres; on peut faire pourtant, qu'elles soyent aussi bonnes.

Si vous sçavies l'adresse de M. Marenholz je pourrois prendre la liberté un jour de luy écrire, quand il sera à Paris.

Je ne croy pas que S. A. S. mon maistre puisse encor congedier ses trouppes; d'autant que la tréve nous fait esperer la paix generale. Je ne doute point que la France ne paye tous les arrierages avec le temps. On avoit donné ordre à nos trouppes de marcher pour empecher celles de Brandebourg de passer par nos quartiers: mais elles sont contremandées par ce qu'on a sçeu que celles de Brandebourg ne s'en approcheront pas.

Je vous remercie Monsieur du catalogue des livres de Dannemark, que je vous renvoye.

Voicy encor quelques journaux. Je suis avec passion etc.

L

XIV.

à Hanover ce 22 d'Avril
1679

Monsieur

Je vous ay grande obligation de la peine que vous avés prise d'adjouster l'affaire de M. Schulz. Je vous demande pardon de n'avoir pas plustost renvoyé le Mercure Danois. C'est ce que je l'avois donné à S. A. S. mon maistre de qui je l'ay receu dépuis peu. J'ay receu la psychologie de Becherus[1]; je voy qu'il s'imagine que l'ame en elle même peut prevoir les choses futures:

il y a aussi une grande invective contre le raisonnement. Le chapitre du mariage et des mauvaises femmes est plaisant. Je croy que le meilleur qu'il sçait est la medecine, et il feroit bien de s'y attacher. S'il a cette eau de Kergerus[2], dont il parle, qui guerit les fievres par une simple alteration, ce seroit beau et bon, je voudrois bien sçavoir en quels termes est l'affaire de la fonte des sables. Car apres avoir receu de l'argent la dessus, il ne peut pas manquer de l'achever sans faire du tort à sa reputation.

C'est sans doute un petit esprit extravagant qui s'est mêlé de faire l'Apotheose du Roy de France. Je ne doute point que ce Roy même n'en auroit horreur, s'il le sçavait[3]. Car lors que quelques uns du temps de Gustave Adolphe firent de Sued, Deus, cela parut de mauvais augure.

Lorsque M. Brand me donna de son feufroid, je fus par apres obligé de luy en rendre une bonne partie, pour en faire present à S. A. S. mon maistre, car estant icy, il n'en avoit rien sur luy. Ainsi j'en ay si peu, que je n'ay pas encor presque fait aucune experience, et pour allumer, je ne scay si cela suffiroit; neantmoins tout est à vostre service, et je le porteray avec moy, cet esté, esperant de faire une course à Hambourg.

Je voudrois sçavoir si les étoiles fixes paroissent tousjours d'une même façon; car s'il est vray comme je croy que la terre a le mouvement annuel à l'entour du soleil; elle change fort de situation à l'égard des étoiles. Mons. Hook en a déja observé quelque chose. Mais je croy qu'il y a un moyen plus aisé; qui seroit d'observer les distances apparentes des étoiles fixes, si elles changent, ou non. Car si on y pouvoit remarquer du changement, qui se rapportât au mouvement annuel; l'Hypothese de Copernic seroit autant que demonstrée. Mons. Hevelius nous pourroit apprendre si cela est sensible, ou non. Estant en Angleterre, j'en parlay à feu Mons. Oldenbourg[4]), qui me promit, de s'en informer, mais il est mort depuis.

Je suis avec passion etc. L.

P. S. M. Rebenac est icy. S. A. S. fait estat de partir pour Ems vendredy prochain.

1) Von diesem auch unten Br. 15 u. 16 erwähnten berühmten Arzte und Chemiker († 1682) s. Gmelin 2, 142 f. und von Leibnizens Verhältnisse zu ihm Guhrauer 1, 199 f. Das von Leibniz erwähnte Buch hat den Titel Psychosophia.

2) Kerger, D. med. † zu Liegniz 1692.

3) Um die Zeit des Nymweger Friedens erschienen eine Menge Schriften zur Verherrlichung Ludwigs (Meusel bibl. hist. 8, 226. 227): dass dem König nicht leicht zu stark geschmeichelt werden konnte, zeigte sich offen genug.

4) Von dem vielfältigen und trauten Verkehr Leibnizens mit dem berühmten Herausgeber der Philos. Transactions s. Guhrauer 1, 75. 126 f. 148. 168. 172. 173. 183.

XV.

à Hanover ce 13 de May 1679

Monsieur

Je vous repete mes remercimens, pour m'avoir tiré de l'embarras ou j'estois avec M. Schulz. Vous avés raison de l'appeller opiniastre: il veut qu'on ne luy retranche rien du prix qu'il met à ses livres, et cependant, ce prix est souvent excessif. par exemple il m'a envoyé tout fraichement un livre pour le quel il me demande deux écus et un autre libraire s'offre de me l'envoyer pour cinq quarts d'écus. On me mande de Hollande que M. Becher a fait une épreuve de sa proposition à l'égard du sable, et que plusieurs ont bonne opinion du succés. Pour moy j'ay de la peine à croire qu'il puisse estre bon.

Je voudrois sçavoir si Messieurs les suedois n'ont pas encor ratifié le traité de paix que M. de Rebenac avoit conclu a Zell. On dit qu'ils out fait quelque difficulté la dessus; mais comme je m'imagine que M. le Comte de Revenac n'a rien fait que de concert avec Monsieur le Chancelier Puffendorf, je croy que ce ne sont que des bruits; mais vous en jugerés mieux. Monsieur Rousseau resident de France en nostre cour est allé faire un tour à Hambourg, il fait état de nous quitter bien tost; je n'ai jamais oui dire qu'on ait acheté des semaines plus cherement que ces deux de treve que M. l'Electeur de Brandebourg a acheté pour Wesel et Lipstad et leur dependances. Cependant je ne voye pas que cela puisse rendre la condition de l'Electeur meilleure, et si les François insistent sur les mêmes demandes, comme il le depend d'eux si la paix ne se fait pas, ils n'auront pas la peine de prendre ces places. Mais je m'imagine que la paix est autant que faite.

On me mande de Paris que le Roy y veut établir des professeurs du droit civil: car vous sçavés qu'il n'y en avoit que du droit canon. On parle entre autres d'y faire venir de Tolouse, Mons. de Hauteserre, qui est sans contredit un des plus habiles qu'il y ait en France de sa profession. On nous donnera bien tost les conciles de Laodicee et de Constatinople en Arabe; tels qu'on les voit dans un Ms. de la bibliotheque du Roy.

Je crois que Mons. Gudius est encor à Hambourg, et qu'il a receu la lettre que je vous avois envoyée: mais je m'imagine qu'il est fort occupé. — Il y a une réponse imprimée de l'Emperenr à la lettre de l'Electeur de Brandebourg; mais il me semble qu'elle est contrefaite; quoyque je ne l'aye veue qu'un moment.

Je suis avec passion etc.

L.

XVI.

à Hanovre ce $\frac{12}{22}$
de Novembre[1])

Monsieur

Voicy la suite du journal des sçavans, quand vous trouverés à propos de le renvoyer, je vous supplie de le recommander à Mons. Weber à fin qu'il fasse un couvert à nostre Kuchenmeister icy. Je suis bien aise de sçavoir que Mons. Hevelius a fait de bons verres hyperboliques: je souhaiterois qu'il vous envoyât une description et de la maniere dont il s'est servi pour faire les verres, et de la construction du tuyau.

La declinaison de l'eguille est une chose delicate, et demande une grande exactitude. J'ay un projet d'une façon de compas qui nous y soulageroit merveilleusement on ne peut rien tirer des observations de M. — Sivers[2]) la dessus puisque luy même me dit de ne pas sçavoir si plusieurs eguilles à un même endroit ont la même variation. Ce que tout le monde tient pourtant pour asseuré apres tant d'experiences aisées à fairè.

Le premier qui a trouvé les petits microscopes globulaires est Mons. Hudde qui est apresent Bourguemaistre d'Amsterdam. il en a fait il y a plus de 12 ans. Mons. Lewehoek les a embellis et mis en usage avec grand succés. Maintenant on en fait grand bruit en France, comme d'une chose nouvelle.

Si la psychosophie de M. Becher se peut avoir je voudrois bien la voir J'espere que M. Schulze me l'envoyera aussi bien que les lectures de M. Hook. — Je souhaiterois Monsieur que vous puissiés apprendre en détail les propositions que M. Becher a fait à Gustrow, qui seront sans doute bien hardies. Il a coustume d'en faire par écrit, et je souhaiterois de les voir. J'ay esté long temps à Linsbourg, et j'avois laissé vostre lettre à Hanovre, sans cela j'aurois répondu plustost. Pendant que j'y estois Mons. Buchwald y est venu de la part du Roy de Dannemark, et il y a une semaine et plus que Mons. l'Evesque prince d'Osnabrug y est. Mons. Hammerstein envoyé de Mons. le Duc de Zell y fut aussi. On attendoit même Mons. le Duc de Zell luy même: mais cela n'a pas encor eu de suite. Je croy que S. A. S. mon maistre travaille pour la paix; mais je ne voy pas encor que les esprits y soient preparés. Je m'imagine que l'hyver pourra faire meurir les dispositions qu'il y a: et il seroit à souhaiter que la Suede y voulust contribuer aussi quelque chose. La France ne se declare si hautement pour la Suede, que pour avoir pretexte de continuer la guerre, qui luy a toujours esté avantageuse. Car au reste elle témoigne de se soucier bien peu de la Suede, puisque elle auroit prevenu toutes ses dernieres disgraces, si elle avoit voulu envoyer une escadre de quelques vaisseaux de guerre dans la mer Baltique, pour mettre la flotte de Suede en estat de paroistre. Mais elle est bien aise de tous ces evenemens qui obligent la Suede de plus en plus de s'attacher à elle, et qui luy donnent de pretextes si plausibles pour continuer. Il est vraysemblable que la France n'a maintenant dans l'esprit que la ruine de l'Allemagne: non pas pour la conquerir, cela n'est pas necessaire; mais pour la diviser et appauvrir. ils n'avoient du temps

passé que du mépris pour les allemans, maintenant ils ont encor de la haine pour eux. Je voudrois voir déja la Suede rétablie ou dédommagée, mais indépendante de la France. Vous me voyés dire des sottises, Monsieur, et pour y mettre fin, je reviens aux lettres, et je vous dis, que Mons. Cassini a reduit en un petit planisphere toutes les constellations qui paroissent à paris et par les degrès et les jours de chaque mois avec les heures qu'il y a marqués, et qu'on joint ensemble quand on veut chercher quelque chose on trouve dans un tour de main l'estat du ciel à quelque heure que l'on le cherche. C'est pour faire voir commodement et dans un clin d'oeil toutes ces choses à Mons. le Dauphin; voicy les propres paroles que l'on m'écrit de Paris. Cependant je m'imagine que l'état du ciel n'y sera que pour les étoiles fixes. On vient aussi de publier l'histoire des papes par leur medailles[3]). Je suis avec passion, etc.

L.

P. S. Je vous supplie de me recommander à Mons. le Chancelier Pufendorf, et a Mons. le consr Gudius.

P. S.

Tout presentement je reçois une lettre de Vienne du 10me, qui marque que le General Dünnewald a attaqué les rebelles auprés des mines, et les a défaits, leur ayant toué 1500 hommes et fait 500 prisonniers. que par ca les villes des mines sont entierement delivrées. Cette nouvelle y a fort réjoui tout le monde. Le jeune comte de Lamberg, dépeché par M. de Dunnewald en a porté la nouvelle; et M. Dunnewald en a envoyé un ample détail à M. Hocher que mon amy a veu[4]).

1) Ohne Jahreszahl; es ist 1679 zuoppliren.

2) Sivers, Mathematiker zu Hamburg. Vergl. Guhrauer 1, 199.

3) Claud. du Molinet Historia Summorum Pontificum a Martino V usque ad Innocent. X per eorum numismata ab a. 1417 — 1679. Lugd. Bat. 1678. Fol.

4) Von Dünewald's (unbedeutendem) Siege über die ungarischen Insurgenten s. Wagner, Gesch. K. Leop. 2, 698.

XVII.

Hanover ce 2 de Novbr 1680.

Monsieur

Estant assez distrait apresent, je répondray par la premiere aux lettres que vous avés eu la bonté de m'envoyer. Il y en a deux de Mons. Hansen[1]), et une de M. Bernard[2]) aux quelles je dois réponse. S. A. S. partira dans une semaine pour aller en Italie par la voye de Basle, Geneve. Mgr le prince aisné ira en Angleterre à ce qu'on dit, et le second en France. pour moy je resteray au logis grace à dieu.

Monsieur Villiers a esté icy, mais je ne l'ay pas vû en cour. Je doute même, qu'il y ait paru. Et je croy qu'il n'est plus icy.

Pour le Zinck nous voyons qu'il se fait dans les fourneaux de Goslar et s'attache à leurs parois. Mais la quantité en estant tres petite, il est bien difficile de juger si on le pourroit tirer de la mine par un autre moyen. Cependant on ne peut pas estre asseuré, s'il n'y a pas de lieu, ou il se trouve tout fait. Comme nous voyons que le Mercure qui se produit ordinairement par le feu, se trouve neantmoins quelques fois naturellement dans sa forme coulante ce qu'on appelle Mercurius virgineus. Nicolaus a Solea[3]) n'est pas un Anglais, mais un Allemand qui a écrit des metaux assez subtilement.

Je ne connois pas ce Starkey[4]) dont vostre amy vous a parlé, mais la Metallographie de Webster[5]) est peu de chose à mon avis.

Je voudrois bien sçavoir qui succedera à Montecuculi dans la charge de President au Conseil de guerre.

Je voudrois sçavoir, si le Dr. Nessel, Bibliothequaire de l'Empereur est Medecin ou ICte, item qui est celuy qui a la direction ou inspection de cette bibliotheque, et sans la permission du quel le docteur Strehlmeyer y avoit esté mis. Je voudrois bien sçavoir les noms de ceux qui sont apresent du conseil aulique de l'Empereur. Je suis bien aise d'apprendre que vous avés connoissance de M. Vicquefort. — Je suis bien aise de n'avoir plus rien a desmesler avec M. Brand il est parti icy l'année passée sans prendre congé de moy; parcequ'il me devoit quelque argent, que j'ay eu de la peine de me faire payer icy. Je ne sçay pas s'il a receu son salaire ou non. Et s'il luy en restoit encor 20 écus, cela ne me touche point. il faudroit qu'il s'addressast au successeur pour cela. Mais sa femme qui a esté icy il y a deux semaines l'a déja fait; mais elle n'a rien obtenu.

Il y a peu d'apparence que le jeune Helmont[6]) sçache de faire la projection: je luy ay parlé assez familierement il y a environ 8 ans, et il a parlé assez ingenûment, pour me faire connoistre qu'il n'a rien de cette nature.

Je suis avec zele etc.

L.

P. S.

Je serois bien aise de sçavoir si M. le Chancelier Pufendorf est de retour; et ou est M. Arendten[7]). M. Habbaeus[8]) est mort, dont je suis faché.

1) Hansen, Führer eines jungen Grafen zu Oxford, vergl. Br. 18. 21. 26. Es sind mehre Briefe von ihm an Philipp, durch und durch literarischen Inhalts, in unserer Sammlung.

2) Ed. Bernard, englischer Mathematiker, Prof. zu Oxford † 1696.

3) Nicolaus a Solea, Alchymist. S. Gmelin 2, 307.

4) G. Starkey, ebenfalls Alchymist; Gmelin 2, 4.

5) Webster, englischer Pfarrer, schrieb ausser der Geschichte der Metalle auch ein Buch über die Hexerei, von dem Thomasius eine Uebersetzung veranstaltet hat.

5) Franz Mercur van Helmont, der Sohn, Arzt und Alchymist. Von seinem spätern Besuch in Hannover (1696) s. Guhrauer 2, 18. Beil. 4.

7) Oberst von Arendten, schwedischer Diplomat. Vergl. Br. 19. 23.

8) Habbeus von Lichtenstein, schwedischer Resident zu Hamburg, berühmter wegen seiner Gelehrsamkeit. Mehr von ihm Br. 18. 19. 20. 22. 23. und Guhrauer 1, 59. 114. 139. 140. 167. Beil. 4 f.

9) Philipp's Antwort: Hambourg ce 10 Novemb. 1680.

Monsieur,

on dit icy, que le voyage de S. A. S. le Duc de Hannover, n'est pas un simple divertissement, mais qu'il y a là dessus un dessein de consequence. et comme on ne veut ou qu'on ne peut pas m'en dire davantage, je vous prie, Monsieur, de me donner quelque lumière en une affaire où je ne connois rien du tout. Je suis ravy d'aprendre que vous demeuréz au logis, car ainsy j'espère d'avoir quelquefois non seulement l'honneur de recevoir de vos lettres, mais aussy de vous voir bien-tost icy et de vous parler, après une si longue absence.

J'ay receu de Geneve une liste des oeuvres de Mr Leti, qui est presentement a Paris: tout ce qu'il a écrit, n'est pas grand'chose, quoyqu'on fasse quelque estime de son Italia regnante: je vous envoye une copie de tout ce qu'il a écrit, où vous pourrez facilement par les titres des livres juger à peu près du genie de l'auteur, qui par sa mauvaise conduite et par sa plume trop libre a esté banny de Geneve, et s'est retiré en France.

On croit, que le Duc de Neubourg aura la place de Montecucoli dans la milice, et le Marquis Herman de Bade celle du Conseil de guerre. Je crois que le Chancelier de la Cour Imperiale Mr Hocher a l'inspection de la Bibliotheque. Mr Nessel est Docteur en Droit. Le Conseil Aulique de l'Empereur consiste en 27. Conseillers, dont 21. sont Nobles ou d'épée, et les 6. autres gens de robe: la liste que j'en ay est de l'année 1675, mais il y a eu du changement dépuis ce temps-là, et je n'en suis pas bien exactement informé.

Mr de Wicquefort fait imprimer à present son histoire, qui, à ce qu'il m'a écrit luy-mesme, sera bien-tost achevée: la premiere partie, qui est déja imprimée, commence à l'année 1648, et comprend en 16. livres tout ce qui s'est fait jusqu'à la paix de Breda; la seconde partie ira jusqu'à l'an 1673. et la derniere jusqu'au temps present.

Je vous prie, Monsieur, de me dire qui est l'auteur de l'Historia pacis Wesfalicae in 8°. le livre me semble estre fait sur d'assez bons memoires

On vend icy la critique du Pere Simon sur le vieux testament; et une lettre apart contre la lettre de Mr Spanheim.

Mr Brand est un homme sans conduite, et qui se vante de sçavoir beaucoup de choses qu'il ignore: il est vray qu'il trouve ses duppes, mais ce sont des gens imbeciles et qui sont encore plus ignorans que luy.

Mr le Chancelier de Pufendorf n'est pas encore revenu de Suede, je crois qu'il demeurera à Stockholm jusqu'à la fin de la Diete, qui commence un peu à se brouiller, parceque les Estats demandent, que ceux, qui ont manié les deniers, pendant la minorité du Roy, en rendent compte avant qu'on passe outre dans les affaires; et la noblesse s'oppose vigoureusement à l'execution de la Reduction, dont ils seront tous reduits à la besace, s'ils n'en peuvent pas empécher l'effet.

Je vous prie, Monsieur, de me dire vostre sentiment, touchant la pierre philosophale, et si vous croyez qu'il y en a eû aucun, qu'il l'ait possedée, ou qu'il y en ait encore au jour d'huy qui sçachent ce secret.

Il y a encore beaucoup de hardes et des papiers de Mr Habbeus à Harbourg, si je ne me trompe, et peut-estre que son Historia Septentrionalis s'y trouve parmy. Je suis comme je dois estre etc.

XVIII.

Hanover 8 Novembre
1680

Monsieur

S. A. S. Monsgr. le duc de Zell est venu hier au soir icy, et s'en retournera démain. S. A. S. mon maistre partira à ce qu'on croit sur la fin de la semaine, le prince aisné ira en Angleterre, et le second en France. Vous aurés receu ma derniere, Monsieur, maintenant je vous supplie d'envoyer les cyjointes à Mons. Hansen. Si M. Walther[1]) peut détruire le Mercure en l'or irreduciblement c'est beaucoup, pourveu que ce ne soit pas une espece de dissipation. On le peut juger si l'operation est assez promte, et se peut faire sur une quantité notable. On m'a parlé d'un nommé Vollstätter, habile chymiste demeurant à Hambourg, je vous supplie de vous en informer. Je voudrois bien sçavoir des particularités du secret de M. Kerckring[2]) d'ensevelir les animaux dans l'ambre jaune. Je ne vous ay pas encor remercié assez de vos observations barometriques; je vous supplie de faire encor tenir la cyjointe pour M. Reiher[3]). J'apprends la mort de M. Habbaeus dont je sui faché; car j'esperois encor de parler à luy; je perdray par la les 300 écus que M. le Comte de la Gardie Chancelier de Suede avoit ordonné de me faire donner, et que M. Habbaeus avoua d'avoir receu pour moy. Informés vous un peu Monsieur ou se trouvent ses papiers et livres. Je vous supplie de me recommander à M. le Chancelier Pufendorf. Item de me mander ce que vous apprenez de la Cour de l'Empereur et de celle de l'Electeur de Saxe, et quel correspondant vous avés à Vienne. Et ce qui se passe apresent en Suede. Car je suis fort mal informé des affaires apresent. Je voudrois sçavoir si le Marcgrafe Herman sera president du Conseil de guerre à Vienne comme l'on a dit. Il y en a qui en doutent. Je suis avec zele etc.[4])

L.

1) Walther, Chemiker zu Hamburg. Vergl. Br. 20.

2) Theod. Kerkring, ebenfalls Hamburger; † 1693. Vergl. Thiessen's Gelehrtengesch. Hamb. S. 343. Gmelin 2, 24.

3) Reiher, Professor zu Kiel. Vergl. Br. 26.

4) Philipp's Antwort:

Hambourg ce 17 Nov. 1680.

Monsieur,

en vous remerciant tres-humblement des novelles, que vous me mandez dans vostre derniere lettre du 8° de ce mois, je vous fais sçavoir, que j'ay bien envoyé celles, que vous y aviez jointes pour Mr Bernhard et pour Mr Hansen. Je souhaiterois d'avoir fort souvent de ces sortes de commissions, parce que j'en profite toûjours. Je n'ay pas encore pu apprendre des nouvelles de Mr Vollstätter, quoyque je me sois informé auprès de deux ou 3. chymistes icy ou soydisant tels.

A la premiere fois que je verray Messrs Walter et Kerckring je leur demanderay des particularitez de leurs secrets. Touchant mes observations barometriques, j'ay encore a ajoûter, que le mercure a esté communément un peu plus haussé la nuit que le

jour et que *presentement qu'il est assez bas, il fait un fort beau temps pour la saison, là ou en Esté il a toûjours plû lorsqu'il estoit descendu au mesme degré; dont je voudrois bien sçavoir la raison.* Je vous ay déja écrit dans ma lettre precedente, qu'une bonne partie des livres et des papiers, de feu M. Habbæus se trouve à Haarbourg dans deux ou 3. grands tonneaux, comme un homme, qui a esté autrefois à luy, m'a asseuré, et qui m'a dit de plus, qu'il y avoit encore d'autres de ses livres et papiers à Brunsuic et à Minden; mais pour ses manuscrits, qu'il a le plus estimez, et dont cet homme a veu 22. volumes in 4. il m'a dit, qu'il croyoit qu'ils estoient presentement dans une maison que Mr Habæus avoit proche de Francfort, et le reste à la Haye où il est mort. Mon Correspondent que j'ay à Vienne est une espece de Secretaire, mais il est extremement paresseux, et ne m'écrit qu'une fois par mois ou de deux mois l'un. M^r le Chancellier de Pufendorf est toûjours en Suede, où il demeurera jusqu'à la fin de la Diete, si vous luy voulez faire tenir une lettre vous n'avez qu'a me l'envoyer. Le Roy de Suede a fait un grand coup à la diete presente, parcequ'il a obtenu que la reduction generale de tous les donatifs se fera, et qu'ainsy la Noblesse sera appauvrie et per consequent abaissée, qui jusqu'icy a tenu ses Roys comme sous la Tutele. On écrit positivement, que le Margrave Herman de Bade est déja au conseil de Guerre de l'Empereur à la place de feu Mr Montecuccoli, et que Mr Abelé est president de la chambre.

Je viens d'aprendre, que le traité de Nic. Solea qui premierement a esté mis au jour par Elias Montanus, est pris la plûpart des écrits de Bas. Valentinus et de Theophr. Paracelsus; et que ce mesme Montanus, qui estoit Medecin du Duc de Brieg a écrit plusieurs petits traitez des metaux et mineraux, fort estimez.

J'ay oublié de vous dire, que le Duc de Lorraine a la Charge de Lieut. General de L'Empereur (General-Feldmarschall-Lieutenant) et celle de Gouverneur de Raab, et que le duc de Neubourg a l'un des deux Regimens de Montecuccoli, et que le fils de celuy cy en a l'autre.

Js suis avec une passion tres-sincere etc.

NB. Ein Postscriptum ohne Bedeutung ist weggelassen worden.

XIX.

Hannover ce 23 Novemb. 1680.

Monsieur

Je ne croy pas qu'il y ait grand mystere caché sous le voyage S. A. S. mon maistre. Je vous suis fort obligé de la liste des oeuvres de M. Leti [1]), il me semble pas qu'il soit trop en seureté à Paris, s'il est l'auteur de toutes ces pieces, dont il y en a qui choquent trop le clergé. Vous m'obligerés aussi, Monsieur en m'envoyant la liste des membres du conseil aulique de l'Empereur quoyqu'il y ait du changement. Mons. Andler est mort depuis quelque temps. J'ay ouy nommer l'auteur de l'Histoire de la paix de Westphalie, mais j'ay oublié son nom [2]). Il me semble qu'il est dans l'employ en quelque cour de Saxe.

Je vous supplie de vous informer precisement ou sont les hardes de M. Habbeus à Harbourg, si elles y sont engagées ou seulement en depost, et s'il y a des papiers parmy. Et la raison est, que j'ay encor une preten-

sion de 300 écus qu'il a receu de ma part de M. le Comte de la Gardie Grand-Chancelier de Suede. Mais pour le prouver il me faudroit le temoignage de M. le Chancelier Pufendorf et de M. Arendten, qui ont veu, et ont même je croy entre leurs mains (au moins M. Arendten) l'aveu de la main propre de feu M. Habbeus. J'auois tousjours esperé de luy parler, et de les avoir de luy de bonne grace, c'est pourquoy je n'ay rien remué. Or Monsieur je vous supplie de tacher de me procurer un temoignage de M. le Chancelier Pufendorf et de M. Arendten et meme M. Pufendorf m'obligera en m'envoyant un extrait vidimé de la lettre originale de Mons Habbeus. Je vous supplie Monsieur de m'y assister, et de l'en prier de ma part, en faisant mes recommendations à ces Messieurs.

Mais il n'eu faudroit pas faire du bruit. Afin que les hardes (so statt: ne) se soyent pas mises ailleurs. Je suis avec zele etc.

L.

P. S. J'ay de la peine à croire les projections de Sulzbach, et en general je doute qu'il en ait jamais eu. Au moins le veau d'or d'Helvetius [3]) me paroist fabuleux.

1) Von den vielen Schriften Greg. Leti's († 1701) gegen Rom mag hier nur an die Roma piangente und il nepotismo di Roma erinnert werden.

2) Pfanner heisst der Verfasser.

3) Helvetius (Schweizer) schrieb einen Vitulus aureus (über Verwandlung unedler Metalle in Gold) 1667. Die Projections de Sulzbach scheinen auf ein zu Sulzbach 1679 erschienenes Buch Medulla mirabilium naturae von Siegfried (Gmelin 2, 26) zu gehen.

XX.

Hanover ce 10 de Decbre 1680

Monsieur

Je vous remercie de ce que vous m'aves mandé des hardes de M. Habbeus. Je vous supplie de vous en informer plus distinctement, s'il se peut, pour sçavoir, ou elles sont à Harbourg et chez qui. Si elles sont en depost, ou engagées. Item en quoy elles peuvent consister. Mais sur tout le nom de l'homme qui les a en garde. Si vous pouvies encor apprendre les maisons ou elles se trouvent à Braunswic et Munden, ce seroit d'autant mieux. Je croy que le thermometre (barometre, Glosse Philipp's) hausse plus de nuit, parce qu'il reste tousjours un peu d'air dans le vuide, ou il s'engendre de nouveau ex Mercurio. C'est pourquoy en vertu de l'air resté le barometre fait l'effect du thermometre. C'est à dire, l'air resté dans le vuide échauffé par la chaleur du jour et se dilatant oblige le Mercure de descendre un peu. C'est pourquoy il

se rehausse la nuit Je vous remercie tres humblement de la peine que vous avés prise de m'envoyer la liste des Consrs du Conseil Aulique de l'Empereur. Vous ferés avec la lettre pour Mons. de Pufendorf et Arendten comme vous le jugerés apropos. Les balsamations de M. Bissig[1]) se faisoient par une espece d'exiccation. Si M. Walther peut dissoudre l'or irreduciblement, c'est quelque chose. Mais sçavoir s'il fait l'effect de l'or potable tant vante et particulierement de celuy de Franciscus Antonius[2]), qu'on dit avoir esté tué par les medecins. M. Faber Allemand chymiste du Roy d'Angleterre pretend de l'avoir retrouvé. Je suis avec passion etc. LEIBNIZ.

P. S. Je vous supplie de me mander quelques choses des reformes de Saxe et des levées de Vienne. On dit que le P. Emerich, Evesque de Vienne sera Cardinal et premier Ministre.

1) Eine mir gänzlich unbekannte Person.

2) Franciscus Antonius aus London schrieb 1678 de auro potabili.

XXI.

A Hannover ce 11 de Mars 1681.

Monsieur

J'ai eu l'honneur de voir icy Mons. Marei[1]); mais je voudrois avoir pù luy estre utile en quelque chose. Le matin qu'il estoit parti, je vins trop tard d'un moment, pour luy souhaiter un heureux voyage et lui remettre une lettre pour vous. Je suis bien aise de ce que vous me mandés du Zinck, qui se doit trouver aux montagnes des geans. Car je n'en avois pas ouy parler. Et celuy qui se vend est ou de Goslar ou du levant. Je n'ay pas vù la traduction de la *ψευδοδοξια* epidemica de Brown[2]), faite par Rautner; et je vous suis obligé de l'indice que vous me faites de l'insertion de mon écrit[3]). Il s'en faut peu que je ne desavoue cet écrit que j'avois intitulé Hypothese physique, et qui, je ne sçay comment, a été fort bien receu par tout; quoyque je m'imagine que je dirois apresent bien d'autres choses, si j'estois en humeur d'écrire.

Pour ce qui est de mon sentiment touchant les ouvrages de Mons. Stenon[4]) et de Mons. Weigelius; il faut avouer que tout ce que Mons. Stenon a donné en physique est excellent; mais ce qui merite le plus d'estre estimé, c'est le traité qu'il a fait de solido intra solidum: je l'ay souvent exhorté à le pousser plus loin, et à en tirer des consequences pour trouver le commencement du genre humain, l'inondation generale, et quelques autres belles verités, qui confirment ce qui nous en est dit par l'écriture sainte.

Mons. Weigelius[5] a beaucoup d'esprit sans doute: mais souvent il est peu intelligible, et il semble qu'il n'a pas toujours des pensées bien nettes. Je voudrois qu'il s'appliquât plustost a nous donner quantité de belles observations, qu'il a pû faire en pratiquant les mecaniques, que de s'amuser à des raisonnemens generaux, où il me semble qu'il se perd quelques fois. Non obstant tout cela je ne laisse pas de l'estimer beaucoup, et de reconnoistre qu'il se trouve beaucoup de bonnes pensées dans tous ses écrits. Il est constant que le pyrope cesse de luire peu a peu quand il ne peut pas respirer. J'attends les observations de Mons. Boile, pour sçavoir comment il se comportera dans le vuide, mais je tiens par avance, qu'il ne luira point. Car je remarque, qu'une de ses pieces luisantes cesse de paroistre mêmes dans l'obscurité, quand on souffle contre. Tout cela me fait conclure, que c'est un veritable feu, mais qui est si subtil, qu'il se fait seulement connoistre à la veue, et non pas à l'attouchement, si ce n'est qu'on le frotte fort. Je seray bien aise d'apprendre des nouvelles de Mons. Hansen, car je n'ay pas eu de réponse. Je vous supplie Monsieur de vous informer, combien vaut le talc de Moscovie (Traueneiss oder Moscovisch Glass,) et pour combien on pourroit avoir une livre, au meilleur marché, surtout si on ne cherchoit pas des grandes pieces; mais indifferement telles qu'elles soyent, pourveu qu'elles soyent veritablement de ce talc de Moscovie. Je suis avec passion etc.

Leibniz.

P. S. Je vous prie de saluer Mons. Marei de ma part.

1) Geistes- und Berufsverwandter Philipp's. In unserer Sammlung befindet sich eine ansehnliche Zahl deutscher Briefe, die Marei aus Stockholm 1681 und 1682 an Philipp geschrieben hat und die meist auf die Tageschronik, insbesondere schwedische Angelegenheiten, bezüglich sind.

2) Thom. Browne, englischer Arzt, † 1682.

3) Leibnizens Schrift hypothesis physica (Guhrauer 1, 73) war mit der deutschen Uebersetzung von Brown's *ψευδοδοξία* epidemica zusammen in deutscher Sprache erschienen.

4) Nikolaus Steno aus Jütland, ausgezeichnet als Arzt, Anatom und Geolog, nach seinem Uebertritte zur katholischen Kirche Bischof von Titiopolis und als apostolischer Vikar des Nordens am Hofe zu Hannover. Vergl. Guhrauer 1, 193. 194. 360. 372. Beil. 25.

5) Erhard Weigel, Professor zu Jena († 1699) als Mathematiker, Moralist, Pädagog etc. bekannt, einer der Jugendlehrer Leibnizens, später mit ihm gespannt. Vergl. Br. 26 und Guhrauer 1, 32 f. 2, 185—211.

XXII.

à Hanover ce 18 de Mars 1681.

Monsieur

Je vous supplie de me recommander à Mons. le Chancelier de Pufendorf; et de faire en sorte que nous ayions de Mons. Arendten la verification de ce que feu M. Habbaeus me devoit encor, suivant ce que j'ay desiré dans mes lettres. Mons. de Paderborne n'est par encore mort; le bruit s'est trouvé faux; quoiqu'il ait paru asseuré. A present on dit qu'il a un ulcere dans la vessie ou dans les reins, c'est à dire qu'il n'echappera point, dont je serois faché. Ayés la bonté, Monsieur, de m'envoyer une livre de Talc, mais je vous supplie de choisir des pieces larges plustost que trop petites. Je suis bien aise d'apprendre ce que vous mandés de l'histoire de Mons. Pufendorf. Et je voudrois sçavoir si le prodromus historiae recentioris se vend déja à Hambourg.

Pour le P. Maynbourg (Maimbourg) il faut sçavoir qu'il n'est pas fort estimé en France. Cependant il écrit avec une grande facilité; et ce que je trouve de meilleur en luy, c'est qu'il cite les passages dont il a pris ce qu'il dit. Car son autorité n'est pas fort grande, et il fait bien de s'en rapporter à d'autres. Je vous prie de me mander un jour l'estat present des royaumes du Nord, car vous le sçaves au bout du doigt, et moy pas trop. Je serois bien aise de sçavoir si M. le Duc de Saxe-Lauenbourg est apresent dans ses Estats, et qui a la direction de ses affaires, item s'il y a un premier ministre à la cour de Gustrow, et qui ce pourroit estre.

Le Talc me pourroit estre envoyé par nostre agent, en adressant le pacquet à nostre Kuchenmeister. Il ne faut pas pourtant, qu'il sçache ce qu'il y dedans. — Un certain seigneur demande un gouverneur pour ses enfans qui doivent voyager; mais il en veut un, qui ait non seulement des études, et l'esprit de conversation, mais qui ait déja voyagé, et qui sçache au moins le françois. Si vous sçavés quelcun de cette sorte, je vous supplie de me l'apprendre, mais bientost, car un autre pourroit prevenir. Je suis avec passion etc.

Leibniz.

XXIII.

Hannov. ce 1 Avr. 1681.

Monsieur

Je ne vous répondis pas par la derniere, parceque je ne pus parler a Mons. de Grote qui m'avait fait écrire touchant un gouverneur. Je luy ay parlé de celuy dont vous m'avés écrit. Cependant d'autres luy ont été proposés aussi. Ce n'est pas pour ses enfans, mais pour une autre personne de

tres grande consideration, qui même ne demeure pas dans ce pays-cy. Mons. de Grote m'a dit, que si celuy dont vous m'aves parlé, vouloit faire un tour icy, pour se faire connoistre, cela dependroit de luy. Et moy je croy qu'il ne feroit pas mal. Car si l'on l'agrée je croy qu'il ne doit pas fort estre en peine des conditions. — S. A. S. avec Madame la princesse, et quantité de dames et de cavaliers de la cour ira dans peu aux bains de Wisbade. — Ce que je souhaitte le plus de sçavoir du Nord, ce sont les personnes qui ont le maniment des affaires

J'écris aujourd'hui à Mons. le Chancelier Pufendorf: quand Mons. le Colonel Arendten viendra, je vous supplie Monsieur de luy demander pour moy une attestation bien circonstanciée. Je croy même qu'il a une lettre de feu Mons. Habbeus, où il est parlé de cette affaire. Nous avous icy Mons. le Baron d'Autel et Mons. Clein, l'un envoyée d'Espagne, l'autre de Suede; Mons. de Gourville[1]) ne prend point de caractere, et veut estre considéré comme un amy. L'on croit qu'il ira au Humeling[2]) quand S. A. S. sera partie pour aller aux eaux.

Je vous remercie Monsieur de la peine que vous avés prise de vous informer du Talc de Moscovie.

Je serois bien aise de sçavoir si Mons. de Marenholz est à Hambourg, et je vous supplie de luy faire mes complimens quand l'occasion s'en presentera. J'ay veu un assez joli livre de politique du clergé de France pour destruire les protestans de France[3]). Il y a pourtant des choses qui sentent un peu trop le ministre; c'est à dire ou il paroist de la passion. Par exemple lorsqu'il fait parler un catholique qui blame l'Evesque de Condom[4]), comme s'il detruisoit l'essentiel de la religion Romaine, au lieu qu'il le faudroit louer de sa moderation. Il semble que Messieurs les ministres seroient fachés de perdre la matiere de leurs invectives, si les papistes devenoient raisonnables. Au reste cet auteur dit des belles choses pour faire l'apologie des Huguenots de France. Mais je ne sçaurois souffrir qu'il donne en passant une atteinte à l'ouvrage de M. Huet[5]) pour la verité de la religion chrestienne comme si s'estoit un ramas de critique sans jugement. Et moy je trouve que Mons. Huet a joint une grande solidité avec une grandissime erudition, quoyque il y aye des choses, dont je ne demeure pas d'accord touchant le paralléle de la theologie payenne avec la juifve. Je suis avec passion etc.

Leibniz.

1) Mr. de Gourville, französischer Abgeordneter am Hofe zu Hannover.

2) Hümeling, Höhe im ehemaligen niedern Stifte Münster, wohin die Herzoge von Braunschweig-Lüneburg zur Jagd zu gehen pflegten. S. Rehtmeier S. 1688.

3) La politique du clergé de France pour détruire la religion protestante, Amsterd. 1682, ist von Jurieu.

4) Gemeint ist die Schrift Exposition de la foi de l'église catholique, die Bossuet als Bischof von Condom 1671 herausgegeben hatte.

5) Ueber Leibnizens Verhältniss zu Huet s. Guhrauer 1, 155. 157. 362. Beil. 38. 46.

XXIV.

A. M. M PHILIPP,

Cons. de S. A. E. de Saxe
Leipzig ou Dresde.

à Hannover ce 13
de janvier 1682.

Monsieur

Je suis criminel d'avoir esté si longtemps sans vous écrire; mais j'estois dans l'incertitude à l'egard de mon voyage, et cependant tousjours occupé au Harz. Pour mon voyage de Francfort[1]), je croy qu'il seroit inutile, dépuis qu'on a connu qu'il n'y aura rien a faire en matiere de droit; ainsi je me tiens dispensé, quoyque S. A. S. ne se soit encor expliquée positivement. Il dependoit de moy d'y aller il y a long temps; mais les frais sont si excessifs, et tellement au delà de ce qu'on y avoit destiné, que j'ay traisné tant que j'ay pù; et les affaires du Harz que S. A. S. m'a commises, m'ont servi de pretexte[2]).

Je n'attends pas grande chose ny de nos traités ny de nos armes, et les affaires sont apresent dans une si mechante posture, qu'il n'y a pas grand plaisir de s'y mêler. S. A. E. de Brandebourg ne temoigne par encor grande disposition pour rentrer en ligne. — Il court icy un bruit de la mort du Roy d'Espagne, s'il est veritable, j'apprehende que tout n'aille s'en dessus dessous.

On voit une lettre Allemande, imprimée je croy à Braunsvic intitulée Sinceri antwortschreiben an seinen guthen Freund Constantinum 1682, il me semble que je reconnois Mons. de Marenholz par le style On leve bien du monde icy, et outre quelques nouveaux regimens, chaque compagnie d'infanterie sera augmentée de 60 hommes. Il y en a beaucoup qui sont déja completes. Enfin nous aurons une armée de 18 mille hommes comme estoit celle de feu Monseigneur le duc Jean Frederic. Si on fait autant ailleurs à proportion, je croy que nous pourrious donner à penser à la France. Mais jusqu'icy je n'en voy pas grande apparence.

Je suis avec zele etc. L.

P. S. Comment vont les affaires de M. Kraft?[3]).

1) In Betreff der Reunionen.

2) Hierüber Folgendes aus einem Briefe Kraft's an Leibniz.

Monsieur mon tres honoré Amy

Unsern Hr. Leibniz haben wir nun, Gottlob, in salvo. Und sind dessen formalia von solcher materi laut Briefs vom 16. Martii folgende:

Allhier hat meine Hartz-Machine nunmehr das erstemahl einen ansehnlichen Effect gethan, in deme Sie das Wasser 9 Sätze, dess ist, fast 300 Schu hoch gehoben, in wenig Tagen wird man 15 bis 16 Sätze anhängen, Ich habe mich vieler addresse bedienen müssen, umb die Sach bey vielfältigen Oppositionen so weit zubringen, habe es auch

wohl 100 mahle liegen lassen, wenn ich nicht zeigen wollen, dass Mein humor seye, nicht nachzulassen, biss ich aussgeführt, was ich angefangen.

Mein humor ist dergleichen, Und werde, ob Gott will, meine oppositiones mit eben so glücklichem success diluiren, wenn ich nicht mit gewalt davon abgehalten werde.

Vergl. über die Arbeiten Leibnizens am Harze Guhrauer 1, 202 f.

3) Philipp's Antwort:

Dresden ce 20. Janvier 1682.

Monsieur,

Vostre lettre du 13. de ce mois m'a bien donné de la joye, comme ont fait toutes les precedentes, je croyois, que vous fussiez à Francfort, mais je trouve que vous avez bien fait de n'y aller pas, parce qu'il n'y aura rien à faire: on laissera Strasbourg au roy de France, et par là on luy donnera occasion de faire bien-tost encore quelque autre invasion. Je crois que toute l'Allemagne est dans un aveuglement fatal. Mr Meiners est icy de la part de l'Electeur de Brandebourg son maître, et il nous offre d'entrer dans le traité de neutralité qu'il a fait avec le Roy de France: les autres princes ne manqueront pas de suivre son exemple, si la France leur offre des subsides. Nostre grand Maréchal de la Cour Mr de Haugwitz est à la Cour de Berlin dépuis 8 jours, mais je crois qu'il en reviendra aussytost que Mr Meiners sera party d'icy, ce qui se fera demain ou après-demain. Mr de Marenholtz se pourroit bien passer d'écrire, sur tout à present où le temps est si delicat: il nous menace encore d'un traité de la Polygamie. Les affaires de Mr Krafft vont tres-mal, et l'on dit, qu'on veut examiner bien rigoureusement ses actions, c'est à dire qu'on le veut ruiner. Nostre diete dure encore, aussytost qu'elle sera finie (ce qui se fera dans 15 jours ou 3 semaines) nos levées se doivent commencer. Les sçavans de Leipzig ont fait imprimer le premier cahier de leur Journal de cette année in 4° et ils pretendent d'en donner au public autant tous les mois. Les inscriptions de Mr Reinesius sont achevées a 4 feuilles près.

Si vous avez receu quelque chose de curieux d'Angleterre, je vous prie de m'en faire part, et de croire au reste, que je suis sans reserve etc.

XXV.

A. M. PHILIPP etc. à Dresde.

Hannover le 31 de Janvier
1682

Monsieur

J'ay receu vre lettre d. 20me de Janv. et j'ay esté rejoui d'en apprender que vous vous portés bien. Nostre cour est revenue icy avanthier de Berlin, où elle a esté fort regalée; on y a veu Mons. Haugwiz, et l'on espere que les negotiations de M. Meyners en vostre cour ne trouvent pas toute la disposition que les François se promettent. On dit aussi que S. A. E. de Brandebourg dont les sentimens sont tout a fait genereux, est prevenue par des gens qui l'obsedent, et qui s'etudient même de faire venir des faux rapports, et des

nouvelles contrefaites. Je suis faché de ce qu'on persecute Mons. Kraft[1]), que je tiens tres-honneste homme, et qu'on ne trouvera point de prise sur ses actions, mais un homme est renversé avant qu'il se puisse justifier. Je croy qu'il a quelques-uns des plus grands pour ennemis, dont il n'a pas voulu suivre les desirs interessés, du temps passé. J'ai veu l'echantillon du journal des sçavans de Leipzig; qui me plaist fort.

Il y a longtemps que je n'ay rien eu de l'Angleterre. La maniere d'amollir les os par une simple action dans un vaisseau bien fermé a vis, a esté décrite par un nommé Papin[2]).

Il est arrivé icy hier au soir un envoyé d'Angleterre, je crois que c'est Mons Skelton, qui vient de Harbourg, quoyqu'on ne m'ait encor pû dire le nom, precisement. Nous verrons ce qu'il portera.

Nostre infanterie a esté augmentée de 3 mille hommes, et nostre cavalerie le sera de deux regimens.

Je vous supplie, Monsieur, si vous voyes Mons. Senft, qui est je croy maistre de la maison de S. A. R. madame l'Electrice de Saxe, de lui faire mes recommandations, et comme je luy ay écrit une lettre, touchant un Medecin de Mad. l'Electrice, puisqu'on avoit voulu M. Conerding le jeune, qu'on avoit fait venir a Zell pour cet effect, mais l'affaire estoit demeurée imparfaite; je serois bien aise de sçavoir si on a pris un autre, ou si l'affaire est encor dans l'estat ou elle estoit; et je vous supplie de me mander la réponse et le sentiment de M. Senft. Quand vous m'envoyerés une lettre, je vous supplie de la mettre sous le couvert de

Monsieur
Monsieur Zacharias secretaire des commandemens de S. A. S.
à Hannover

Je suis avec passion etc. L.

1) Vergl. oben zu 5, 4.

2) Von Papin, Professor in Marburg, s. Fischer 3, 241. Guhrauer 2, 102.

XXVI.

Hanover cet 11 d'Avril
1682

Monsieur

Je vous dois encor réponse à v^re derniere, mais estant éloigné de Hannover j'ai voulu differer la reponse jusque à mon retour. Je suis bien aise d'apprendre que les affaires de M. Craft commencent à se changer en mieux. En effect je crois qu'on feroit bien de le maintenir, car il n'est pas homme à chercher son interest particulier; et s'il estoit de cette humeur, il auroit pû

gagner considerablement il y a longtemps. On me mande que Mons. Weigelius a fait quelques propositions à Messieurs les Estats du pays de Saxe, je serois bien aise d'en sçavoir le détail. Je serois bien aise aussi de sçavoir le progrès des nouvelles manufactures de M. Craft. J'ay eu réponse de M. Senf touchant M. le docteur Conerding; sçavoir que Madame l'Electrice est déja pourveue. Je n'ay rien entendu dutout de M. Hansen depuis les lettres que vous m'envoyâtes de Hambourg; et je m'étonne d'un silence si profond, apres des lettres qui temoignoient tant d'ardeur. L'affaire du jeune Comte de Konigsmark[1]) a fait grand bruit, et on en parle diversement. Il y a longtemps que je n'ay plus écrit à M. Reiher à Kiel à cause de quantité d'autres choses qui me detournoient. M. Craft vous dira luy même, que Brand est le veritable inventeur du vray phospore, comme il me l'a dit à moy même dés le commencement que cela éclata; et M. Kunckel, qui n'en avoit pas ouy mêmes parler auparavant, fit un voyage exprès à Hambourg, pour cet effect, et tira le proces de Brand, en luy faisant des grandes promesses il n'avoit pas pris garde à toutes les circonstances, c'est pourquoy il manqua assez souvent, mais enfin il y reussit aussi. C'est pourquoy je m'étonne fort qu'il a eu par apres la hardiesse de s'en dire l'inventeur, ce que M. Craft n'a jamais fait. Brand l'a sans doute trouvé par hazard, quoy qu'il n'en demeure pas d'accord; mais je crois d'en avoir trouvé l'origine. Il y a un procés dans Keslerus[2]), qui l'y a mené à mon avis, car quand on s'écarte un peu de la route de ce procés, on y vient aisement. Ce procés estant un particulier Brand qui ne cherche que de l'argent, a trouvé cette lumiere au lieu de l'or qu'il cherchoit dans la lune. Je n'ay pas apresent sur moy ce Kesler pour vous marquer l'endroit, mals il est aisé de le trouver. Le phosphore de M. Boyle est sans doute la même chose dans le fonds; car changeant un peu les operations manuelles, le phosphore devient plus ou moins actif, et celuy de M. Boyle l'est fort peu.

S'il y a quelque dans v^re^ Kunstkammer, qui puisse servir à illustrer les sciences, je vous prie de m'en faire part. Mons. de Monconis qui l'a veue parle d'une façon de niveau qu'il a veue, ou une éguille enfermée dans un petit cube long demeure toujours dressée perpendiculairement quelque inclination qu'ait le cube. Il me semble que Mons. Balduin est mort, il avoit un certain chymiste avec luy, je voudrois sçavoir ou il est devenu. Il y à Dresde un droguiste nommé ce me semble M. Wunderlich, je tiray de luy avec adresse qu'il a trouvé moyen de faire le Borax de Venise avec des materiaux d'Allemagne, ce qui est assez considerable. Je vous prie de luy parler sans temoigner d'avoir appris cela de moy, autrement vous luy serés suspect. Il seroit bon de pouvoir apprendre cela de luy. Il a plusieurs autres connoissances en ces matières. Vous connoissez aussi Mons. Thuski, si je ne me trompe. Il avoit fait écrire autrefois à feu S. A. S. qu'il avoit un moyen utile pour reduire et fondre la mine de plomb mieux qu'auparavant, et qu'on le practiquoit en gros à S. Anneberg, ou par ce moyen on reduisoit la mine qui sans cela ne revenoit pas aux frais. Je voudrois bien sçavoir comment s'appelle un certain Antagoniste de Kunckel qui est à Dresde, et qui est aussi chymiste et curieux[3]).

Je suis avec passion etc. L.

P. S. Je vous supplie de me le mander quand Mons. Fleming qui sera lieutenant general de S. A. E. de Saxe sera arrivé à Dresde.

P. S. Le directoire de Mayence s'estoit servi d'adresse pour conclure per majora à une conclusion precipitée, mais je crois que v^re ministre et le nostre, avec quelques autres ont rompu ce dessein.

1) Graf Karl Johann von Königsmark, Bruder des zu Hannover 1694 ermordeten Grafen Philipp Christoph und der schönen Aurora, berufen als Abenteurer auf Mars und Venus Gebieten, hatte in Verfolgung eines Liebeshandels zu London Händel mit einem Herrn Thim bekommen, war, als dieser dabei das Leben eingebüsst, verhaftet und nach Newgate gebracht worden; es stand schlimm um ihn, doch die Geschwornen sprachen Ignoramus, Graf Königsmark wurde frei und begab sich nach Ostende, um hier die Ankunft zweier Verwandten Thim's, die ihn zum Zweikampfe gefordert hatten, zu erwarten.

2) Thom. Kesler schrieb: 500 auserlesene chymische Processe 1666.

3) Es war eben jener Thusky.

ÜBER EINE NEUE BEHANDLUNGSWEISE

DER

ANALYTISCHEN SPHÄRIK,

VON

A. F. MÖBIUS.



Die vorliegenden Blätter enthalten einen Versuch, die früher in meinem «barycentrischen Calcul» dargelegte Methode zur analytischen Behandlung der Geometrie auf den Zweig derselben anzuwenden, welcher sich mit Figuren auf der Oberfläche einer Kugel beschäftigt. So wie nämlich dort jeder Punkt einer Ebene dadurch bestimmt wurde, dass man sich denselben als Schwerpunkt dreier in gewissen drei Fundamentalpunkten der Ebene anzubringenden Gewichte dachte, so wird auch hier jeder Punkt einer Kugelfläche durch drei Fundamentalpunkte der Fläche und diesen beizulegende Gewichte oder Coefficienten bestimmt. Mit den Formeln, welche dieses ausdrücken, lässt sich eine ganz ähnliche Rechnung, wie dort bei ebenen Figuren, anstellen, daher auch namentlich alle zur Collineationsverwandtschaft gehörigen Eigenschaften ebener Figuren in der Sphärik auf vollkommen entsprechende Weise sich wiederfinden. Die sphärischen Formeln sind aber noch einer andern Behandlung fähig (§. 11. IV.), wodurch es möglich wird, zu denjenigen Eigenschaften zu gelangen, welche sich auf die Verwandtschaft der Gleichheit und Aehnlichkeit beziehen, — Eigenschaften, zu deren Erforschung der barycentrische Calcul sich wenigstens nicht unmittelbar eignete. Gleichwohl aber sind es gerade diese letzteren Eigenschaften, in denen sich die höhere Allgemeinheit der Sphärik und der Reichthum, welchen sie vor der Planimetrie voraus hat, am meisten zu erkennen giebt.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich auch die Eigenschaften der letztern Art dem neuen Algorithmus unterwerfen lassen, hat mich zur Bekanntmachung desselben veranlasst, und ich glaube damit um so weniger etwas ganz Ueberflüssiges gethan zu haben, als die Anzahl der Schriften, in denen die Geometrie der Kugel analytisch behandelt wird, noch immer nur gering ist, sowie auch ein eigentliches Lehrbuch dieser Wissenschaft ausser dem verdienstlichen *Grundrisse der analytischen Sphärik* von *Gudermann* (Köln, 1830) meines Wissens nicht erschienen ist.

Hinsichtlich der Anwendungen des sphärischen Algorithmus, die ich der Erörterung seiner Principien hinzugefügt habe, möchte ich noch bemerken, dass ich, als erstes Beispiel einer solchen Anwendung, die bekannten vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie entwickelt habe, und dieses nicht allein wegen der Einfachheit des Gegenstandes, sondern auch, um von diesen Formeln einen Beweis von derselben Allgemeinheit zu geben, in welcher sie selbst Gültigkeit haben, während die bisherigen Beweise sich auf Dreiecke beschränkten, in denen jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180^0 ist.

VORAUSZUSCHICKENDE SÄTZE.

§. 1.

Der Winkel vf (Fig. 1.), welchen von zwei geraden Linien die eine f mit der andern v bildet, ist bestimmt, wenn die positive Richtung einer jeden, und in der Ebene, in welcher sie beide liegen, oder, dafern sie nicht in einer Ebene sind, in einer mit beiden parallelen Ebene der positive Sinn der Drehung bestimmt ist. Legt man nämlich durch einen beliebigen Punkt O zwei Parallelen mit v und f, trägt auf diese von O aus zwei gleich lange Linien OV und OA, so dass die von O aus nach V und nach A gerechneten Richtungen einerlei mit den positiven Richtungen von v und von f sind, und dreht hierauf OV um O in der mit v und mit f parallelen Ebene VOA nach dem positiven Sinne der Drehung der letztern, bis V mit A zusammenfällt, so ist der somit von V beschriebene Kreisbogen, oder vielmehr das Verhältniss dieses Bogens zum ganzen Kreise, das Maass des Winkels vf.

Wird OV um O nach dem negativen Sinne bis zum Zusammenfallen mit OA fortgedreht, so ergänzt der während dessen von V beschriebene Bogen den vorigen zu einem ganzen Kreise. Da nun von zwei sich zu einem ganzen Kreise ergänzenden Bögen die Cosinus sowohl dem absoluten Werthe, als dem Zeichen nach, einander gleich sind, die Sinus aber verschiedene Zeichen haben, so erhellet, dass, wenn bloss die positiven Richtungen der Linien v und f, nicht aber auch der positive Sinn der Drehung in einer mit ihnen parallelen Ebene, bestimmt sind, nichtsdestoweniger $\cos vf$ auch seinem Zeichen nach bestimmt ist, das Zeichen von $\sin vf$ aber unbestimmt bleibt.

§. 2.

Seyen F, G zwei beliebige Punkte in der Geraden f, und F_1, G_1 ihre rechtwinkligen Projectionen auf die Gerade v, so hat man

$$F_1 G_1 = F G \cos vf.$$

Hierbei ist der Abschnitt FG positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem die Richtung von dem zuerst geschriebenen Punkte F nach dem zweiten G die positive oder die negative von f ist; und Analoges gilt von dem in der Geraden v enthaltenen Abschnitte $F_1 G_1$.

Sey H irgend ein Punkt ausserhalb der Geraden f, H_1 seine rechtwinklige Projection auf v. Man verbinde H mit G und F durch zwei Gerade, die man resp. g und h nennne, und bestimme willkührlich die positiven Richtungen derselben. Alsdann ist, wie vorhin, mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen:

$$G_1 H_1 = GH \cos vg \text{ und } F_1 H_1 = FH \cos vh.$$

Unter derselben Berücksichtigung ist aber, wie auch die Punkte F_1, G_1, H_1 in v liegen mögen:

$$F_1 G_1 + G_1 H_1 = F_1 H_1; \text{ folglich}$$

$$(1)\ F G \cos vf + G H \cos vg = F H \cos vh,$$

eine Gleichung, die daher immer gilt, wenn f, g, h drei in einer Ebene liegende und sich in den Punkten F, G, H schneidende Gerade sind; welches

auch die Lage der vierten Geraden v sein mag, und wie man auch die positive Richtung einer jeden der vier Geraden bestimmen mag.

§. 3.

Porisma. Sind zwei Punkte A, B einer Kugelfläche und zwei Zahlen a, b gegeben, so lässt sich noch ein Punkt P auf der Kugel und eine Zahl p finden, dergestalt, dass, wo auch noch ein anderer Punkt V auf der Kugel angenommen wird,

$$(2)\ a \cos VA + b \cos VB = p \cos VP \text{ ist.}$$

Construction. Heisse O der Kugel Mittelpunkt. Man ziehe eine Gerade f, gleichgerichtet mit OA, d. h. eine mit OA parallele Gerade, deren positive Richtung einerlei mit der Richtung von O nach A ist. Nach einer vorher beliebig festgesetzten Linieneinheit mache man in f den Abschnitt $FG = a$, so dass die Richtung von F nach G die positive oder negative von f ist, je nachdem a eine positive oder negative Zahl ist. Durch G ziehe man eine Gerade g, gleichgerichtet mit OB, und mache darin $GH = b$. Man verbinde F und H durch eine Gerade h, bestimme die positive Richtung derselben nach Willkühr, mache hiernach den Halbmesser OP gleichgerichtet mit h und setze die Zahl, nach welcher FH von der Linieneinheit gemessen wird, $= p$, positiv, wenn die Richtung von F nach H die positive von h ist. Alsdann wird für jeden Ort von V auf der Kugel die Gleichung (2) bestehen.

Beweis. Weil f, g, h mit OA, OB, OP gleiche Richtung haben, so ist (§. 1.), wenn man noch eine mit OV gleichgerichtete Gerade v zieht, $\cos vf = \cos VA$, $\cos vg = \cos VB$, $\cos vh = \cos VP$. Da ferner die Abschnitte FG, GH, FH in f, g, h den Zahlen a, b, p proportional sind, so ist die Gleichung (2) identisch mit der für jede Lage von v bestehenden Gleichung (1), und daher gleichfalls für jeden Ort von V richtig.

§. 4.

Zusätze. a. Nach der gemachten Construction bleibt es der Willkühr überlassen, welche der beiden Richtungen von h, ob FH, oder HF, man für die positive wählt. Im erstern Falle hat man die Zahl p, $= FH$, positiv, im letztern negativ zu nehmen; und wenn der mit FH gleichgerichtete Halbmesser OP ist, so ist der zu findende Punkt im erstern Falle P, im letztern der dem P diametral gegenüberliegende Punkt oder der Gegenpunkt von P, er heisse P'. Wie gehörig, bleibt in beiden Annahmen der Werth von $p \cos VP$ derselbe, da, wo auch V liegen mag, $PV + VP' = 180^0$, und daher $\cos VP' = - \cos VP$ ist.

b. Nächst dem Punkte P und der Zahl p thuen daher auch P' und $-p$ der Forderung des Porisma Genüge; ausserdem aber kein anderer Punkt Q und keine andere Zahl q. Denn alsdann müsste für jeden Ort von V die Summe $a \cos VA + b \cos VB$ nicht allein $= p \cos VP$, sondern auch $= q \cos VQ$, mithin auch

$$(a)\ p \cos VP = q \cos VQ$$

sein. Lässt man aber in (a) den beliebig zu wählenden Punkt V das einemal mit P, das anderemal mit Q zusammenfallen, so kommt $p = q \cos PQ$ und $p \cos PQ = q$, folglich nach Elimination von q, $p\,(1 - \cos PQ^2) = 0$, und daher entweder $\cos PQ = 1$, oder $\cos PQ = -1$, oder $p = 0$. Im ersten Falle ist $q = p$ und Q identisch mit P; im zweiten ist $q = -p$ und Q identisch mit P'. So lange daher nicht $p = 0$, also auch nicht $a \cos VA + b \cos VB = 0$ ist, können der zu findende Punkt und die zu findende Zahl keine andern als P und p, oder P' und $-p$ sein.

Noch folgt aus diesen Schlüssen, dass, wenn in einer Gleichung, wie (a), Q weder mit P, noch mit dem Gegenpunkte von P identisch ist, sie nicht anders bestehen kann, als wenn $p = 0$ und $q = 0$ ist.

c. Weil die Geraden $f, g, h,$ mit denen die Halbmesser OA, OB, OP parallel sind, in einer Ebene liegen, so liegt P mit A und B in einem Hauptkreise. Und da, wie wir eben gesehen haben, der der Gleichung (2) genugthuende Punkt P nur auf die in §. 3. gezeigte Weise gefunden werden kann, so schliessen wir noch: dass, wenn für gewisse drei Punkte A, B, P der Kugelfläche und ihnen zugehörige Coefficienten $a, b, p,$ wo auch ein vierter Punkt V auf der Fläche angenommen werden mag, die Gleichung (2) besteht, erstere drei Punkte in einem Hauptkreise liegen.

d. In dem besondern Falle, wenn $a \cos VA + b \cos VB = 0$, und daher, nach dem Zusatz *b.*, entweder $b = -a$ und B mit A identisch, oder $b = a$ und B der Gegenpunkt von A ist, wird $p = 0$ und P unbestimmbar. In dem zu construirenden Dreiecke FGH fällt alsdann H mit F zusammen.

§. 5.

Das in §. 3. bewiesene Porisma lässt sich auch auf Systeme von drei und mehrern mit ihren Coefficienten gegebenen Punkten der Kugelfläche ausdehnen. Denn sind zuerst drei Punkte A, B, C mit den resp. Coefficienten a, b, c gegeben, und hat man aus den zwei erstern auf die im Vorigen gezeigte Art P und p dergestalt bestimmt, dass für jeden Ort von V, $a \cos VA + b \cos VB = p \cos VP$ ist, so kann man auf gleiche Weise aus P, p und C, c einen neuen Punkt Q mit seinem Coefficienten q so bestimmen, dass $p \cos VP + c \cos VC = q \cos VQ$, und somit

$$(3)\ a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC = q \cos VQ \text{ ist.}$$

Nur darf zwischen den mit ihren Coefficienten gegebenen Punkten nicht die Beziehung $a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC = 0$ stattfinden, indem sonst $q = 0$ sein und Q unbestimmbar bleiben würde. Es würde dieser Fall dann eintreten, wollte man, nachdem P und p aus A, B und a, b bestimmt worden, A, B, P und $a, b, -p$ die mit ihren Coefficienten gegebenen Punkte sein lassen.

Wie im vorigen §. zeigt sich ferner auch hier, dass für Q auch sein Gegenpunkt Q' genommen werden kann, und alsdann q in $-q$ zu verwandeln ist; dass aber ausser Q, Q' nicht noch ein dritter Punkt der Gleichung

(3) Genüge thut. Endlich leuchtet ein, dass, wenn A, B, C in einem Hauptkreise liegen, in demselben (auch P und mithin) auch Q sich finden wird.

Auf dieselbe Art, wie von zwei zu drei Punkten, kann man nun weiter von drei Punkten zu vier u. s. w. fortgehen und damit folgendes allgemeine Porisma aufstellen:

Zu zwei oder mehreren auf der Oberfläche einer Kugel gegebenen Punkten $A, B, C, \ldots$ und ihnen zugehörigen gegebenen Coefficienten $a, b, c, \ldots$ lassen sich immer noch ein und nicht mehr als ein Paar Gegenpunkte P und P' und diesen zugehörige Coefficienten p und p', welche einander gleich und entgegengesetzt sind, finden, dergestalt, dass für jeden Ort eines noch andern Punktes V auf der Kugel

$$a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC + \ldots = p \cos VP = p' \cos VP'$$

ist, — mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn die Summe $a \cos VA + \ldots = 0$ ist. — Liegen die gegebenen Punkte $A, B, C \ldots$ in einem Hauptkreise, so sind in demselben auch P und P' enthalten

Mag nur noch bemerkt werden, dass man, statt wie im Vorigen von zwei zu drei und mehrern Punkten fortzugehen, den Beweis dieses Satzes auch geradezu dadurch führen kann, dass man eine gebrochene Linie $FGHI\ldots N$ construirt, deren Theile $FG, GH, HI, \ldots$ resp. mit den Halbmessern $OA, OB, OC, \ldots$ parallel und ihrer Länge nach mit $a, b, c \ldots$ proportional sind, und dass man die beiden Endpunkte F und N dieser Linie mit einer Geraden verbindet. Der Halbmesser OP ist alsdann dieser Geraden parallel zu ziehen und der Coefficient p dem Abschnitte FN in demselben Verhältnisse, wie a dem FG, b dem GH, etc, proportional zu nehmen. Denn nach diesen Bestimmungen drückt die obige Formel den ohne Weiteres verständlichen Satz aus, dass die Summe der Projectionen der einzelnen Theile der gebrochenen Linie $FG\ldots N$ auf eine mit OV parallel gezogene Gerade der auf dieselbe Gerade projicirten Linie FN gleich ist, welche die beiden Endpunkte der gebrochenen verbindet. — Fallen diese zwei Punkte zusammen, so tritt der specielle Fall ein, dass $p = 0$ und OP unbestimmbar wird.

§. 6.

Porisma. Sind drei in einem Hauptkreise liegende Punkte A, B, P gegeben, von denen keiner mit dem andern identisch, oder des andern Gegenpunkt ist, so lassen sich drei in solchen Verhältnissen zu einander stehende Zahlen a, b, p finden, dass für jeden Ort eines vierten Punktes V der Kugelfläche stets

$$(2) \quad a \cos VA + b \cos VB = p \cos VP \text{ ist.}$$

Construction. In der Ebene des Hauptkreises oder in einer damit parallelen Ebene ziehe man drei sich nicht in einem Punkte schneidende Gerade f, g, h, welche resp. mit OA, OB, OP gleichgerichtet sind, und nenne F, G, H die Durchschnitte von h mit f, von f mit g, von g mit h, so stehen die Abschnitte FG, GH, FH in den gesuchten Verhältnissen.

Der Beweis ist derselbe, wie der für das Porisma in §. 3.

§. 7.

Zusätze. a. Die Verhältnisse zwischen den drei Zahlen haben nur auf Eine Weise bestimmbare Werthe. Denn könnten sich die Zahlen, ausser wie $a:b:p$, auch wie $a':b':p$ verhalten, so müsste nächst (2) noch $a' \cos VA + b' \cos VB = p \cos VP$, mithin $(a-a') \cos VA + (b-b') \cos VB = 0$ sein, woraus, da nicht $a' = a$ und $b' = b$ sein soll, der hier ausgeschlossene Fall folgen würde, dass B mit A identisch, oder der Gegenpunkt von A wäre (§. 4. *b.*).

b. Die nur auf Eine Weise bestimmbaren Verhältnisse zwischen a, b, p sind den Verhältnissen zwischen den Seiten eines Dreiecks FGH gleich, dessen Winkel von den zwischen A, B, P begriffenen Bögen gemessen werden, und es müssen daher alle die aus der Trigonometrie bekannten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks auch zwischen den Zahlen a, b, p und den von den Punkten A, B, P begrenzten Bögen stattfinden.

Zu diesen Relationen kann man auch geradezu mittelst der Gleichung (2) durch passende Annahme des unbestimmten Punktes V gelangen. Um dieses nur an zwei Beispielen zu zeigen, so kommt, wenn man V successive mit A, B, P zusammenfallen lässt:

$$a + b \cos AB = p \cos AP,$$

$$a \cos AB + b = p \cos BP,$$

$$a \cos AP + b \cos BP = p;$$

und wenn man diese drei Gleichungen resp. mit a, b, p multiplicirt und sie hierauf addirt:

$$aa + bb + 2\,ab \cos AB = pp,$$

die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines Dreiecks.

Man nehme ferner den Punkt V im Hauptkreise ABP also liegend an, dass nach zuvor festgesetzter positiver Richtung dieses Kreises der Bogen VB, d. i. der von dem zuerst geschriebenen Punkte V nach dieser Richtung bis zum zweiten B fortgezählte Bogen, $= 90°$ ist. Dadurch wird, wie auch A und P gegen B liegen mögen, $VA = VB - AB = 90° - AB$, $VP = VB - PB = 90° - PB$, und die Gleichung (2) reducirt sich auf $a \sin AB = p \sin PB$*). Aehnlicher Weise findet sich, wenn man V so bestimmt, dass $VA = 90°$ wird: $b \sin AB = p \sin AP$; mithin verhalten sich

$$a : b : p = \sin PB : \sin AP : \sin AB,$$

d. i. die Seiten eines Dreiecks wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

---

*) Nicht ganz überflüssig dürfte hier noch die Erinnerung sein, dass in diesen und andern Formeln, in denen Sinus von Bögen vorkommen, stets die Stellung der zwei Buchstaben mit berücksichtigt werden muss, durch welche der Bogen ausgedrückt wird. Denn da alle in demselben Hauptkreise liegende Bögen nach einerlei Richtung zu rechnen sind, so hat man $AB + BA = 360°$, folglich $\sin BA = -\sin AB$, während $\cos BA = \cos AB$ ist.

e. Das letzterhaltene Resultat wird noch symmetrischer, wenn man C und $-c$ statt P und p, und daher

$$a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC = 0$$

statt (2) schreibt. Denn hierbei müssen sich verhalten

$$a : b : c = \sin BC : \sin CA : \sin AB.$$

Die Substitution dieser Verhältnisswerthe von a, b, c in der vorhergehenden Gleichung giebt den bekannten Satz, dass, wenn A, B, C drei Punkte eines Hauptkreises sind, für jeden vierten Punkt V der Kugelfläche

$$\sin BC \cos VA + \sin CA \cos VB + \sin AB \cos VC = 0 \text{ ist.}$$

§. 8.

Porisma. Zu vier Punkten A, B, C, Q der Kugelfläche, von denen keine drei in einem Hauptkreise liegen, lassen sich immer vier in solchen, nur auf Eine Weise bestimmbaren Verhältnissen stehende Zahlen a, b, c, q finden, dass für jeden Ort eines fünften Punktes V der Fläche

$$(3) \quad a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC = q \cos VQ \text{ ist.}$$

Beweis. Sei P einer der beiden Durchschnitte der Hauptkreise AB und CQ, so liegen A, B, P in einem Hauptkreise, und man kann daher (§. 6.) drei in solchen Verhältnissen zu einander stehende Zahlen a, b, p finden, dass *(a)* $a \cos VA + b \cos VB = p \cos VP$ ist. Da ferner auch P, C, Q in einem Hauptkreise liegen, so lassen sich aus demselben Grunde zwei zu p in solchen Verhältnissen stehende Zahlen c, q finden, dass *(b)* $p \cos VP + c \cos VC = q \cos VQ$ ist. Mithin muss auch die Gleichung (3), als die Summe von *(a)* und *(b)*, bestehen.

Gäbe es aber noch drei andere Verhältnisse $a' : b' : c' : q$, welche gleichfalls der Gleichung (3) Genüge thäten, wäre also nächst (3) noch

$$a' \cos VA + b' \cos VB + c' \cos VC = q \cos VQ,$$

so müsste sein:

$$(a - a') \cos VA + (b - b') \cos VB + (c - c') \cos VC = 0,$$

und es müssten hiernach A, B, C in einem Hauptkreise liegen (§. 4. *c*), was gegen die Voraussetzung ist.

§. 9.

Zusätze. a. Sind demnach drei nicht in einem Hauptkreise liegende Punkte A, B, C der Kugelfläche gegeben, so ist durch sie und durch die Verhältnisse zwischen gewissen ihnen beizulegenden Coefficienten jeder vierte Punkt Q der Fläche bestimmbar. Liegt dabei Q mit zweien der drei Punkte A, B, C in einem Hauptkreise, so ist er schon durch diese zwei allein bestimmbar, und der Coefficient des dritten Punktes ist null. Fällt aber Q mit

einem der drei gegebenen Punkte zusammen, so ist jeder der Coefficienten der beiden andern null.

b. Liegen A, B, C, Q in einem Hauptkreise, so lassen sich in (3) die Verhältnisse zwischen a, b, c, q auf unendlich viele Arten bestimmen. Denn alsdann ist Q schon dnrch A und B allein, sowie durch B und C allein bestimmbar, und man kann demgemäss

$$f \cos VA + g \cos VB = r \cos VQ, h \cos VB + i \cos VC = s \cos VQ$$

setzen, wo die Verhältnisse $f : g : r$ und $h : i : s$ nur auf Eine Weise bestimmbar sind. Hieraus folgt

$$f \cos VA + (g + hx) \cos VB + ix \cos VC = (r + sx) \cos VQ;$$

mithin verhält sich $a : b : c : q = f : g + hx : ix : r + sx$, was auch dem x für ein Werth beigelegt werden mag; und es kann folglich eines der Verhältnisse zwischen a, b, c, q nach Willkühr bestimmt werden.

Eben so zeigt sich, dass bei einer Gleichung zwischen 5, 6, ... in einem Hauptkreise liegenden Punkten von den Verhältnissen zwischen ihren Coefficienten irgend 2, 3, ... beliebig bestimmt werden können.

c. Aehnlicherweise verhält es sich bei einer Gleichung zwischen mehr als vier Punkten, von denen keine drei in einem Hauptkreise liegen. Denn da in diesem Falle zwischen je vier Punkten eine Gleichung stattfindet, in welcher die Coefficienten in nur auf Eine Weise bestimmbaren Verhältnissen stehen, so werden hier bei einer Gleichung zwischen 5, 6, ... Punkten irgend 1, 2, ... dieser Verhältnisse nach Belieben angenommen werden können.

GRUNDZÜGE EINES SPHÄRISCHEN ALGORITHMUS.

§. 10.

Wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, kann jeder Punkt der Kugelfläche durch Hülfe dreier anderer Punkte der Fläche, welche nicht in einem Hauptkreise begriffen sind, und durch gewisse ihnen beizulegende Coefficienten bestimmt werden. Der Gedanke liegt nahe, diese Bestimmungsweise eines Punktes auf der Kugel zu einer Coordinatenmethode für die Kugel zu benutzen, und damit, — weil jede geometrische Untersuchung durch eine Rechnung mit Coordinaten geführt werden kann, — auf die im Obigen entwickelten Formeln und deren Eigenschaften eine analytische Sphärik zu gründen zu suchen.

Zu dem Ende wollen wir fürs Erste die in jedem Gliede aller bisherigen Formeln auf gleiche Art wiederkehrenden Zeichen *cos* und V der Kürze willen weglassen, und daher statt

$$a \cos VA + b \cos VB = p \cos VP, \; a \cos VA + b \cos VB + .. = 0,$$

u. s. w. von jetzt an schreiben

$$aA + bB = pP, \; aA + bB + .. = 0, \text{ u. s. w.},$$

und diese Gleichungen, deren Glieder dem Scheine nach Punkte der Kugelfläche mit numerischen Coefficienten sind, *sphärische Gleichungen* nennen. Es erhellet von selbst, dass man mit diesen abgekürzten Gleichungen alle die Operationen vorzunehmen berechtigt ist, wobei ihre Glieder von der angegebenen Form bleiben; dass man sie also zu einander addiren, von einander subtrahiren, mit irgend einer Zahl multipliciren oder dividiren, und Glieder von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andere mit dem entgegengesetzten Vorzeichen bringen darf.

§. 11.

Wie nun mit Anwendung solcher Gleichungen irgend eine Aufgabe der Sphärik in Rechnung gesetzt, und wie nach vollbrachter Rechnung von den Endgleichungen das gesuchte Resultat abgelesen werden kann, — die hierzu dienenden Sätze haben wir zwar bereits kennen gelernt; besserer Uebersicht wegen sollen sie aber mit noch einigen nachträglichen Bemerkungen hier kürzlich zusammengestellt werden.

I. In Bezug auf zwei Punkte A und B der Kugelfläche, die weder mit einander identisch, noch Gegenpunkte von einander sind, kann man jeden dritten Punkt P, welcher mit ihnen in einem Hauptkreise liegt, setzen:

$$P = aA + bB.$$

Dabei verhält sich $1 : a : b = \sin AB : \sin PB : \sin AP$, und man hat daher die identische Gleichung

$$\sin AB . P = \sin PB . A + \sin AP . B \text{ (§. 7. } b.).$$

Für $AB = 90°$ wird dieselbe:

$$P = \cos AP . A + \sin AP . B.$$

Ist P der Mittelpunkt von AB, und daher $AP = PB = \frac{1}{2} AB$, so wird $1 : a : b = \sin AB : \sin \frac{1}{2} AB : \sin \frac{1}{2} AB = 2 \cos \frac{1}{2} AB : 1 : 1$, und folglich

$$2 \cos \tfrac{1}{2} AB . P = A + B.$$

Man bemerke hierbei noch, dass jedem Bogen zwei Mittelpunkte zukommen, von denen der eine der Gegenpunkt des andern ist. Dasselbe lässt auch die Gleichung erkennen, da $\cos \frac{1}{2} AB$, $= \cos \frac{1}{2} (AB + 180° \pm 180°)$, zwei einander gleiche und entgegengesetzte Werthe hat.

II. In Bezug auf drei Punkte A, B, C der Kugelfläche, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, kann man jeden vierten Punkt P der Fläche setzen:

$$P = aA + bB + cC,$$

wo a, b, c nur auf Eine Weise bestimmbare Zahlen sind (§. 9. a.).

III. In jedem Gliede einer sphärischen Gleichung kann, seinem Werthe unbeschadet, statt des Punktes, welchen das Glied enthält, auch sein Gegenpunkt gesetzt werden; nur muss zugleich dem Coefficienten das entgegenge-

setzte Zeichen gegeben werden. Wenn man daher, wie in der Folge immer geschehen soll, den Gegenpunkt eines andern durch den nämlichen, aber accentuirten, Buchstaben bezeichnet, so kann man statt $aA + bB + .. = pP$ z. B. auch schreiben $aA - bB' + .. = - pP'$.

IV. Aus jeder sphärischen Gleichung, wie

$$(a)\quad aA + bB + .. = pP, \text{ ist zu schliessen:}$$

$$(b)\quad a \cos VA + b \cos VB + .. = p \cos VP,$$

wo auch der Punkt V auf der Kugelfläche liegen mag. Wenn es daher im Folgenden heisst, dass in einer Gleichung, wie (a), an die Stelle von V ein bestimmter Punkt, etwa A, gesetzt werden soll, so ist damit begreiflich die Substitution des A für V in (b) gemeint, als wodurch

$$a + b \cos AB + .. = p \cos AP \text{ erhalten wird.}$$

V. Jedes Aggregat von Gliedern kann, dafern es nicht null ist, einem einzigen Gliede gleich gesetzt werden, wie

$$(a)\quad aA + bB + cC + .. = pP, \text{ also auch} = - pP'.$$

Dabei sind der Punkt P, oder P', und sein Coefficient p, oder $-p$, aus den Punkten und deren Coefficienten im Aggregate nur auf Eine Weise bestimmbar; und wenn A, B, C, ... in einem Hauptkreise liegen, so ist in demselben auch P begriffen.

Weil der aus A, B, C, ... und a, b, c, ... bestimmbare Coefficient sowohl p als $-p$ sein kann, so erkennt man schon im Voraus, dass die Gleichung, welche ihn bestimmt, eine rein quadratische sein muss. Dies haben wir bereits in §. 7. b. bei einem Aggregate von nur zwei Gliedern bestätigt gesehen, und dasselbe lässt sich ganz auf dieselbe Weise auch bei einem Aggregate von mehrern Gliedern zeigen. Setzt man nämlich in (a) statt V nach und nach A, B, C, ... und P, multiplicirt die hervorgehenden Gleichungen resp. mit a, b, c, ... und p, und addirt sie hierauf, so ergiebt sich

$$aa + bb + cc + .. + 2ab \cos AB + 2ac \cos AC + 2bc \cos BC + \dots$$
$$= pp.$$

Wenn übrigens im Folgenden blos ausgedrückt werden soll, dass P der durch A, B ... und a, b, ... bestimmbare Punkt ist, ohne dass man zugleich auf dessen Coefficienten Rücksicht nimmt, so wird man sich statt $(=)$ des Zeichens $(\equiv)$ bedienen und hiernach

$$P \equiv aA + bB + \dots \text{ schreiben.}$$

VI. Kommt man durch Rechnung auf eine Gleichung zwischen zwei Punkten, wie

$$aA = bB,$$

und weiss man, dass die Coefficienten a und b nicht null sind, so ist daraus zu schliessen, dass entweder B identisch mit A und $b = a$, oder B der Gegenpunkt von A und $b = - a$ ist. Weiss man aber, dass B weder mit A

identisch, noch der Gegenpunkt von A ist, so hat man zu schliessen, dass $a = 0$ und $b = 0$ ist (§. 4. *b.*).

VII. Kommt man auf eine Gleichung zwischen drei Punkten, wie

$$aA + bB + cC = 0,$$

und weiss man, dass a, b, c nicht einzeln null sind, so hat man zu folgern, dass A, B, C in einem Hauptkreise liegen (§. 4. *c.*), und dass sich

$$\sin BC : \sin CA : \sin AB = a : b : c \text{ verhält.}$$

Weiss man aber, dass A, B, C nicht in einem Hauptkreise liegen, so müssen a, b, c einzeln null sein. — Denn wären z. B. a und b nicht null, und setzte man alsdann $aA + bB = pP$, so wäre P ein mit A und B in einem Hauptkreise liegender und folglich von C und C' verschiedener Punkt. Zugleich aber hätte man $pP + cC = 0$, folglich (VI.) $p = 0$, $c = 0$, folglich $aA + bB = 0$; folglich B mit A oder mit A' identisch, welches gegen die Voraussetzung ist, dass A, B, C nicht in einem Hanptkreise liegen.

VIII. Auf ähnliche Art lässt sich darthun, dass, wenn man zu einer Gleichung zwischen noch mehrern Punkten

$$aA + bB + cC + \ldots = 0$$

gelangt, von denen alle mit Ausnahme eines, es sei A, in einem Hauptkreise liegen, der Coefficient a dieses einen $= 0$, und folglich auch $bB + cC + \ldots = 0$ sein muss.

§. 12.

Unter der Voraussetzung, dass die Kugelfläche unendlich gross, und dass der Theil ihrer Fläche, in welchem die in Betracht kommenden Punkte liegen, an sich endlich, also gegen die ganze Fläche unendlich klein ist, können wir diesen Theil als eben, die in ihm enthaltenen Bögen von Hauptkreisen als gerade Linien ansehen und statt der Sinus solcher Bögen die Bögen selbst, oder vielmehr die geraden Linien, welche jetzt ihre Stelle vertreten, setzen. Die Gleichung

$$aA + bB = pP$$

wird daher jetzt ausdrücken, dass P mit A und B in einer Geraden liegt, nnd dass sich $a : b : p = PB : AP : AB$ verhält, und folglich $p = a + b$ ist; mit andern Worten: dass P der Schwerpunkt von A und B mit den Gewichten a und b ist. Eben so wird jetzt durch die Gleichung

$$aA + bB + cC = qQ, \text{ oder } (a + b)\,P + cC = qQ$$

ausgedrückt, dass Q der Schwerpunkt von P, C mit den Gewichten $a + b$, c und mithin der Schwerpunkt von A, B, C mit den Gewichten a, b, c ist; auch ist dabei $q = a + b + c$. Analoges gilt von Systemen noch mehrerer Punkte in einer Ebene.

Diejenigen Leser, welche von meinem «barycentrischen Calcul» Kenntniss genommen haben, werden sich erinnern, dass ich daselbst das Verhalten eines

Punktes, als Schwerpunktes, zu zwei oder mehrern andern durch Gleichungen von ganz derselben Form ausgedrückt habe. Von dem barycentrischen Calcul, insofern er sich auf Punkte beschränkt, die in einer Ebene liegen, kann man daher den gegenwärtigen Algorithmus als eine eben solche Erweiterung ansehen, wie es die Sphärik von der Planimetrie ist.

Aber auch umgekehrt lassen sich aus den Principien der Lehre vom Schwerpunkte die Hauptsätze, auf denen der sphärische Calcul beruht, ableiten; und ich achte, dieses zu zeigen, um so weniger für überflüssig, als sich damit einige für den sphärischen Calcul selbst nicht unwichtige Folgerungen ergeben werden.

§. 13.

Von den in den Punkten $A, B, C, \ldots$ einer Kugelfläche angebrachten Gewichten $a, b, c, \ldots$, welche zum Theil auch negativ, d. h. solche sein können, die, statt nach unten, nach oben hin drücken, sei S der Schwerpunkt. Dieser wird im Allgemeinen nicht in der Kugelfläche liegen; man wird aber immer ein solches Gewicht o im Mittelpunkte O der Kugel hinzufügen können, dass der Schwerpunkt von $a, b, c, \ldots$ und o in die Oberfläche fällt. Nach dem Satze nämlich, dass der Schwerpunkt eines Systems von Gewichten unverändert bleibt, wenn man einige derselben in dem Schwerpunkte, den letztere für sich haben, sich vereinigen lässt, ist der Schwerpunkt, er heisse P, der in $A, B, C, \ldots$ und O angebrachten Gewichte $a, b, c, \ldots$ und o einerlei mit dem Schwerpunkte eines in S angebrachten Gewichtes $s, = a + b + c + \ldots$, und des in O wirkenden Gewichtes o, also einerlei mit dem Punkte, welcher die Linie SO in dem Verhältnisse von o zu s theilt. Soll daher, wie verlangt wird, der Schwerpunkt P der Gewichte $a, b, c, \ldots$ und o in die Kugelfläche fallen, so hat man für ihn einen der zwei Punkte zu nehmen, in welchen SO die Kugelfläche schneidet, und das Gewicht o so zu bestimmen, dass $o : s = SP : PO$.

Auf eine willkührlich gelegte Ebene fälle man nun von $A, B, C, \ldots$ und O, P die Perpendikel AA_1, BB_1, CC_1, $\ldots$ und OO_1, PP_1, so ist zufolge der Haupteigenschaft des Schwerpunktes

$$a.\, AA_1 + b.\, BB_1 + c.\, CC_1 + \ldots + o.\, OO_1 = (s + o)\, PP_1,$$

worin $OO_1 = 0$ wird und mithin das Glied $o.\, OO_1$ wegfällt, wenn man die Ebene durch den Mittelpunkt O der Kugel selbst legt. Unter dieser Annahme, und wenn ein in O auf der Ebene errichtetes Perpendikel die Kugelfläche in V trifft, sind aber AA_1 BB_1, CC_1, $\ldots$ und PP_1 = den mit dem Kugelhalbmesser multiplicirten Cosinussen der Bögen VA, VB, VC, $\ldots$ und VP. Dadurch wird

$$a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC + \ldots = (s + o) \cos VP,$$

und es ist somit das Porisma in §. 5. bewiesen, indem der Ort von V auf der Kugelfläche eben so willkührlich, als die Lage der Ebene ist, von welcher V abhängt.

§. 14.

Zusätze und Folgerungen. *a.* Die sphärische Gleichung

$$aA + bB + cC + \ldots = pP,$$

wo p statt des vorigen $s + o$ oder $a + b + c + .. + o$ geschrieben worden, hat hiernach die statische Bedeutung, dass die in den Punkten A, B, C, ... der Kugelfläche und im Mittelpunkte O der Kugel angebrachten Gewichte a, b, c, ... und o, $= p - a - b - c - \ldots$, den Punkt P der Fläche zum Schwerpunkte haben, oder, was dasselbe sagt: dass der Schwerpunkt der Gewichte $a, b, c, \ldots$ in A, B, C, ... einerlei ist mit dem Schwerpunkte der zwei Gewichte $a + b + c + \ldots - p$ und p in O und P.

Man kann sich dieses dadurch veranschaulichen, dass man sich die in A, B, C, ... mit den Gewichten a, b, c, ... belastete Kugel auf eine horizontale Tafel gelegt denkt. Denn alsdann wird die Kugel, wenn sie an sich ganz massenlos ist, oder, was hier auf dasselbe hinauskömmt, wenn der Schwerpunkt ihrer ursprünglichen Masse ihr Mittelpunkt ist, nur dann im Gleichgewichte sein, wenn sie die Tafel entweder in P, oder im Gegenpunkte von P berührt Das eine Gleichgewicht wird ein stabiles, das andere ein nicht stabiles sein. — Ist $aA + bB + cC \ldots = 0$, so fällt der Schwerpunkt der Gewichte a, b, c, ... in den Mittelpunkt der Kugel, und die auf die Tafel gelegte Kugel bleibt in jeder Lage in Ruhe.

b. Dass von den Gewichten $a, b, \ldots$ und $p - a - b - \ldots$ in $A, B, \ldots$ und O der Schwerpunkt P ist, wird barycentrisch ausgedrückt durch

$$aA + bB + \ldots + (p - a - b - \ldots)\, O = pP, \text{ oder}$$

$$aA + bB + \ldots = pP + (a + b + \ldots - p)\, O.$$

Hiervon unterscheidet sich die dasselbe besagende sphärische Gleichung bloss dadurch, dass in ihr das Glied mit dem Mittelpunkte O fehlt. Will man daher umgekehrt eine sphärische Gleichung in eine barycentrische verwandeln, so hat man nur auf der einen oder der andern Seite des Gleichheitszeichens den Mittelpunkt der Kugel mit einem Coefficienten von der Grösse hinzuzusetzen, dass die Summe der Coefficienten auf beiden Seiten gleich gross wird.

c. Ist sphärisch $aA + bB = pP$, und daher P der Schwerpunkt der in A, B und O befindliche Gewichten a, b und $p - a - b$, so liegt, nach der Theorie des Schwerpunktes, P mit A, B und O in einer Ebene, und es verhalten sich a und b wie die Dreiecke PBO und POA (Baryc. Calc. §. 23.). Dies stimmt auch, wie gehörig, mit dem Obigen (§. 11. VII.) überein, wonach P mit A und B in einem Hauptkreise liegt, und sich $a : b = \sin BP : \sin PA$ verhält. Denn, den Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt, ist (Fig. 2.) das Dreieck $PBO = \frac{1}{2} \sin BP$ und $POA = \frac{1}{2} \sin PA$.

d. Hat man die sphärische Gleichung: $aA + bB + cC = pP$, so ist P der Schwerpunkt von A, B, C und O mit den Gewichten a, b, c und $p - a - b - c$, und es verhalten sich folglich (Baryc. Calc. §. 25.)

$$a : b : c = \text{die Pyramiden } OPBC : OPCA : OPAB.$$

Es ist aber von der Pyramide $OPBC$, wenn P als Spitze derselben betrachtet, und der Kugelhalbmesser, wie vorhin, $= 1$ gesetzt wird, die Basis $OBC = \frac{1}{2} \sin BC$, die Höhe = dem Sinus des von P auf BC gefällten sphärischen Perpendikels, welches φ heisse, und daher $OPBC = \frac{1}{6} \sin BC \sin \varphi$. Analoges gilt von den beiden andern Pyramiden, und wir sind somit durch die Theorie des Schwerpunktes zu folgendem für unsern Algorithmus merkwürdigen Satze geführt worden:

Ist $aA + bB + cC = pP$, so verhalten sich

$$a : b : c = \sin BC \sin \varphi : \sin CA \sin \chi : \sin AB \sin \psi,$$

wo φ, χ, ψ die von P auf BC, CA, AB gefällten sphärischen Perpendikel bezeichnen.

e. Aus dem Satze der sphärischen Trigonometrie, dass in jedem sphärischen Dreiecke die Sinus der Winkel den Sinussen der gegenüberliegenden Seiten proportional sind, folgt ohne Weiteres, dass das Product aus den Sinussen zweier Seiten in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels von der nämlichen Grösse ist, welches der drei Seitenpaare auch gewählt wird, und dass dieses Product gleich ist dem Producte aus dem Sinus irgend einer Seite in den Sinus des auf sie von der gegenüberliegenden Ecke gefällten sphärischen Perpendikels. Setzt man daher bei dem sphärischen Dreieck ABC, mit gehöriger Rücksicht auf die Stellung der Buchstaben, das Product

$$\sin AB \sin CA \sin AB^{\wedge} CA = [ABC], \text{ also auch}$$

$$\sin BC \sin AB \sin BC^{\wedge} AB = [BCA], \text{ u. s. w., so ist}$$

$$[ABC] = [BCA] = [CAB], \text{ dagegen}$$

$$= -[CBA] = -[ACB] = -[BAC].$$

Mit dieser Bezeichnungsart kann die vorige Proportion also ausgedrückt werden:

$$a : b : c = [PBC] : [PCA] : [PAB].$$

f. Es hat keine Schwierigkeit, diese Proportion auch geradezu mit Hülfe des sphärischen Calculs zu erweisen. Man setze deshalb $aA + bB = hH$, so ist der Gleichung für P zufolge $hH + cC = pP$, mithin H ein Punkt, welcher in den Hauptkreisen AB und CP zugleich liegt, also der gegenseitige Durchschnitt beider (Fig. 3.), und es verhält sich $a : b = \sin HB : \sin AH$.

Aus den vorhin bemerkten Eigenschaften der Function $[ABC]$ des Dreiecks ABC folgt aber, dass, wenn zwei sphärische Dreiecke gleiche Höhe haben, die Functionen dieser Dreiecke sich wie die Sinus ihrer Bases verhalten. Hiernach verhält sich

$$[PHB] : [PAH] = \sin HB : \sin AH = a : b,$$

und aus demselben Grunde

$$[PHB] : [CPB] = \sin PH : \sin CP = [PAH] : [CAP],$$

folglich

$$a : b = [CPB] : [CAP] = [PBC] : [PCA];$$

und eben so wird bewiesen, dass $b : c = [PCA] : [PAB]$.

g. Statt der Gleichung für P kann man auch schreiben

$$aA - pP + bB = - cC,$$

und daraus wie vorhin folgern:

$$a : - p = [CPB] : [CBA] = [PBC] : - [ABC];$$

also vollständig

$$a : b : c : p = [PBC] : [PCA] : [PAB] : [ABC].$$

Die Functionen $[PBC]$, etc. der vier Dreiecke, welche von den Punkten A, B, C, P gebildet werden, treten demnach hier auf ganz analoge Weise auf, wie bei der entsprechenden Formel für drei Punkte A, B, P eines Hauptkreises die Sinus der drei von letztern Punkten begrenzten Bögen. — Liegen A, B, C, P in einer Ebene, so verwandeln sich die Verhältnisse zwischen $[PBC]$, $[PCA]$, etc. in die Verhältnisse zwischen den Flächen der Dreiecke PBC, PCA, etc. Baryc. Calc. §. 24. *c*.

h. Weil $[PBC] = \sin PB \sin CP \sin PB^\wedge CP$, $[PCA] =$ etc., so kann man die Verhältnisse zwischen den Coefficienten noch folgendergestalt symmetrisch darstellen:

$$a : b : c = \frac{\sin BPC}{\sin AP} : \frac{\sin CPA}{\sin BP} : \frac{\sin APB}{\sin CP}.$$

ANWENDUNG DES SPHÄRISCHEN ALGORITHMUS
AUF DIE ENTWICKELUNG DER VIER GRUNDFORMELN DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE.

§. 15.

In der sphärischen Trigonometrie kommen nicht bloss, wie bisher, Bögen, sondern auch Winkel in Betracht. Das Maass eines Winkels wird hier am kürzesten und zweckmässigsten dargestellt als der gegenseitige sphärische Abstand der Pole der zwei den Winkel bildenden Hauptkreise. Was den Begriff und die Eigenschaften der Pole anlangt, so wird es, um auch diese aus den Principien im §. 11. abzuleiten, überflüssig hinreichen, wenn ich bemerke, dass die ganze Lehre von den Polen sich auf den Satz gründen lässt, dass, wenn zwei Punkte A und B weder identisch, noch Gegenpunkte von einander sind, und von jedem derselben ein anderer Punkt N um einen Quadranten entfernt ist, dieser andere N auch von jedem dritten mit A und B in einem Hauptkreise liegenden Punkte C um einen Quadranten absteht; ein Satz, der unmit-

telbar aus §. 11. I. fliesst. Denn hiernach kann man setzen: $C = aA + bB$. Lässt mau hierin V mit N zusammenfallen, so kömmt: $\cos NC = a \cos NA + b \cos NB$. Nach der Voraussetzung sind aber $\cos NA = 0$ und $\cos NB = 0$, folglich auch $\cos NC = 0$; folglich u. s. w. Dass N der Pol des Hauptkreises ABC genannt wird, brauche ich nicht hiuzuzufügen.

§. 16.

Drei Punkte A, B, C (Fig. 4.) der Kugelfläche, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, verbinde man paarweise durch Hauptkreise und nenne α den durch B und C, β den durch C nnd A, γ den durch A und B gelegten. Man bestimme nach Willkühr die positiven Richtungen dieser drei Hauptkreise, mache hiernach in α den Bogen $BK = 90°$, in γ den Bogen $BL = 90°$, lege durch K und L einen Hauptkreis, bestimme willkührlich dessen positive Richtung und mache nach dieser die Bögen $KA_1 = LC_1 = 90°$, so sind A_1 und C_1 Pole von α und γ, und zwar *gleichnamige* Pole dieser Hauptkreise. Heisse nämlich von den zwei Polen eines Hauptkreises derjenige, welcher einem auf der äussern Fläche der Kugel im Hauptkreise nach dessen positiver Richtung Fortgehenden zur Rechten (Linken) liegt, der rechte (linke) Pol. Dass nun, jenachdem A_1 der rechte oder linke Pol von α ist, auch C_1 der rechte oder linke Pol von γ ist, oder kürzer: dass A_1 und C_1 gleichnamige Pole von α und γ sind, dies erhellet unmittelbar durch die Anschauung der vollführten Construction.

Man mache auf gleiche Weise in α den Bogen $CM = 90°$ und in β den Bogen $CN = 90°$, und verbinde M und N durch einen Hauptkreis; dieser wird die Pole von α, von denen der eine A_1 ist, und die von β in sich enthalten. Man bestimme die positive Richtung dieses Hauptkreises dergestalt, $MA_1 = 90°$, nicht $= 270°$, ist, und mache hiernach in demselben $NB_1 = 90°$, so sind, wie vorhin, A_1 und B_1 gleichnamige Pole von α und β, und mithin A_1, B_1, C_1 gleichnamige Pole von α, β, γ.

Eine Folge hiervon ist, dass von den durch B_1 und C_1, durch C_1 und A_1, durch A_1 und B_1 zu legenden Hauptkreisen, welche man α_1, β_1, γ_1 nenne, hinwiederum A, B, C die Pole sind. Da ferner die vorhin bestimmten positiven Richtungen von β_1 und γ_1 dergestalt von einander abhängen, dass $KA_1 = MA_1 = 90°$, und in dem durch K und M gehenden Kreise $BK = CM = 90°$ ist, so erhellet wie im Vorherigen, dass B und C gleichnamige Pole von β_1 und γ_1 sind, und dass daher nach willkührlicher Annahme der positiven Richtung von β_1 die vorhin gemachte Bestimmung der positiven Richtnng von γ_1 auch dadurch ausgedrückt werden kann, dass B und C gleichnamige Pole von β_1 und γ_1 sein sollen.

Endlich wollen wir die positive Richtung des Hauptkreises α_1 so bestimmen, dass A, als der eine seiner beiden Pole, denselben Namen erhält, welchen B rücksichtlich β_1, sowie C rücksichtlich γ_1 führt. Wir haben somit zu einem System dreier Punkte A, B, C und dreier dadurch bestimmter Hauptkreise α, β, γ ein solches System dreier anderer Punkte A_1, B_1, C_1 und dadurch bestimmter Hauptkreise α_1, β_1, γ_1 gefunden und die positiven Richtun-

gen aller sechs Kreise (die von α, β, γ und β_1 willkührlich) so festgesetzt, dass die drei Punkte je eines der beiden Systeme gleichnamige Pole der drei Kreise des jedesmal andern Systems sind.

§. 17.

Suchen wir jetzt die metrischen Relationen zwischen den sechs Bögen BC, CA, AB, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 zu entwickeln. Heissen diese Bögen der Reihe nach a, b, c, a_1, b_1, c_1. Weil $BL = CN = KA_1 = MA_1 = 90°$ ist, und in diesen vier Bögen (oder in ihren Verlängerungen) resp. die Punkte A, A, L, N liegen, so hat man (§. 11. I):

$$A = \cos BA.B + \sin BA.\,L, \qquad L = \cos KL.K + \sin KL.A_1,$$

$$A = \cos CA.C + \sin CA.N, \qquad N = \cos MN.M + \sin MN.A_1;$$

oder wegen $BA = 360° - AB = 360° - c$, $CA = b$, $KL = A_1C_1 = 360° - b_1$, $MN = A_1B_1 = c_1$:

$$A = \cos c.B - \sin c.L, \qquad L = \cos b_1.K - \sin b_1.A_1,$$

$$A = \cos b.C + \sin b.N, \qquad N = \cos c_1.M + \sin c_1.A_1.$$

Aus den zwei Gleichungen zur Linken folgt:

$$\cos c.B - \cos b.C = \sin c.L + \sin b.N,$$

und wenn man hierin für L und N ihre Werthe aus den zwei Gleichungen zur Rechten substituirt:

$$\cos c.B - \cos b.C = \sin c \cos b_1.K + \sin b \cos c_1.M$$
$$+ (\sin b \sin c_1 - \sin c \sin b_1)\, A_1.$$

Aus dieser Gleichung werden sich die gesuchten Relationen mit grösster Leichtigkeit ableiten lassen. Weil von den fünf Punkten, zwischen denen sie besteht, die vier ersten B, C, K, M in einem Hauptkreise liegen, in diesem aber nicht auch der fünfte A_1 mit enthalten ist, so muss der Coefficient des fünften null sein (§. 11. VIII.), also

$$\text{I.}\ \sin b \sin c_1 = \sin c \sin b_1, \text{ und}$$

$$\cos c.B - \cos b.C = \sin c \cos b_1.K + \sin b \cos c_1.M.$$

Hierin für V das einemal B, das anderemal K gesetzt, kommt wegen $BK = 90°$:

$$\cos c - \cos b \cos BC = \sin b \cos c_1 \cos BM,$$

$$- \cos b \cos KC = \sin c \cos b_1 + \sin b \cos c_1 \cos KM,$$

oder weil $BC = a$, $BM = BC + CM = a + 90°$, $CK = BK - BC = 90° - a$, $KM = BC = a$ ist:

$$\text{II.}\ \cos c - \cos a \cos b = - \sin a \sin b \cos c_1,$$

$$\text{III.}^*\ - \cos b \sin a = \sin c \cos b_1 + \sin b \cos c_1 \cos a;$$

und wenn man in III.* statt $\sin c$ dessen aus I. fliessenden Werth substituirt:

III. $-\sin a \operatorname{cotg} b = \sin c_1 \operatorname{cotg} b_1 + \cos c_1 \cos a.$

Weil endlich von den zwei Systemen A, B, C und A_1, B_1, C_1 das letztere zu dem erstern in derselben Beziehung, wie das erstere zu dem letztern steht, so muss es gestattet sein, in den Gleichungen I., II., III. die Bögen a, b, c mit a_1, b_1, c_1 und umgekehrt zu vertauschen. Die Gleichung I. bleibt bei dieser Vertauschung ungeändert; II. verwandelt sich damit in

IV. $\cos c_1 - \cos a_1 \cos b_1 = -\sin a_1 \sin b_1 \cos c;$

die Gleichung aber, in welche III. übergeht, wird auch erhalten, wenn man in III. a und c, sowie a_1 und c_1 mit einander vertauscht, und ist daher keine wesentlich neue.

§. 18.

Wird von zwei Hauptkreisen α und β, welche A_1 und B_1 zu gleichnamigen Polen haben, der eine α um seine zwei Durchschnitte mit dem andern β, d. i. um C und den Gegenpunkt von C, gedreht, bis er mit β auch hinsichtlich der positiven Richtung beider zusammenfällt, so geht A_1 in dem durch seinen anfänglichen Ort und durch B_1 zu legenden Hauptkreise γ_1 fort, fällt am Ende der Drehung mit B_1 zusammen und beschreibt somit einen Bogen, welcher den von α beschriebenen Winkel misst. Beide Bewegungen, die Drehung von α um C und der Fortgang von A_1 in γ_1 erscheinen einem in C auf der Kugelfläche Stehenden nach einerlei Seite gerichtet. Es lehrt aber die unmittelbare Anschauung, dass, jenachdem C der rechte oder linke Pol von γ_1 ist, ein in γ_1 nach der positiven Richtung von γ_1 fortgehender Punkt dem in C Stehenden rechts oder links sich zu bewegen scheint. Wenn daher unter der Voraussetzung, dass C etwa der linke Pol von γ_1 ist, bei der Drehung von α der Punkt A_1 nach der positiven Richtung von γ_1 sich bewegen soll, so muss α nach der Linken um C gedreht werden, und der von A_1 beschriebene Bogen $A_1 B_1$, $= c_1$, ist alsdann $=$ dem von C aus nach der Linken gerechneten Winkel $\alpha\beta$, — oder auch $=$ dem von C' aus nach der Rechten gerechneten Winkel $\alpha\beta$, weil C', als Gegenpunkt von C, der rechte Pol von γ_1 ist.

Ist aber C der linke Pol von γ_1, so sind, wegen der Gleichnamigkeit der Pole A, B, C, auch A und B die linken von α_1 und β_1, und daher nach denselben Schlüssen a_1 und b_1 $=$ den resp. von A und B aus links gerechneten Winkeln $\beta\gamma$ und $\gamma\alpha$. Analoges gilt, wenn C der rechte Pol von γ_1 ist. Ob aber, wenn wir die positiven Richtungen von α, β, γ als gegeben ansehen, C der linke oder rechte Pol von γ_1 ist, hängt obiger Construction zufolge von der willkührlich zu bestimmenden positiven Richtung des Hauptkreises β_1 ab und ist daher gleichfalls willkührlich.

Die im vorigen §. erhaltenen Gleichungen I., II., III. und IV. können demnach auch so gedeutet werden, dass in ihnen a_1, b_1, c_1 die resp. von A, B, C aus nach einerlei Seite, gleichviel welcher, gerechneten Winkel $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ vorstellen, und somit das System $A_1 B_1 C_1$ ganz ausser Acht bleibt.

§. 19.

Zusätze. *a.* Dass es nur darauf ankommen kann, dass alle drei Winkel nach einerlei Seite gerechnet werden, nicht aber darauf, nach welcher, dies zeigen, wie gehörig, auch die vier Gleichungen I., .. IV., als welche unverändert bleiben, wenn man in ihnen $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$ stat a_1, b_1, c_1 setzt und somit die drei Winkel nach einer der vorherigen entgegengesetzten Seite rechnet.

b. Die Gleichung II., in welcher nur Ein Winkel c_1 vorkömmt, enthält daher eine Function desselben, welche schon an sich ungeändert bleibt, wenn man c_1 in $-c_1$ verwandelt, nämlich die gerade Function, welche Cosinus heisst.

c. Eben so, wie II., hat man auch, wenn man a, b, c, a_1 ... in b, c, a, b_1, ... verwandelt:

$$\text{II.}^* \quad \cos a - \cos b \cos c = -\sin b \sin c \cos a_1,$$

$$\text{II.}^{**} \quad \cos b - \cos c \cos a = -\sin c \sin a \cos b_1.$$

Eliminirt man aus II., II.* und II.** das erstemal a und a_1, das zweitemal c und a_1, das drittemal a und b, so erhält man drei Gleichungen, in denen dieselben Grössen, wie resp. in I., III. und IV., vorkommen, die aber demungeachtet mit letztern nicht identisch sein werden. Denn letztere gelten nur unter der Voraussetzung, dass die in jeder zugleich vorkommenden Winkel nach einerlei Seite gerechnet werden, während bei den Gleichungen II., II.* und II.**. und folglich auch bei den aus ihnen abzuleitenden, jeder Winkel für sich, nach welcher Seite man will, gerechnet werden kann. Diese abzuleitenden Gleichungen werden daher einerlei mit denen sein, welche hervorgehen, wenn man aus I., III. und IV. durch Quadrirung die darin vorkommenden ungeraden Functionen der Winkel wegschafft. So wird man z. B. durch Elimination von a aus II. und II.** nicht unmittelbar I., sondern die Gleichung $\sin b^2 \sin c_1^2 = \sin c^2 \sin b_1^2$ finden.

§. 20.

Durch die vier Gleichungen I., .. IV. ist folgende Aufgabe in völliger Allgemeinheit gelöst worden: Drei Punkte A, B, C der Kugelfläche, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, hat man durch drei Hauptkreise α, β, γ verbunden und die positiven Richtungen derselben bestimmt. Von den drei nach diesen Richtungen gerechneten Bögen BC, CA, AB, $= a$, b, c, und den drei aus A, B, C nach einerlei Seite gerechneten Winkeln $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $= a_1$, b_1, c_1, von diesen sechs Stücken sind irgend drei gegeben; man soll daraus die drei übrigen finden. Ohne die Allgemeinheit dieser Aufgabe zu beschränken, wollen wir sie schlüsslich noch so ausdrücken, wie es in der sphärischen Trigonometrie gewöhnlich ist.

Man gehe in jedem der drei Hauptkreise nach dessen positiver Richtung fort: in γ von A bis B, hierauf in α von B bis C, und zuletzt in β von C bis A

zurück. Die Figur, welcher der somit zurückgelegte Weg als Perimeter dient, heisst ein sphärisches Dreieck; A, B, C die drei Ecken desselben. Bei jedem der drei durchgangenen Bögen AB, BC, CA unterscheide man seine rechte und linke Seite, die man aber von jetzt an äussere und innere Seite (oder umgekehrt) nenne. In jeder Ecke stossen die Elemente zweier Bögen zusammen — z. B. in C das letzte Element von BC und das erste von CA — und bilden daselbst zwei Winkel, welche einander zu $360°$ ergänzen. Bei dem einen dieser zwei Winkel sind die äussern, bei dem andern die innern Seiten der zwei Elemente einander zugekehrt. Erstern Winkel nenne man daher den äussern, letztern den innern Winkel der Ecke.

Werden nun die oben durch $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ oder a_1, b_1, c_1 ausgedrückten Winkel von A, B, C aus etwa nach der Linken gerechnet, wird die linke Seite jedes der drei Bögen für die innere genommen, und werden die innern Winkel bei den Ecken A, B, C schlechthin mit A, B, C bezeichnet, so ist, wie man leicht sieht, jede der drei Summen $a_1 + A$, $b_1 + B$, $c_1 + C$ entweder $= 180°$ oder $= 180° + 360°$, und es kömmt folglich, wenn man in den Gleichungen I., .. IV. statt a_1, b_1, c_1 die Winkel A, B, C einführt:

$$\text{I.}\quad \sin b \sin C = \sin c \sin B,$$

$$\text{II.}\quad \cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C,$$

$$\text{III.}\quad \sin a \operatorname{cotg} b = \sin C \operatorname{cotg} B + \cos a \cos C,$$

$$\text{IV.}\quad \cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c.$$

Hier bedeuten demnach a, b, c die drei den Perimeter des sphärischen Dreiecks ausmachenden Bögen, und A, B, C die drei innern (äussern) Winkel des Dreiecks, d. i. die von den innern (äussern) Seiten der Bögen in den Ecken gebildeten Winkel; wobei noch zu bemerken, dass der Unterschied zwischen der äussern und innern Seite eines der drei Bögen der Willkühr überlassen bleibt; dass aber, nachdem man sich darüber bestimmt hat, die äussere und innere Seite auch jedes der zwei übrigen Bögen bestimmt ist.

Letztere vier Gleichungen sind die allbekannten vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, hier aber in völliger Allgemeinheit und damit auch für den Fall als richtig erwiesen, wenn die Bögen und Winkel zwischen $180°$ und $360°$ fallende Werthe haben.

Zusatz. Nennt man zwei der sechs Stücke des Dreiecks gleichartig, wenn sie beide zugleich $< 180°$, oder beide $> 180°$ sind, ungleichartig dagegen, wenn das eine $< 180°$, das andere $> 180°$ ist, so kann man aus I. noch den Satz folgern: Jenachdem ein Bogen mit dem ihm gegenüberliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig ist, ist auch jeder der beiden andern Bögen mit dem ihm gegenüberliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig.

VON MERKWÜRDIGEN PUNKTEN SPHÄRISCHER DREIECKE.

§. 21.

Zur Bestimmung dieser Punkte wollen wir zuvörderst die Pole A_1, B_1, C_1 der das Dreieck ABC begrenzenden Bögen, durch A, B, C ausgedrückt, zu ermitteln suchen. Man setze

$$(a) \quad A_1 = lA + mB + nC.$$

Lässt man hierin V nach und nach mit A_1, B_1, C_1 zusammenfallen, so kömmt, weil A_1B, A_1C, B_1A, etc. Quadranten sind:

$$(b) \quad 1 = l \cos A_1A, \quad \cos B_1A_1 = m \cos B_1B, \quad \cos C_1A_1 = n \cos C_1C.$$

Aus der Gleichung $A = \cos c . B - \sin c . L$ in §. 17. folgt aber, wenn man A_1 für V substituirt:

$$\cos A_1A = - \sin c \cos A_1L = \sin c \sin b_1,$$

wegen $LA_1 = 90° - A_1C_1 = 90° + b_1$; und wenn man

$$\sin a_1 \sin b_1 \sin c_1 \frac{\sin c}{\sin c_1} = k \text{ setzt und bemerkt, dass}$$

$$\frac{\sin a}{\sin a_1} = \frac{\sin b}{\sin b_1} = \frac{\sin c}{\sin c_1}, \text{ und dass folglich } k \text{ eine symmetrische}$$

(mit $[A_1B_1C_1]$ in §. 14. *e.* identische) Function von a_1, b_1, c_1 ist:

$$\cos A_1A = \frac{k}{\sin a_1}, \text{ und eben so } \cos B_1B = \frac{k}{\sin b_1}, \cos C_1C = \frac{k}{\sin c_1}.$$

Hiermit werden die Gleichungen (b):

$$\sin a_1 = kl, \quad \sin b_1 \cos c_1 = km, \quad \sin c_1 \cos b_1 = kn,$$

und damit die Gleichung (a):

$$kA_1 = \sin a_1 . A + \sin b_1 \cos c_1 . B + \sin c_1 \cos b_1 . C.$$

Dabei ist A_1 der linke (rechte) Pol von BC, wenn die Bögen b_1, c_1 oder die von ihnen gemessenen Winkel $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ von B, C aus nach der Linken (Rechten) gerechnet werden. Führt man noch statt a_1, b_1 und c_1 die Winkel A, $180° - a_1$, $B = 180° - b_1$, und $C, = 180° - c_1$, (§. 20.) ein, so kömmt:

$$kA_1 = \sin A . A - \sin B \cos C . B - \sin C \cos B . C,$$

und eben so nach gehöriger Verwandlung der Buchstaben:

$$kB_1 = \sin B . B - \sin C \cos A . C - \sin A \cos C . A,$$

$$kC_1 = \sin C . C - \sin A \cos B . A - \sin B \cos A . B.$$

Dies sind demnach die gesuchten Ausdrücke der Pole, und zwar der auf den innern (äussern) Seiten der Bögen BC, CA, AB liegenden, wenn A, B, C die innern (äussern) Winkel des Dreiecks sind.

§. 22.

Folgerungen. a. Aus dem Ausdrucke für A_1 folgt:

$$\frac{k}{\cos B \cos C} A_1 = \frac{\sin A}{\cos B \cos C} A - \tang B . B - \tang C . C,$$

und daher, wenn man $\tang A . A + \tang B . B + \tang C . C = pP$ setzt:

$$\frac{k}{\cos B \cos C} A_1 = \sin A \left(\frac{1}{\cos B \cos C} + \frac{1}{\cos A}\right) A - pP.$$

Hiernach liegt P mit A und A_1 in einem Hauptkreise. Da aber der Ausdruck für P in Bezug auf A, B, C symmetrisch ist, so wird P nicht bloss in AA_1, sondern auch in BB_1 und in CC_1 liegen. Die drei Hauptkreise AA_1, BB_1, CC_1, oder, was dasselbe ist, die drei von den Ecken A, B, C auf die gegenüberliegenden Bögen BC, CA, AB gefällten sphärischen Perpendikel, schneiden sich folglich in einem Punkte

$$P \equiv \tang A . A + \tang B . B + \tang C . C.$$

b. Die Addition der Ausdrücke für A_1 und B_1 giebt:

$$k(A_1 + B_1) = (1 - \cos C)(\sin A . A + \sin B . B) - \sin C (\cos A + \cos B) C.$$

Setzt man daher $\sin A . A + \sin B . B + \sin C . C = qQ$, so wird

$$k(A_1 + B_1) = \sin C (1 - \cos A - \cos B - \cos C) C + (1 - \cos C) qQ.$$

Nun ist $A_1 + B_1 \equiv$ dem Mittelpunkte von $A_1 B_1$ (§. 11. I.), welcher C_2 heisse. Mithin liegt Q mit C und C_2 in einem Hauptkreise. Wegen der symmetrischen Form des Ausdrucks für Q wird aber derselbe Punkt auch in dem durch A und den Mittelpunkt A_2 von $B_1 C_1$, sowie in dem durch B und den Mittelpunkt B_2 von $C_1 A_1$ gelegten Hauptkreise enthalten sein; d. h. die drei durch A, B, C und die Mittelpunkte von $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ zu legenden Hauptkreise schneiden sich in einem Punkte

$$Q \equiv \sin A . A + \sin B . B + \sin C . C.$$

c. Wegen der Reciprocität zwischen ABC und $A_1 B_1 C_1$ müssen auch die drei durch A_1, B_1, C_1 und die Mittelpunkte von BC, CA, AB zu legenden Hauptkreise sich in einem Punkte

$$Q_1 \equiv \sin A_1 . A_1 + \sin B_1 . B_1 + \sin C_1 . C_1$$

schneiden. Weil $\sin A_1 : \sin B_1 : \sin C_1 = \sin a_1 : \sin b_1 : \sin c_1 = \sin A : \sin B : \sin C$, so kann man auch schreiben:

$$Q_1 \equiv \sin A . kA_1 + \sin B . kB_1 + \sin C . kC_1,$$

und wenn man hierin für kA_1, kB_1, kC_1 aus vor. §. ihre Werthe setzt:

$$Q_1 \equiv \sin A (\sin A - \sin B \cos C - \sin C \cos B) A + \ldots,$$

welches sich durch weitere Rechnung auf

$$Q_1 \equiv \sin A \sin \tfrac{1}{2}(B + C - A) . A + \sin B \sin \tfrac{1}{2}(C + A - B) . B$$
$$+ \sin C \sin \tfrac{1}{2}(A + B - C) . C$$ reducirt.

d. Wei C_2 der Mittelpunkt von $A\ B_1$, so ist (Fig. 4.) $NC_2 = NB_1 - C_2B_1 = 90° - \frac{1}{2} c_1 = \frac{1}{2} C$ (§. 20.) $= \frac{1}{2}\ CN^\wedge CB$. Von der andern Seite hat man, weil C der Pol von NC_2 ist, $NC_2 = CN^\wedge CC_2$; mithin halbirt CC_2 den Winkel C des Dreiecks, und ebenso halbiren AA_2 und BB_2 die Winkel A und B. Nach dem Satze in *b.* begegnen sich daher die drei Hauptkreise, welche die Winkel eines Dreiecks $A\ B\ C$ halbiren, in einem Punkte Q.

Da ferner BC von jedem durch A_1 gelegten Hauptkreise, CA von jedem durch B_1 gelegten, etc. rechtwinklig geschnitten wird, so können wir den Satz in *c.* auch also ausdrücken: die drei Hauptkreise, welche die Bögen eines Dreiecks ABC rechtwinklig halbiren, treffen sich in einem Punkte Q_1.

e. Wie man weiss, sind die solchergestalt bestimmten Q und Q_1 die Mittelpunkte des in und des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises. Auf gleiche Art sind sie auch die Mittelpunkte des um und des in das Dreieck $A_1B_1C_1$ beschriebenen Kreises; woraus zugleich noch folgt, dass, wenn zwei Dreiecke in polarer Beziehung zu einander stehen, der in das eine und der um das andere beschriebene Kreis concentrisch sind.

Von sphärischen Linien und deren verschiedenen Ordnungen.

§. 23.

Der Satz, dass durch drei Punkte A, B, C der Kugelfläche, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, jeder andere Punkt P der Fläche ausgedrückt werden kann, indem man erstern Punkten gewisse Coefficienten x, y, z beilegt, die von einem Punkte P zum andern sich ändernde Werthe haben, dieser Satz kann, wie schon bemerkt worden, zu einer sphärischen Coordinatenmethode, welche der im barycentrischen Calcul aufgestellten ganz ähnlich ist. angewendet werden. Die festen Punkte A, B, C mögen, wie in jenem Calcul, die *Fundamentalpunkte*, und die drei durch sie zu legenden Hauptkreise BC, CA, AB die *Fundamentalkreise* heissen. Die Coordinaten von P sind alsdann die zwei Verhältnisse, in welchen einer der drei Coefficienten, etwa x, zu den beiden andern y und z steht.

Sind nun diese Verhältnisse $x:y$ und $x:z$ gegebene Functionen einer Veränderlichen u, also auch das eine Verhältniss eine gegebene Function des andern, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, findet zwischen x, y, z eine homogene Gleichung statt: so wird für jedes System auf solche Weise zusammengehöriger Werthe von x, y, z der Ausdruck $xA + yB + zC$ im Allgemeinen einem immer andern Punkte P entsprechen, und alle diese Punkte P werden eine gewisse Curve bilden. Diese Curve werde eine Linie der *m*ten Ordnung genannt, wenn die homogene Gleichung zwischen x, y, z vom *m*ten Grade ist und bloss ganze positive Potenzen von x, y, z enthält, wenn also

jedes Glied der Gleichung von der Form $ax^p\, y^q\, z^r$ ist, wo p, q, r ganze positive Zahlen, Null mit einbegriffen, bedeuten, deren Summe $= m$ ist.

§. 24.

Die Ordnung, zu welcher eine auf die Fundamentalpunkte A, B, C bezogene Curve gehört, wird nicht geändert, wenn man statt A, B, C irgend drei andere Punkte F, G, H, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, zu Fundamentalpunkten wählt. Denn sei in Bezug auf letztere

$$A = fF + gG + hH,\ \ B = f'F + g'G + h'H,\ \ C = f''F + g''H + h''H,$$

so wird

$$xA + yB + zC = tF + uG + vH, \text{ wenn man}$$

$$fx + f'y + f''z = t,\ gx + g'y + g''z = u,\ hx + h'y + h''z = v$$

setzt. Aus letztern drei Gleichungen lässt sich jede der drei Veränderlichen x, y, z durch einen Ausdruck von der Form $it + ku + lv$ dargestellt finden, wo i, k, l von den Constanten $f, g, h, f', \ldots$ abhängige Grössen sind. Substituirt man aber diese Ausdrücke für x, y, z in einer homogenen Gleichung des $m$ten Grades zwischen x, y, z, so erhält man eine homogene Gleichung desselben Grades zwischen t, u, v; folglich u. s. w.

§. 25.

Der allgemeine Ausdruck der Curvenpunkte, $xA + yB + zC$, reducirt sich, wenn man $z = 0$ setzt, auf $xA + yB$, also auf diejenigen Curvenpunkte, welche mit A und B in einem Hauptkreise liegen, d. h. auf die Durchschnitte des Fundamentalkreises AB mit der Curve; gleichzeitig reducirt sich die homogene Gleichung zwischen x, y, z, wenn sie vom $m$ten Grade ist, auf eine homogene Gleichung desselben Grades zwischen x und y, d. i. auf eine Gleichung des $m$ten Grades für das Verhältniss $y:x$. Die hieraus folgenden reellen Werthe dieses Verhältnisses, in $xA + yB$ substituirt, führen zu den einzelnen Durchschnitten des Fundamentalkreises AB mit der Curve, welche daher in höchstens m Punkten von AB geschnitten wird. Und da die Ordnung einer Curve unabhängig von der Annahme der Fundamentalpunkte ist, und daher jeder Hauptkreis zum Fundamentalkreise AB genommen werden kann, so schliessen wir, dass eine sphärische Linie der $m$ten Ordnung von einem Hauptkreise in m, oder $m - 2$, oder $m - 4$, etc. Punkten geschnitten wird, jenachdem nämlich jene Gleichung des $m$ten Grades entweder m, oder $m - 2$, oder $m - 4$, etc. reelle Wurzeln hat.

Indessen darf hierbei nicht ausser Acht gelassen werden, dass, da durch $xA + yB + zC$ immer zwei Punkte zugleich ausgedrückt werden, von denen der eine der Gegenpunkt des andern ist, jede durch eine Gleichung zwischen x, y, z ausgedrückte sphärische Linien von jedem Punkte, dem sie begegnet, immer auch zugleich den Gegenpunkt enthält, und dass daher, wenn man zwei zusammengehörige Gegenpunkte als verschieden betrachtet, die Anzahl der

Durchschnitte einer Linie der $m$ten Ordnung mit einem Hauptkreise entweder $2m$, oder $2m-4$, oder $2m-8$, etc. ist.

§. 26.

Die durch

$$(1)\quad xA + yB + zC$$

ausgedrückte Linie wird eine Linie der ersten Ordnung sein, wenn zwischen x, y, z die Gleichung

$$(2)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

besteht, wo a, b, c constante Zahlen bedeuten. Man kann hier sehr leicht die Coefficienten x, y, z als Functionen einer einzigen Veränderlichen darstellen und somit die Hinzufügung einer Gleichung überflüssig machen. Substituirt man nämlich den aus (2) fliessenden Werth von z im Ausdrucke (1), so wird er

$$xA + yB - c\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) C;$$

und wenn man ihn hierauf mit x dividirt, die Veränderliche $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}t$ setzt, und ihn zuletzt mit a multiplicirt:

$$(3)\quad aA + btB - c(1+t)C,$$

als der schon an sich hinreichende Ausdruck einer Linie der ersten Ordnung. — Noch einfacher gestaltet er sich, wenn man zwei Punkte F, G mit ihren Coefficienten f, g so bestimmt, dass

$$(4)\quad bB - cC = fF \quad \text{und} \quad (5)\quad cC - aA = gG;$$

denn hierdurch zieht er sich zusammen in

$$ftF - gG$$

und stellt somit jeden Punkt dar, welcher mit F und G in einem Hauptkreise liegt; d. h. er ist der Ausdruck des durch F und G zu legenden Hauptkreises. Eine Linie der ersten Ordnung ist demnach immer ein Hauptkreis.

§. 27.

Zusätze. a. Die Punkte F und G, welche in dem durch (3) ausgedrückten Hauptkreise liegen, sind nach (4) und (5) Punkte der Fundamentalkreise BC und CA; d. h. der Hauptkreis (3) schneidet diese Fundamentalkreise in den Punkten $bB - cC$ und $cC - aA$. Auch reducirt sich (3) auf dieselben Punkte, wenn man t das einemal $= \infty$ und das anderemal $= 0$ setzt. Für $t = -1$ reducirt sich (3) auf $aA - bB$, welches daher der Durchschnitt des Hauptkreises mit dem Fundamentalkreise AB ist. Man sieht übrigens von selbst, wie sich diese drei Durchschnittspunkte auch aus (1) und (2) in Verbindung ergeben, wenn man successive $x, y, z = 0$ setzt.

b. Aus (4) und (5) folgen nach §. 11. I. die Proportionen

$$\sin BF : \sin FC = -c:b \text{ und } \sin CG : \sin GA = -a:c;$$

ebenso ist, wenn H den Durchschnitt des Hauptkreises (3) mit AB bezeichnet:

$$(6)\quad aA - bB = hH \text{ und } \sin AH : \sin HB = -b:a.$$

Es ergiebt sich hieraus die bekannte Relation, wenn drei Hauptkreise BC, CA, AB von einem vierten resp. in F, G, H geschnitten werden:

$$\frac{\sin BF}{\sin FC} \cdot \frac{\sin CG}{\sin GA} \cdot \frac{\sin AH}{\sin HB} = -1.$$

c. Weil F, G, H in einem Hauptkreise liegen, so muss zwischen diesen drei Punkten allein eine Gleichung stattfinden: sie ergiebt sich durch Addition der Gleichungen (4), (5), (6):

$$fF + gG + hH = 0.$$

§. 28.

Entwickeln wir noch den Ausdruck für die Pole des durch (3) dargestellten Hanptkreises. Am einfachsten geschieht dieses, wenn wir die gesuchten Pole nicht unmittelbar auf A, B, C, sondern auf die Pole A_1, B_1, C_1 der Fundamentalkreise beziehen. In der That sei P der eine jener Pole von (3), und werde derselbe

$$P = pA_1 + qB_1 + rC_1$$

gesetzt. Lässt man hierin V successive mit A, B, C identisch werden, so findet sich:

$$\cos AP = p\cos AA_1,\quad \cos BP = q\cos BB_1,\quad \cos CP = r\cos CC_1.$$

Nun folgt aus der Gleichung (4), wenn man darin P statt V setzt:

$$b\cos PB - c\cos PC = f\cos PF.$$

Es ist aber F ein Punkt des Hauptkreises selbst, welcher P zum Pole hat; also $\cos PF = 0$, und daher

$$\cos PB : \cos PC = c : b;$$

eben so fliesst aus (5):

$$\cos PC : \cos PA = a : c.$$

Man hat ferner nach §. 21. ... $\cos AA_1 : \cos BB_1 : \cos CC_1$

$$= \frac{1}{\sin BC} : \frac{1}{\sin CA} : \frac{1}{\sin AB} = \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}.$$

Nach allem diesen verhalten sich

$$p : q : r = \frac{\sin A}{a} : \frac{\sin B}{b} : \frac{\sin C}{c},$$ und es ist folglich

$$P = \frac{\sin A}{a} . A_1 + \frac{\sin B}{b} . B_1 + \frac{\sin C}{c} . C_1$$

der auf gleichnamige Pole der Fundamentalkreise bezogene Ausdruck der Pole des Hauptkreises, welcher die Fundamentalkreise in den Punkten $bB - cC$, $cC - aA$, $aA - bB$ schneidet.

Wollte man P, auf die Fundamentalpunkte A, B, C selbst bezogen, darstellen, so hätte man nur in dem eben gefundenen Ausdrucke statt A_1, B_1, C_1 ihre durch A, B, C ausgedrückten Werthe aus §. 21. zu substituiren.

In dem besondern Falle, wenn $BC = CA = AB = 90°$, werden auch die Winkel $A = B = C = 90°$ oder $= 270°$; A_1, B_1, C_1 fallen mit A, B, C selbst, oder mit den Gegenpunkten von A, B, C zusammen, und es wird folglich

$$P = \frac{1}{a} A + \frac{1}{b} B + \frac{1}{c} C.$$

§. 29.

Was die sphärischen Linien der zweiten und höherer Ordnungen anlangt, so wird eine nur einigermassen umfassende Discussion derselben hier durch den Raum behindert. Ich begnüge mich daher, Einiges über kleinere Kugelkreise, als die einfachsten unter den Linien der zweiten Ordnung hinzuzufügen.

Um die Gleichung zwischen x, y, z zu finden, wenn $xA + \ldots$ der Ausdruck eines kleinern Kreises sein soll, bezeichne man mit U einen beliebigen Punkt desselben und setze demnach

$$(1)\quad xA + yB + zC = uU.$$

Lässt man hierin V mit einem der beiden Pole des Kreises, er heisse P, identisch werden, so kömmt:

$$x \cos PA + y \cos PB + z \cos PC = u \cos PU,$$

oder wenn man

$$(2)\quad \frac{\cos PA}{\cos PU} = f,\quad \frac{\cos PB}{\cos PU} = g,\quad \frac{\cos PC}{\cos PU} = h \text{ setzt:}$$

$$(3)\quad fx + gy + hz = u.$$

Weil PA, PB, PC die sphärischen Abstände des Pols von den Fundamentalpunkten und PU der sphärische Halbmesser des Kreises ist, so sind f, g, h von der Lage und der Grösse des Kreises abhängige Constanten.

Nach §. 11. V. folgt ferner aus (1):

$$xx + yy + zz + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy = uu,$$

wo der Kürze willen α, β, γ für $\cos BC$, $\cos CA$, $\cos AB$ geschrieben worden. Substituirt man hierin für u seinen Werth aus (3), so findet sich

$$(4)\quad (1-ff)\,xx + (1-gg)\,yy + (1-hh)\,zz$$
$$+ 2(\alpha - gh)\,yz + 2(\beta - hf)\,zx + 2(\gamma - fg)\,xy = 0,$$

welches demnach die gesuchte Gleichung zwischen x, y, z ist, und woraus zugleich hervorgeht, dass ein kleinerer Kreis zu den Linien der zweiten Ordnung gehört.

§. 30.

Begegnet der Kreis den drei Fundamentalpunkten, so ist $\cos PA = \cos PB = \cos PC = \cos PU$, und folglich nach (2) $f = g = h = 1$. Damit reducirt sich (4) auf

$$(1-\alpha)\,yz + (1-\beta)\,zx + (1-\gamma)\,xy = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{y} + \frac{1-\gamma}{z} = 0.$$

Setzt man daher $\frac{1-\alpha}{x} = pt$, $\frac{1-\beta}{y} = -p$, so wird $\frac{1-\gamma}{z} = p(1-t)$, und es kömmt, wenn man die hieraus folgenden Werthe von x, y, z in (1) substituirt:

$$\frac{1-\alpha}{t}\,A - (1-\beta)\,B + \frac{1-\gamma}{1-t}\,C, \text{ oder}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} BC^2 \,.\, (1-t)\,A - \sin \tfrac{1}{2} BA^2 \,.\, t\,(1-t)\,B + \sin \tfrac{1}{2} AB^2 \,.\, tC,$$

als der schon für sich hinreichende Ausdruck des durch die drei Fundamentalpunkte zu beschreibenden Kreises. Den Punkt A trifft der Kreis für $t = 0$, den Punkt B für $t = \infty$, den Punkt C für $t = 1$.

§. 31.

Zusätze. *a.* Für $f = g = h = 1$ verwandelt sich (3) in $x + y + z = u$. Wir schliessen hieraus, indem wir der Symmetrie willen a, b, c, d, D statt $x, y, z, -u, U$ setzen, den nicht uninteressanten Satz:

Ist $aA + bB + cC + dD = 0$, und liegen A, B, C, D in einem kleineren Kreise, so ist $a + b + c + d = 0$. — Auch sieht man bald, wie umgekehrt bewiesen werden kann, dass, wenn $aA + .. + dD = 0$ und $a + .. + d = 0$ ist, $A, .. D$ in einem Kreise liegen.

b. Um ein paar Beispiele zu geben, wie aus dem Ausdrucke einer Linie merkwürdige Relationen abgeleitet werden können, so seien S und T (Fig. 5) die Durchschnitte von AU mit BC und von CU mit AB. Alsdann ist (vergl. §. 14. *f.*)

$$S \equiv yB + zC \equiv -(1-\beta)(1-t)\,B + (1-\gamma)\,C,$$

$$T \equiv xA + yB \equiv (1-\alpha)\,A - (1-\beta)\,tB, \text{ folglich}$$

$$\frac{\sin SC}{\sin SB} = \frac{1-\beta}{1-\gamma}\,(1-t) \text{ und } \frac{\sin TA}{\sin TB} = \frac{1-\beta}{1-\alpha}\,.\,t.$$

Wird daher in einen kleineren Kreis ein sphärisches Viereck $ABCU$ beschrieben, und schneiden sich seine zwei Paare gegenüberliegender Seiten AU und BC in S, CU und AB in T, so ist

$$\frac{\sin SC}{\sin SB} \sin \tfrac{1}{2} AB^2 + \frac{\sin TA}{\sin TB} \sin \tfrac{1}{2} BC^2 = \sin \tfrac{1}{2} CA^2;$$

denn dies folgt aus den zwei vorhergehenden Gleichungen nach Elimination von t.

c. Heissen φ, χ, ψ die von einem Punkte $xA + yB + zC$ des um ABC beschriebenen Kreises auf BC, CA, AB gefällten sphärischen Perpendikel, so verhalten sich (§. 14. *d.*)

$$x : y : z = \sin BC \sin \varphi : \sin CA \sin \chi : \sin AB \sin \psi,$$

und es kömmt, wenn man diese Verhältnisswerthe von x, y, z in der Gleichung $\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{y} + \frac{1-\gamma}{z} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} BC^2}{x} + .. = 0$ des vorigen §. substituirt, die merkwürdige Relation:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} BC}{\sin \varphi} + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} CA}{\sin \chi} + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} AB}{\sin \psi} = 0 \text{ *)}.$$

§. 32.

Am einfachsten wird die Gleichung für einen kleineren Kreis, wenn wir letzterem eine solche Lage zu geben suchen, dass er zwei Fundamentalkreise, sie seien AB und BC, in den Fundamentalpunkten A und C, welche sie mit dem dritten Fundamentalkreise gemein haben, berührt. — Damit der Kreis die Fundamentalpunkte A und C fürs Erste nur treffe, muss (§. 29.) $PA = PC = PU$, folglich $f = h = 1$ sein. Hierdurch zieht sich die allgemeine Gleichung (4) zusammen in

$$(4^*) \quad (1-gg)\,yy + 2\,(\alpha - g)\,yz + 2\,(\beta - 1)\,zx + 2\,(\gamma - g)\,xy = 0.$$

Setzen wir darin $z = 0$, so erhalten wir für die zwei Durchschnitte des Kreises mit AB (§. 25.)

$$(1-gg)\,yy + 2\,(\gamma - g)\,xy = 0, \text{ also}$$

$$(a) \quad y = 0 \text{ für den einen und } (b) \quad (1-gg)\,y + 2\,(\gamma - g)\,x = 0$$

für den andern Durchschnitt. Der erstere ist der Fundamentalpunkt A, indem sich der Ausdruck $xA + yB + zC$ für $z = 0$ und $y = 0$ auf A reducirt. Soll nun, wie verlangt wird, der kleinere Kreis den Fundamentalkreis AB in A berühren, so muss auch der andere Durchschnitt, für welchen (b) gilt, in A fallen; es muss folglich auch der aus (b) folgende Werth von y, oder vielmehr der daraus folgende Werth des Verhältnisses $y : x$, null sein. Die Bedingung, unter welcher dieses geschieht, ist $\gamma - g = 0$.

Durch ganz analoge Schlüsse findet sich $\alpha - g = 0$ als die Bedingung, unter welcher der bereits durch C gehende kleinere Kreis den Fundamentalkreis BC daselbst berührt. Mit den Bedingungen $\alpha = \gamma = g$ reducirt sich aber die Gleichung (4^*) des Kreises auf $(1-\alpha\alpha)\,yy = 2\,(1-\beta)\,xz$.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher die Fundamentalkreise AB und BC in A und C berührt, ist demnach nur dann möglich, wenn $\gamma = \alpha$, d. i. wenn $\cos AB = \cos BC$ und daher $AB = BC$, nicht $= 360° - BC$ ist, sobald

*) Gudermann's Grundriss, Seite 160.

wir noch annehmen, dass die Bögen AB und BC beide zugleich kleiner, oder beide zugleich grösser als $180°$ sein sollen, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, dass beide Schenkel des Winkels B mit ihren innern, oder beide mit ihren äussern Seiten den Kreis berühren sollen. Ist aber $AB = BC$, so hat man im Dreieck ABC (§. 20. II.)

$$\cos CA = \cos BC^2 + \sin BC^2 \cos B, \text{ d. i. } \beta = \alpha\alpha + (1 - \alpha\alpha) \cos B,$$

$$\text{folglich } 1 - \beta = (1 - \alpha\alpha)(1 - \cos B) = 2(1 - \alpha\alpha) \sin \tfrac{1}{2} B^2,$$

und damit die Gleichung des Kreises:

$$yy = 4 \sin \tfrac{1}{2} B^2 . xz.$$

Sehr leicht können hiernach die zwei Verhältnisse zwischen x, y, z als Functionen einer Veränderlichen dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$\frac{y}{x} = 2 \sin \tfrac{1}{2} B . t, \text{ so wird } \frac{z}{x} = \frac{yy}{xx} . \frac{xz}{yy} = tt,$$

und man erhält auf solche Weise den schon für sich genügenden Ausdruck des Kreises:

$$A + 2 \sin \tfrac{1}{2} B . tB + ttC.$$

§. 33.

Folgerungen. a. Für $t = 0$ und $t = \infty$ reducirt sich der eben gefundene Ausdruck auf die Punkte A und C. Dagegen erhält man für $t = 1$ und für $t = -1$, die Punkte des Kreises

$$A + 2 \sin \tfrac{1}{2} B . B + C \text{ und } A - 2 \sin \tfrac{1}{2} B . B + C,$$

welche D und D_1 heissen. Es ist aber, wenn M den Mittelpunkt von AC bezeichnet: $A + C = 2 \cos \tfrac{1}{2} AC . M$ (§. 11. I.); folglich

$$D \equiv \cos \tfrac{1}{2} AC . M + \sin \tfrac{1}{2} B . B,$$

$$D_1 \equiv \cos \tfrac{1}{2} AC . M - \sin \tfrac{1}{2} B . B.$$

Hiernach sind D und D_1 die Punkte des Kreises, in welchen er vom Hauptkreise BM geschnitten wird (Fig 6.), und es verhält sich dabei

$$\sin MD : \sin DB = \sin \tfrac{1}{2} B : \cos \tfrac{1}{2} AC = - \sin MD_1 : \sin D_1 B,$$

woraus zugleich noch folgt, dass BM in D und D_1 harmonisch getheilt wird.

b. Man sieht bald, wie sich dieser Satz von der harmonischen Theilung noch verallgemeinern lässt. Schreibt man nämlich der Kürze willen m statt $2 \sin \tfrac{1}{2} B$ und setzt

$$A + mtB + ttC = uU, \quad A - mtB + ttC = u_1 U_1,$$

so sind U und U_1 zwei Punkte des Kreises, U ein beliebiger, und U_1, wegen $uU - u_1 U_1 = 2mtB$, derjenige, in welchem der Kreis vom Hauptkreise BU zum zweitenmale geschnitten wird. Man setze ferner

$$A + ttC = qQ, \text{ so wird}$$

$$qQ + mtB = uU, \quad qQ - mtB = u_1 U_1.$$

Hiernach ist Q der gegenseitige Durchschnitt von AC und BUU_1, und es verhält sich

$$\sin BU : \sin UQ = q : mt = -\sin BU_1 : \sin U_1 Q,$$

so dass der zwischen B und AC enthaltene Bogen BQ eines jeden durch B gelegten Hauptkreises von dem kleinern Kreise in U und U_1 harmonisch getheilt wird.

— Da hierbei nicht in Betracht kömmt, dass $AB = BC$, und $m = 2 \sin \frac{1}{2} B$ ist, so wird das eben Erwiesene von jeder durch $A + mtB + ttC$ ausgedrückten Curve gelten, welches auch die gegenseitige Lage der Fundamentalpunkte und welches auch der Werth der Constante m ist, d. h. von jeder Linie der zweiten Ordnung, welche AB und BC in A und C berührt. Denn dass von jeder solchen Linie der Ausdruck auf jene einfache Form zurückgebracht werden kann, lässt sich folgendergestalt kurz darthun.

Die allgemeine Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung ist

$$axx + byy + czz + fyz + gzx + hxy = 0 \text{ (§. 23.)}.$$

Damit diese Linie durch A gehe, als für welchen Punkt y und z null sind, darf für $y = 0$ und $z = 0$ nicht auch $x = 0$ werden; folglich muss $a = 0$ sein; und eben so muss, damit die Linie durch C gehe, $c = 0$ sein. Hierdurch reducirt sich die Gleichung auf

$$byy + fyz + gzx + hxy = 0 \text{ *)}.$$

Auf dieselbe Art, wie im vorigen §., ergiebt sich ferner, dass, damit noch die zweiten Durchschnitte der Curve mit AB und AC in A und C selbst fallen, resp. die Coefficienten von xy und von yz, d. i. h und f, null sein müssen. Die Gleichung wird somit

$$byy + gzx = 0, \text{ und es verhält sich daher}$$

$$x : y : z = 1 : \frac{y}{x} : -\frac{b}{g}\frac{yy}{xx} = 1 : mt : tt,$$

wenn man $\frac{g}{b} = -mm$ und $\frac{y}{x} = mt$ setzt; folglich u. s. w.

c. Legt man durch einen beliebigen Punkt U (Fig, 7.) des kleineren Kreises zwei Hauptkreise AU und CU, welche BC und AB in S und T schneiden, so ist

$$T = A + mtB, \quad S = mtB + ttC;$$

mithin verhält sich

$$\sin AT : \sin TB = mt : 1, \quad \sin CS : \sin SB = m : t;$$

$$\text{folglich ist } \frac{\sin AT}{\sin TB} \cdot \frac{\sin CS}{\sin SB} = mm = 4 \sin \tfrac{1}{2} B^2.$$

---

*) Soll die Linie noch den Fundamentalpunkt B treffen, so muss $b = 0$ sein. Die Gleichung für eine durch die drei Fundamentalpunkte beschriebene Linie der zweiten Ordnung ist demnach

$$fyz + gzx + hxy = 0.$$

§. 34.

Aus dem Ausdrucke des Kreises, welcher AB und BC in A und C berührt, lässt sich ohne Schwierigkeit der Ausdruck des Kreises ableiten, welcher sämmtliche drei Fundamentalkreise BC, CA, AB, es sei in F, G, H (Fig. 8.), berührt. Machen wir hierbei noch die immer mögliche Voraussetzung, dass die drei Fundamentalkreise auf gleichnamigen Seiten berührt werden, so muss, wenn man $GA = f$, $HB = g$, $FC = h$ setzt, auch $AH = f$, $BF = g$, $CG = h$ sein (§. 32.), und man hat, wenn die Bögen BC, CA, AB, wie in §. 17., mit a, b, c bezeichnet werden:

$$g + h = a, \text{ oder } = a + 360°,$$

jenachdem F im Bogen BC selbst, oder in dessen Verlängerung liegt; und auf gleiche Weise

$$h + f = b, \text{ oder } = b + 360°, \quad f + g = c, \text{ oder } = c + 360°.$$

Hieraus finden sich, wenn a, b, c als gegeben angenommen werden, die Werthe von f, g, h, und damit die Oerter der Berührungspunkte F, G, H. Man gewahrt nämlich leicht, dass, für welchen der zwei Werthe einer jeden der drei Summen $g + h$, $h + f$, $f + g$ man sich auch entscheidet, nicht mehr als zwei Systeme von Werthen für f, g, h hervorgehen, indem entweder

$$f = \tfrac{1}{2}(b + c - a), \quad g = \tfrac{1}{2}(c + a - b), \quad h = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$$

ist, oder f, g, h dieselben, nur jedesmal um 180° vermehrten (oder verminderten), Werthe haben; dass es mithin auch zwei Systeme von Berührungspunkten geben muss, von denen die Punkte des einen Systems die Gegenpunkte des andern sind.

Hiernach verhalten sich, welches der zwei Systeme von Werthen der f, g, h man auch wählen mag,

$$\sin f : \sin g : \sin h$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}(b + c - a) : \sin \tfrac{1}{2}(c + a - b) : \sin \tfrac{1}{2}(a + b - c),$$

und es ist bei jedem der zwei Systeme:

$$2 \sin g \sin h = 2 \sin \tfrac{1}{2}(c + a - b) \sin \tfrac{1}{2}(a + b - c)$$
$$= \cos(b - c) - \cos a = \sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a$$
$$= \sin b \sin c\,(1 - \cos A) \text{ (§. 20. II.)} = 2 \sin b \sin c \sin \tfrac{1}{2} A^2,$$

und eben so ist

$$\sin h \sin f = \sin c \sin a \sin \tfrac{1}{2} B^2,$$
$$\sin f \sin g = \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2} C^2; \text{ woraus noch folgt:}$$

$$\sin f : \sin g = \frac{\sin \frac{1}{2} B^2}{\sin b} : \frac{\sin \frac{1}{2} A^2}{\sin a} = \frac{\sin \frac{1}{2} B^2}{\sin B} : \frac{\sin \frac{1}{2} A^2}{\sin A}$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A, \text{ und auf gleiche Art}$$

$$\sin g : \sin h = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B.$$

Dieses vorausgeschickt, ist der Ausdruck des Kreises, welcher AB und BC auf gleichnamigen Seiten in H und F berührt:

$$H + 2 \sin \tfrac{1}{2} B . tB + ttF$$

Nach §. 11. I. ist aber $\sin AB . H = \sin HB . A + \sin AH . B$,

d. i. $\sin c . H = \sin g . A + \sin f . B$, und eben so

$$\sin a . F = \sin h . B + \sin g . C.$$

Die hieraus folgenden Werthe von H und F im Ausdrucke des Kreises substituirt, erhält man den auf A, B, C bezogenen Ausdruck

$$(o) \quad \frac{\sin g}{\sin c} A + \left[\frac{\sin f}{\sin c} + 2 \sin \tfrac{1}{2} B . t + \frac{\sin h}{\sin a} . tt\right] B + \frac{\sin g}{\sin a} . ttC.$$

Dieser von AB und BC in H und F berührte Kreis wird nun zugleich von CA in G berührt werden und daher der gesuchte sein, wenn H und F die auf obige Weise bestimmten Punkte sind, wenn also f, g, h die vorhin gefundenen Werthe haben. Substituiren wir deshalb zunächst den aus obigen Relationen fliessenden Werth von $\sin \tfrac{1}{2} B$, $= \sqrt{\frac{\sin h \sin f}{\sin c \sin a}}$, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$\frac{\sin g}{\sin c} A + \left[\sqrt{\frac{\sin f}{\sin c}} + t \sqrt{\frac{\sin h}{\sin a}}\right]^2 B + \frac{\sin g}{\sin a} tt\, C.$$

Werde ferner statt t eine andere Veränderliche u eingeführt, so dass $t \sqrt{\frac{\sin h}{\sin a}} = u \sqrt{\frac{\sin f}{\sin c}}$ ist; hierdurch reducirt sich der Ausdruck auf

$$\frac{1}{\sin f} A + \frac{(1 + u)^2}{\sin g} B + \frac{uu}{\sin h} C,$$

und wird, wenn man noch statt der Verhältnisse zwischen $\sin f$, $\sin g$, $\sin h$ ihre obigen Werthe setzt:

$$\frac{1}{\sin \tfrac{1}{2}(b + c - a)} A + \frac{(1 + u)^2}{\sin \tfrac{1}{2}(c + a - b)} B + \frac{uu}{\sin \tfrac{1}{2}(a + b - c)} C$$

oder ..... $\tan \tfrac{1}{2} A . A + \tan \tfrac{1}{2} B . (1 + u)^2 B + \tan \tfrac{1}{2} C . uuC$,

— der Ausdruck des Kreises, welcher die drei Fundamentalkreise auf gleichnamigen Seiten berührt. Die drei Berührungspunkte ergeben sich, wenn man successive $u = \infty$, $= -1$, $= 0$ setzt, und sind daher, wie wir schon wissen: $\sin h . B + \sin g . C$, u. s. w.

§. 35.

Zusätze. a. Der im Obigen erhaltene und hierauf zur Reduction des Ausdrucks (o) benutzte Werth von $\sin \tfrac{1}{2} B$ lässt sich auch aus (o) unmittelbar herleiten. Setzt man nämlich in diesem Ausdrucke, welcher einem von AB und BC berührten Kreise angehört, den Coefficienten von B null, so erhält man zwei Werthe für t, und mit diesen die zwei Punkte, in denen der

Kreis von CA im Allgemeinen geschnitten wird. Sollen nun diese zwei Durchschnitte, wie verlangt wird, in einen Berührungspunkt zusammengehen, so müssen jene zwei Werthe von t einander gleich sein, und dieses geschieht nur dann, wenn $\sin \frac{1}{2} B^2 = \frac{\sin f}{\sin c} \cdot \frac{\sin h}{\sin a}$ ist.

b. Der zuletzt erhaltene Ausdruck gewinnt eine noch symmetrischere Form, wenn man $u = \frac{p-q}{q-r}$ setzt, nämlich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A . (q-r)^2 A + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B . (r-p)^2 B + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C . (p-q)^2 . C,$$

worin für p, q, r alle möglichen Zahlen genommen werden können.

c. Schreibt man statt $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} B$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} C$ der Kürze willen i, k, l, und setzt $i(q-r)^2 = x$, $k(r-p)^2 = y$, $l(p-q)^2 = z$, so wird einerseits der Ausdruck: $xA + yB + zC$, und andererseits

$$\sqrt{\frac{x}{i}} + \sqrt{\frac{y}{k}} + \sqrt{\frac{z}{l}} = 0,$$

oder nach Wegschaffung der Wurzelzeichen:

$$\frac{xx}{ii} + \frac{yy}{kk} + \frac{zz}{ll} - \frac{2yz}{kl} - \frac{2zx}{li} - \frac{2xy}{ik} = 0,$$

welches daher die Gleichung für den die drei Fundamentalkreise berührenden Kreis ist, — oder überhaupt die Gleichung für eine die drei Fundamentalkreise berührende Linie der zweiten Ordnung, sobald i, k, l überhaupt in constanten Verhältnissen stehende Zahlen bedeuten. Dies erhellet sogleich daraus, dass, wenn man in der allgemeinen Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung (§. 33. *b.*) $x = 0$ setzt, welches $byy + czz + fyz = 0$ giebt, die zwei hieraus folgenden Werthe des Verhältnisses $y : z$ einander gleich sein müssen, und dass Analoges für $y = 0$ und für $z = 0$ stattfinden muss.

d. Werden von einem Punkte $xA + yB + zC$ des in ABC eingeschriebenen Kreises auf die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks die Perpendikel φ, χ, ψ gefällt, so findet sich, wenn man die mit x, y, z proportionalen Producte $\sin BC \sin \varphi$, etc. (§. 14. *d.*), oder, was dasselbe ist, die Producte $\sin A \sin \varphi$, $\sin B \sin \chi$, $\sin C \sin \psi$ in der Gleichung $\sqrt{\frac{x}{i}} + \ldots = \sqrt{\frac{x}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A}} + \ldots = 0$ substituirt:

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\sin \varphi} + \cos \tfrac{1}{2} B \sqrt{\sin \chi} + \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\sin \psi} = 0$$

d. h. von den drei Producten $\cos \frac{1}{2} A \sqrt{\sin \varphi}$, etc. ist, wenn sie mit einerlei Zeichen genommen werden, das absolut grösste der Summe der beiden andern gleich.

DUALITÄT DER BISHERIGEN SÄTZE UND FORMELN.

§. 36.

Zufolge der Grundeigenschaften der Pole von Kugelkreisen lässt sich, wie bekannt, von jedem Satze der Sphärik auf einen zweiten schliessen, indem man Punkte und Hauptkreise, das Liegen mehrerer Punkte in einem Hauptkreise und das sich Schneiden mehrerer Hauptkreise in einem Punkte miteinander vertauscht, und statt der Bögen zwischen Punkten die Winkel zwischen den den Punkten entsprechenden Hauptkreisen, und umgekehrt, setzt. Da der auf gleiche Weise aus dem zweiten Satze gefolgerte Satz wieder der erste ist, so gehören alle Sätze der Sphärik paarweise zusammen, und dieses ist es, worin das in der Sphärik durchweg herrschende Princip der Dualität besteht.

Um dieses Princip auf die voranstehenden Untersuchungen anzuwenden, wollen wir die Kreise, welche die im Vorigen mit $V, A, B, C, \ldots$ bezeichneten Punkte zu Polen haben, V, A, B, C, ... nennen und die positiven Richtungen dieser Kreise so bestimmen, dass jene Punkte gleichnamige Pole derselben sind, dass also, wenn z. B. A und A' Gegenpunkte von einander sind, die Kreise A und A′ zwar zusammenfallen, aber entgegengesetzte Richtungen haben. Hiernach sind der Cosinus des Bogens zwischen den Punkten V und A und der Cosinus des Winkels zwischen den Hauptkreisen V und A einander gleich, u. s. w., und es wird daher aus den anfänglichen, allen spätern Betrachtungen zur Basis dienenden Porismen in §§. 5. 6. und 8. sogleich auf nachstehende Sätze geschlossen werden können.

Sind zwei oder mehrere Hauptkreise A, B, C, ..., ihrer Lage und positiven Richtung nach, und ihnen zugehörige Coefficienten a, b, c, ... gegeben, so lässt sich noch ein und nicht mehr als ein Hauptkreis P und ein Coefficient p finden, dergestalt, dass für jede Lage und Richtung eines noch andern Hauptkreises V

$$a \cos \mathrm{VA} + b \cos \mathrm{VB} + c \cos \mathrm{VC} + \ldots = \pm p \cos \mathrm{VP}$$

ist, wo das Vorzeichen von p von der für den Kreis P beliebig anzunehmenden Richtung abhängt. Schneiden sich A, B, C, ... in einem Punkte, so trifft denselben auch P. — In dem besondern Falle, wenn die Summe $a \cos \mathrm{VA} + \ldots = 0$ ist, bleibt die Lage von P unbestimmt.

Sind drei sich in einem Punkte schneidende Hauptkreise A, B, P gegeben, so lassen sich drei in solchen, nur auf Eine Weise bestimmbaren Verhältnissen stehende Zahlen a, b, p finden, dass für jeden vierten Hauptkreis V

$$a \cos \mathrm{VA} + b \cos \mathrm{VB} = p \cos \mathrm{VP} \text{ ist.}$$

Zu vier Hauptkreisen A, B, C, Q, von denen keine drei sich in einem Punkte schneiden, lassen sich vier in solchen, nur auf Eine Weise bestimmbaren Verhältnissen stehende Zahlen a, b, c, q finden, dass für jeden fünften Hauptkreis V

$$a \cos \mathrm{VA} + b \cos \mathrm{VB} + c \cos \mathrm{VC} = q \cos \mathrm{VQ} \text{ ist.}$$

§. 37.

Man sieht leicht, wie durch diese Porismen auf analoge Art, wie durch die entsprechenden früheren, eine sphärische Coordinatenmethode sich begründen lässt, nur dass hier durch die Coordinaten nicht Punkte, sondern Hauptkreise bestimmt werden; auch werden nach dieser Methode ähnlicher Weise, wie nach der vorigen, sphärische Curven durch Gleichungen ausgedrückt werden können.

Sind nämlich A, B, C drei ihrer Lage und Richtung nach bestimmte Hauptkreise, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, und x, y, z drei in bestimmten Verhältnissen stehende Zahlen, so ist durch die Gleichung $x \cos \mathrm{VA} + y \cos \mathrm{VB} + z \cos \mathrm{VC} = u \cos \mathrm{VU}$ ein noch anderer Hauptkreis U bestimmt; oder, was dasselbe sagt: es ist (nach Weglassung der Zeichen cos und V) $x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}$ der Ausdruck eines andern bestimmten Hauptkreises. Lassen wir folglich x, y, z durch eine homogene Gleichung mit einander verbundene Veränderliche sein und substituiren im Ausdrucke $x\mathrm{A} + \ldots$ für die Verhältnisse zwischen x, y, z nach und nach alle die, welche dieser Gleichung zufolge statt haben können, so erhalten wir eine Reihe von unendlich vielen Hauptkreisen, und die Curve, welche alle diese Kreise berührt oder umhüllt, wird die durch die Gleichung dargestellte sein.

Sind dabei, wie im Vorigen, A, B, C gleichnamige Pole der Hauptkreise A, B, C, so ist $xA + yB + zC$ der Pol des Hauptkreises $x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}$, und zugleich der Ausdruck der Curve, welche die Pole aller der Hauptkreise enthält, die der vorigen Curve $x\mathrm{A} + ..$ als Tangenten dienten. Lässt man daher einen Hauptkreis sich so bewegen, dass seine Pole in der jetzigen Curve, sie heisse K, fortgehen, so wird die vorige, man nenne sie K, die umhüllende Curve aller der verschiedenen Lagen des sich bewegenden Hauptkreises sein.

Eben so, wie K aus K entsteht, lässt sich aber auch K aus K erzeugen. Denn ist U irgend ein Punkt der Curve K, und W derjenige Punkt der Curve K, in welchem diese von dem Hauptkreise, welcher U zum Pole hat, berührt wird, so kann man W auch als den Durchschnitt der zwei Hauptkreise betrachten, welche U und den in K auf U nächstfolgenden Punkt U' zu Polen haben. Wegen $UW = U'W = 90°$, wird aber das Element UU' der Curve K zugleich ein Element des Hauptkreises sein, welcher W zum Pole hat; und es wird folglich auch umgekehrt die Curve K alle die Hauptkreise umhüllen, deren Pole in K liegen. Mit andern Worten: ein Hauptkreis, welcher berührend an einer der beiden Curven K oder K fortbewegt wird, beschreibt mit seinen Polen die jedesmal andere. — Noch folgt hieraus, dass ein Hauptkreis, welcher die eine der beiden Curven normal schneidet, auch die andere unter rechten Winkeln trifft, und dass der zwischen beiden Durchschnitten enthaltene Bogen des Hauptkreises ein Quadrant ist.

Wir wollen demnach von zwei Curven, welche in einer solchen gegenseitigen Beziehung, wie K und K, stehen, die eine die *reciproke* der andern nennen. Ihre Ausdrücke sind $xA + yB + zC$ und $x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}$ in Bezug auf eine und dieselbe homogene Gleichung zwischen x, y, z.

§. 38.

Man kann hierbei noch nach dem Ausdrucke der Curve K fragen, wenn diese gleichfalls auf die Punkte A, B, C bezogen wird. Um ihn zu finden, setze man für die zwei in K einander unendlich nahen Punkte U und U':

$$(1)\quad uU = xA + yB + zC,$$

$$(2)\quad u'U' = (x + dx)\,A + (y + dy)\,B + (z + dz)\,C.$$

Hieraus ist nach dem Vorigen der Punkt

$$(3)\quad W = pA + qB + rC$$

in der Reciproken K so zu bestimmen, dass $\cos UW = \cos U'W = 0$ wird. Es muss daher sein, wenn man in (1) W statt V setzt:

$$(4)\quad 0 = x \cos WA + y \cos WB + z \cos WC.$$

Nehmen wir jetzt zur Vereinfachung der Rechnung noch an, dass BC, CA, AB Quadranten sind, so folgt aus (3), wenn statt V successive A, B, C gesetzt werden:

$$\cos WA = p, \quad \cos WB = q, \quad \cos WC = r.$$

Damit verwandelt sich (4) in

$$0 = px + qy + rz;$$

und eben so folgt aus (2) und (3) in Verbindung:

$$0 = p\,(x + dx) + q\,(y + dy) + r\,(z + dz); \text{ mithin}$$

$$p : q : r = y\,dz - z\,dy : z\,dx - x\,dz : x\,dy - y\,dx, \text{ und}$$

$$W \equiv (y\,dz - z\,dy)\,A + (z\,dx - x\,dz)\,B + (x\,dy - y\,dx)\,B,$$

welches zugleich der Ausdruck für die reciproke Curve K sein wird.

Man kann hiernach, wenn in dem Ausdrucke $xA + \ldots$ der Curve K die Coefficienten x, y, z als Functionen einer Veränderlichen t gegeben sind, die Verhältnisse zwischen den Coefficienten von A, B, C im Ausdrucke für K ohne Weiteres als Functionen von t finden, und hat somit der Aufgabe Genüge gethan. Ist aber die Natur der Curve K, wie wir bisher immer angenommen haben, durch eine homogene Gleichung zwischen x, y, z bestimmt, so erinnere man sich zuerst der Eigenschaft homogener Functionen, wonach, wenn v eine solche Function vom $n$ten Grade zwischen x, y, z bedeutet,

$$x\,\frac{dv}{dx} + y\,\frac{dv}{dy} + z\,\frac{dv}{dz} = nv \text{ ist.}$$

Ist daher $v = 0$ die Gleichung der Cure K, so hat man

$$x\,\frac{dv}{dx} + y\,\frac{dv}{dy} + z\,\frac{dv}{dz} = 0, \text{ nächstdem aber auch}$$

$$\frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy + \frac{dv}{dz}\,dz = 0; \text{ folglich}$$

$$\frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz} = y\,dz - z\,dy : z\,dx - x\,dz : x\,dy - y\,dx;$$

und damit wird der Ausdruck für die Curve K:

$$\frac{dv}{dx} A + \frac{dv}{dy} B + \frac{dv}{dz} C,$$

wobei zwischen x, y, z die Gleichung $v = 0$ ebenfalls bestehen muss.

Beispiel. Sei K eine Linie der zweiten Ordnung, und daher

$$v = a\,xx + b\,yy + c\,zz + 2\,f\,yz + 2\,g\,zx + 2\,h\,xy.$$

Es folgt hieraus:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dv}{dx} = ax + gz + hy,\ \tfrac{1}{2}\frac{dv}{dy} = by + hx + fz,\ \tfrac{1}{2}\frac{dv}{dz} = cz + fy + gx.$$

Setzt man daher noch diese drei Aggregate resp. $= \xi$, η, ζ, so wird der Ausdruck von K

$$\xi A + \eta B + \zeta C,$$

in Verbindung mit einer homogenen Gleichung des zweiten Grades zwischen ξ, η, ζ, welche hervorgeht, wenn man aus den drei Gleichungen $\xi = ax + gz + hy$, etc. die Werthe von x, y, z, durch ξ, η, ζ ausgedrückt, sucht und sie in der Gleichung $v = 0$ substituirt.

— Betrachten wir noch den speciellen Fall, wo $v = 2xz - yy$. Hieraus ergiebt sich $\frac{dv}{dx} = 2z$, $\frac{dv}{dy} = -2y$, $\frac{dv}{dz} = 2x$; und es wird daher, wenn man noch $z = \xi$, $-y = \eta$, $x = \zeta$ setzt, der Ausdruck von K ... $\xi A + \eta B + \zeta C$, mit der Gleichung $v = 2\xi\zeta - \eta\eta = 0$. In diesem Falle ist also die reciproke Curve K mit der ursprünglichen K identisch. Der Grund hiervon liegt darin, dass letztere nach §. 32, weil jetzt die Seiten des Fundamentaldreiecks Quadranten sind und mithin $\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, ein kleinerer Kreis ist, welcher von AB und BC in C und A berührt wird, und, wie hieraus leicht weiter folgt, einen Quadranten zum Durchmesser hat. Dass aber ein solcher Kreis sich selbst zur Reciproken hat, bedarf keiner Erläuterung.

Zusatz. Weil von der Curve $xA + yB + zC$ die reciproke xA + yB + zC ist, vorausgesetzt, dass für beide Ausdrücke eine und dieselbe Gleichung zwischen x, y, z gilt, so ist mit der vorigen Untersuchung zugleich die Aufgabe gelöst worden: Aus dem Ausdrucke einer auf drei Hauptkreise A, B, C bezogenen Curve den Ausdruck derselben auf die Pole A, B, C jener Hauptkreise bezogenen Curve zu finden.

§. 39.

Analog mit §. 23. kann man eine Curve, wenn sie auf drei Hauptkreise bezogen wird, und die homogene Gleichung zwischen den Coefficienten der Hauptkreise vom $m$ten Grade ist, eine Linie der $m$ten Ordnung nennen. Nur gehört eine solche im Allgemeinen nicht zu derselben Ordnung, sobald man sie auf drei Punkte bezieht. Bloss eine Linie, welche nach der einen Beziehung zur zweiten Ordnung gehört, ist auch nach der andern von dieser Ord-

nung (voriger §.). Dagegen zeigt sich schon bei der ersten Ordnung, ein Unterschied, indem, wenn $ax + by + cz = 0$ ist, alle durch $x\text{A} + \ldots$ dargestellten Hauptkreise sich in einem Punkte und dessen Gegenpunkte schneiden, und daher eine auf drei Hauptkreise bezogene Linie der ersten Ordnung bloss aus zwei Gegenpunkten besteht.

Uebrigens erhellet eben so, wie in §. 24., auch hier, dass die Ordnungszahl einer auf A, B, C bezogenen Curve durch Annahme dreier anderer Hauptkreise statt A, B, C nicht geändert wird. Da endlich für irgend drei zusammengehörige Werthe von x, y, z durch $x\text{A} + y\text{B} + z\text{C}$ irgend ein die Curve berührender Hauptkreis ausgedrückt wird, der, wenn $z = 0$ ist, durch die Durchschnitte von B mit A geht, so können (§. 25.) an die Curve, wenn sie von der $m$ten Ordnung ist, durch die Durchschnitte von B mit A, und mithin auch durch jeden andern Punkt der Kugelfläche, höchstens m Hauptkreise berührend gelegt werden

---

Nachträgliche Bemerkung über die Bedeutung sphärischer Gleichungen.

Sind mehrere gerade Linien ihrer Länge und Richtung nach gegeben, und setzt man diese Linien, ohne ihre Richtungen zu ändern, dergestalt an einander, dass man den Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Endpunkte der nächst vorhergehenden zusammenfallen lässt, so kann man die gerade Linie, deren Anfangspunkt der Anfangspunkt der ersten, und deren Endpunkt der Endpunkt der letzten der an einander gesetzten Linien ist, als die Summe dieser Linien betrachten und sie zur Unterscheidung von dem Begriffe, den man für gewöhnlich mit dem Wort *Summe* verbindet, *geometrische Summe* nennen. Die Länge und die Richtung der Linie, welche die Summe ausdrückt, bleiben ungeändert, welches auch die Ordnung ist, in welcher man von den zu summirenden Linien die eine an die andere setzt; — eben so wie in der Arithmetik die Summe mehrerer Zahlen unabhängig von ihrer Aufeinanderfolge beim Addiren ist *).

Sind nun die Längen mehrerer zu addirender Linien $= a, b, c, \ldots$, die Länge der Linie, welche die geometrische Summe der erstern darstellt, $= p$; sind ferner die Richtungen aller dieser Linien einerlei mit den Richtungen der Halbmesser einer Kugel, welche resp. nach den Punkten $A, B, C, \ldots$ und P der Kugelfläche gezogen werden, so ist für jeden Ort eines noch andern Punktes V der Kugel:

$$a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC + \ldots = p \cos VP,$$

*) Vergl. des Verfassers «Elemente der Mechanik des Himmels» (1843) §§. 2 u. 74., und einen Aufsatz desselben in Crelle's mathemat. Journal, Bd. XXVIII., S. 1 etc. Der Begriff der geometrischen Addition, sowie noch der einer geometrischen Multiplication, finden sich auch entwickelt und mit einer Reihe merkwürdiger Folgerungen begleitet in Grassmann's «Wissenschaft der extensiven Grösse» (1844). In der letzten Zeit scheint auf dieselben, der Vereinfachung der Geometrie gewiss sehr förderlichen, neuen Begriffe und Ansichten ein französischer Geometer, Herr de Saint-Venant, für sich gekommen zu sein. Sein «Mémoire sur les sommes et les différences géometriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique» ist in den Comptes rendus, Tome XXI. Nr. 11. angezeigt.

wie aus dem zu Ende des §. 5. Bemerkten sogleich einleuchten wird. Die Gleichung

$$aA + bB + cC + \ldots = pP,$$

wie wir der Kürzen willen anstatt der vorigen geschrieben haben, kann daher auch als der Ausdruck dessen angesehen werden, dass von mehreren geraden Linien, deren Längen $= a, b, c, \ldots$ sind, und deren Richtungen durch die Punkte A, B, C, ... einer Kugelfläche bestimmt werden, die geometrische Summe eine Linie ist, deren Länge $= p$, und deren Richtung durch den Punkt P der Fläche bestimmt wird.

Um von dieser Deutung sphärischer Gleichungen eine Anwendung zu zeigen, seien in Bezug auf ein System dreier sich recht- oder schiefwinklig schneidender Axen die Coordinaten eines Punktes $P = x, y, z$. Die geometrische Summe derselben ist, wie man leicht sieht, die vom Anfangspunkte der Coordinaten bis zum Punkte P gezogene gerade Linie, deren Länge p heisse. Beschreibt man daher um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit p als Halbmesser eine Kugelfläche, und wird diese von den drei coordinirten Axen nach den positiven Richtungen der letztern hin in A, B, C geschnitten, so wird sein:

$$xA + yB + zC = pP.$$

Und umgekehrt wird man aus dieser sphärischen Gleichung schliessen können, dass die drei Coefficienten x, y, z den Coordinaten des Punktes P in Bezug auf ein Axensystem proportional sind, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel, und dessen Axen die vom Mittelpunkte nach A, B, C hin gezogenen Geraden zu ihren positiven Richtungen haben; und dass nach demselben Verhältnisse der Coefficient p der Entfernung des P vom Anfangspunkte proportional ist.

Aehnlicherweise endlich werden in der Gleichung

$$x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C} = p\mathrm{P}$$

die Coefficienten x, y, z, p den Flächen der vier Dreiecke proportional sein, welche in vier mit den Ebenen der Hauptkreise A, B, C, P parallelen, aber sich nicht in einem Punkte schneidenden Ebenen von den Geraden gebildet werden, in denen jede dieser Ebenen von den jedesmal drei übrigen geschnitten wird.

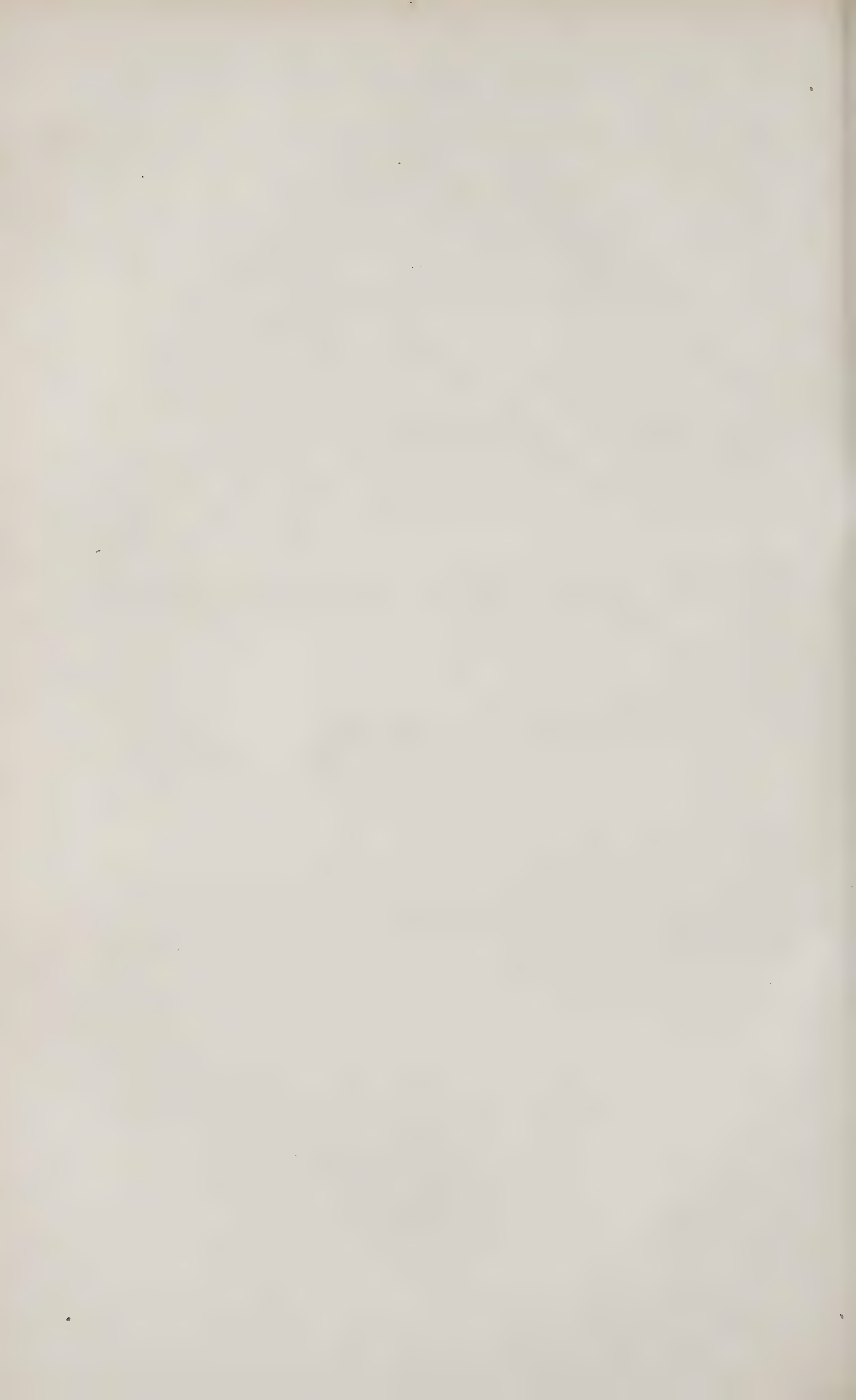
ÜBER DIE MATHEMATISCHE BESTIMMUNG

DER

MUSIKALISCHEN INTERVALLE,

VON

M. W. DROBISCH.



Die Lehre von den Intervallen der Töne, die Grundlage der Musik, lässt im allgemeinen eine vierfache wissenschaftliche Betrachtungsweise zu, eine akustische, eine ästhetischmusikalische, eine physiologische und eine psychologische. Die erste beschäftigt sich hauptsächlich mit den Schwingungszahlen tönender Körper und ihren einfacheren oder zusammengesetzteren Verhältnissen; die zweite mit denjenigen Verbindungen gleichzeitig gegebener, akustisch bestimmter Töne, die als Wohlklang oder Missklang empfunden werden; der dritten fällt die Untersuchung über die leiblichen Bedingungen der Empfindung der Töne, also über dasjenige zu, was in unserm Gehörorgan, Gehirn und Nerven vor sich geht, wenn wir Töne und Tonverbindungen wahrnehmen; die psychologische Betrachtung endlich hat über die Natur und den Grund der angenehmen und unangenehmen Gefühle und Gemüthsstimmungen Rechenschaft abzulegen, welche die Töne nach ihren mannichfaltigen Verbindungen in uns hervorbringen. Von diesen vier Untersuchungen ist die erste und zweite bereits in grosser Vollkommenheit geführt; für die physiologische Seite der Intervallenlehre scheint noch nichts Bedeutendes geschehen zu sein; die psychologische Aufgabe hat Leibniz in geistreicher Weise angedeutet. In einer bekannten Stelle seiner Briefe (epist. ad divers. T. I. p. 154) sagt er: Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi, multa enim facit in perceptionibus confusis seu insensibilibus, quae distincta apperceptione notare nequit. Errant enim qui nihil in anima fieri putant, cujus ipsa non sit conscia. Anima igitur, etsi se numerare non sentiat, sentit tamen hujus numerationis insensibilis effectum seu voluptatem in consonantiis, molestiam in dissonantiis inde resultantem. Man hat seitdem diese Aeusserung vielfach angeführt, ohne ihren Inhalt genauer zu entwickeln und zu prüfen. Schien es unwahrscheinlich, dass die Seele im Verborgenen, sich selbst unbewusst, die Töne als Zahlen vorstellen und miteinander vergleichen sollte, so substituirte man dafür Anschauungen, vermöge deren die Töne als stetige Grössen von verschiedener Ausdehnung gedacht wurden, und deren einfachere oder zusammengesetztere anschauliche Verhältnisse der Grund des Wohlgefallens an den Consonanzen und des Missfallens an den Dissonanzen sein sollten. Man begnügte sich mit diesem Gedanken in seiner unbestimmten Allgemeinheit und forschte den Bedingungen seiner Möglichkeit nicht weiter nach. Erst Herbart war es vorbehalten, Leibnizens grossen und wahren Gedanken, dass wir unzählige Vorstellungen von unmerklicher Stärke besitzen, die erst, wenn sie sich

in bedeutender Anzahl summiren, uns zum Bewusstsein kommen — ein Gedanke, der dem Erfinder der Differential- und Integralrechnung natürlich sein musste — in seiner Bedeutsamkeit zu erkennen und auf ihn eine neue Gestaltung der ganzen Psychologie zu gründen. Er bahnte ihm den Weg zu einer mathematischen Theorie der geistigen Kräfte und der durch sie hervorgebrachten Bewegungen im Kreise unsers Vorstellens und unsrer Gemüthszustände. Auch der psychologischen Lehre von den Intervallen wendete sich hierbei sein Scharfsinn mit um so grösserem Eifer zu, als die numerisch bestimmten Thatsachen der Akustik und theoretischen Musik eine genauere Vergleichung der mathematischen Psychologie mit der Erfahrung möglich zu machen schienen. Herbart's hierauf bezügliche Arbeiten*) scheinen wenig Beachtung gefunden zu haben. Doch verdient es wohl der besondern Erwähnung, dass ein Naturforscher wie von Baer**) sich für Herbart's Theorie erklärte. Freilich war diese nicht leicht zugänglich durch ihre Kürze, mehr noch schwer zu verstehen durch vorausgesetzte Bekanntschaft mit den Principien seiner mathematischen Psychologie. Aber auch auf den mit den nöthigen Vorkenntnissen Ausgerüsteten und mit dem Princip im allgemeinen Einverstandenen wirken doch diese Arbeiten Herbart's mehr anregend als vollständig überzeugend; sie geben vielmehr noch mancherlei beunruhigenden Zweifeln Raum und lassen den Eindruck zurück, dass hier wohl Wahres, aber noch nicht die ganze und volle Wahrheit gefunden sei, deren sicherstes Kennzeichen immer die naturgemässe Einfachheit bleiben wird. Es ist in der nachfolgenden Abhandlung der Versuch gemacht, diese schwierige Lehre wenigstens in ihren ersten Elementen jenem Ziele einige Schritte näher zu führen. Es war hierbei erforderlich, zuvörderst die durch empirischmathematische Untersuchungen längst festgestellten und allgemein anerkannten Thatsachen auseinanderzusetzen. Dies ist mit einiger Eigenthümlichkeit im ersten Theile geschehen. Der zweite beschäftigt sich mit der psychologischen Bedeutung und Erklärung dieser Thatsachen. Das Wenige, was hierbei aus der mathematischen Psychologie als bekannt vorausgesetzt werden musste, liess sich in einige Lehnsätze zusammenfassen, die der mit jener Lehre nicht vertraute Leser wenigstens ihrem Inhalte nach verstehen kann und vorläufig als Rechnungshypothesen betrachten mag. Es sei erlaubt bemerklich zu machen, dass dieser zweite Theil zwar auf Herbart's Principien ruht, aber sowohl in der Anwendung derselben als in den Ergebnissen von Herbart's Theorie sich wesentlich unterscheidet und daher keine blosse Reproduction derselben ist. Was man auch über jene Principien und ihre Anwendung urtheilen möge, so viel steht jedenfalls als Thatsache fest, dass keine andere Psychologie als die Herbart'sche auch nur einen Versuch aufweisen kann, über den innern Grund der den consonirenden Intervallen entsprechenden Zahlenverhältnisse mit mathematischer Bestimmtheit Aufklärung zu geben.

---

*) Es sind hier besonders zu nennen: Psychologische Bemerkungen zur Tonlehre. 1811. (Im ersten Band des Königsberger Archivs für Philosophie etc.; abgedruckt in H's. kleineren philosophischen Schriften, herausgegeben von Hartenstein. Bd. I. S. 331.) Psychologische Untersuchungen. Heft 1. Göttingen, 1839. Ueber die Tonlehre. S. 39.

**) Vorlesungen über Anthropologie. Th. I. S. 290. Königsberg, 1824.

I.

AKUSTISCH-MUSIKALISCHE BESTIMMUNG DER INTERVALLE.

§. 1.

Als die äussere Ursache derjenigen Empfindungen, welche wir Töne nennen, kennt man längst die mit hinlänglich grosser und gleichmässiger Geschwindigkeit einander folgenden, einzeln dem Gehör nicht wahrnehmbaren Schwingungen elastischer Körper. Mit der Geschwindigkeit derselben oder, was dasselbe, mit ihrer Anzahl in einer gegebenen Zeit ändert sich der Ton, und es entstehen diejenigen Unterschiede, die wir als *Höhe* und *Tiefe* bezeichnen. Zwei gleichzeitig vernommene Töne, deren Schwingungszahlen in den einfachen Verhältnissen $1:2$, $2:3$, $3:4$, $4:5$, $5:6$ stehen, bringen Wohlklänge, *Consonanzen* hervor, von denen jede von der andern leicht unterscheidbar ist und als ein eigenthümliches angenehmes Gefühl empfunden wird, dessen Charakter sich aber schwer in Worten beschreiben lässt. Diese Tonverhältnisse führen bekanntlich beziehungsweise die Namen der *Octave, Quinte, Quarte, grossen* und *kleinen Terz* und heissen gemeinsam *consonirende Intervalle.* Octave und Quinte werden als *vollkommene,* die beiden Terzen als *unvollkommene* Consonanzen angesehen. Die Quarte bildet den Uebergang von den vollkommenen zu den unvollkommenen.

§. 2.

Nimmt man die Schwingungszahl irgend eines Tones als Einheit an, so heisst dieser Ton der *Grundton.* Man kann dann seine consonirenden Intervalle aufwärts und abwärts bestimmen und erhält hierdurch *obere* und *untere* Octaven, Quinten, Quarten und Terzen. Erstere werden dann der Reihe nach durch $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$, letztere durch $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ ausgedrückt. Zwischen beiden Reihen steht der *Einklang* $= 1$, als die Consonanz des Grundtons mit einem hinsichtlich der Schwingungszahl, folglich auch der Höhe, ihm vollkommen gleichen Ton.

§. 3.

Bestimmt man zu der obern Octave des Grundtons $= 2$ die untere Octave, so versteht sich von selbst, dass man auf den Grundton zurückkommt. Bestimmt man aber davon die untere Quinte und Quarte, indem man 2 mit $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ multiplicirt, so erhält man $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$, die Quarte und die Quinte des Grundtons. Die obere Quarte und Quinte des Grundtons ist also beziehungsweise die untere Quinte und Quarte der Octave. Bestimmt man endlich die untere kleine und grosse Terz der Octave des Grundtons, so erhält

man $\frac{8}{5}$ und $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, Intervalle, die in Beziehung auf den Grundton die *grosse* und die *kleine Sexte* heissen. Daher werden die Sexten auch *umgekehrte Terzen* genannt.

§. 4.

Bestimmt man zu der obern Octave als Grundton deren obere Octave, Quinte, Quarte, grosse und kleine Terz, so erhält man die Verhältnisszahlen $4, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{12}{5}$, beziehungsweise die Verdoppelungen, also die oberen Octaven der gleichnamigen oberen Intervalle des Grundtons; ebenso erhält man für dieselben Intervalle in Beziehung auf die zum Grundton genommene untere Octave des Grundtons $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}$, die Hälften, also die unteren Octaven der gleichnamigen Intervalle des ursprünglichen Grundtons. Da sich diese Verhältnisse offenbar in ganz gleicher Weise für jede folgende obere oder untere Octave wiederholen, so bilden die Verhältnisszahlen der gleichnamigen Intervalle in den auf einander folgenden Octaven überhaupt eine geometrische Reihe, deren Exponent oder Quotient $= 2$. Ist also i die Verhältnisszahl irgend eines Intervalls innerhalb des Bereichs der ersten obern Octave des Grundtons, so sind die Verhältnisszahlen desselben Intervalls in der 2ten, 3ten, 4ten, ... $n$ten *obern* Octave, wenn es auf denselben Grundton bezogen wird, beziehungsweise $2i$, $4i$, $8i$, $2^{n-1}i$, ebenso für die 1ste 2te 3te .... $n$te *untere* Octave beziehungsweise $\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{4}i$, $\frac{1}{8}i \dots \frac{1}{2^n}i$. Es kann daher auch allgemein das Verhältniss des, einem in der ersten obern Octave liegenden Intervall i gleichnamigen, in der $n$ten obern oder untern Octave liegenden Intervalls, in Beziehung auf den Grundton, durch $2^n i$ ausgedrückt werden, wenn man die Octave, welche wir bisher die erste obere nannten, als die *nullte* annimmt, und die bisherige 2te, 3te ... $n$te als die 1ste, 2te, ... $(n-1)$te zählt, die bisherige Zählung der untern Octaven aber beibehält. Für die letzteren ist dann nur $n = -1, -2, \dots -n$ zu setzen. Die nullte Octave kann auch die *Grundoctave* heissen.

§. 5.

Heisst die *absolute Schwingungszahl* des Grundtons a, diejenige eines Tons der Grundoctave, dessen Intervall die Verhältnisszahl i hat, y_0, so ist $y_0 = ia$. Ist daher die absolute Schwingungszahl des Tons vom gleichnamigen Intervall in der $n$ten (obern oder untern) Octave y_n, so ist, da $\frac{y_n}{a}$ die Verhältnisszahl dieses Tons zum Grundton ausdrückt, (nach §. 4), $y_n = 2^n ia = 2^n y_0$.

Man kann nun aber auch die Intervalle der Grundoctave als Einschaltungen in der geometrischen Reihe der Octaven ansehen und daher $i = 2^x$ setzen, wo also für den Grundton $x = 0$, für die nullte Octave desselben $x = 1$ ist. Dann wird allgemein x bestimmt durch

$$x = \frac{\lg i}{\lg 2}.$$

Die Gleichung für y_n geht aber dann über in

$$y_n = 2^{n+x}\,a.$$

Für die Grundoctave ist also

$$y_0 = 2^x a.$$

Es mag der Exponent x das *arithmetische Intervall* des Tones heissen, dessen *geometrisches* $= i$ ist, indem x das dem Gliede i der geometrischen Reihe, deren Quotient $= 2$, entsprechende Glied einer arithmetischen Reihe ist, deren Differenz $= 1$. Für die bereits bestimmten Intervalle finden sich folgende numerische Werthe:

		i	x
Einklang	1	$= 1{,}00000$	$0{,}00000$
kleine Terz	$\frac{6}{5}$	$= 1{,}20000$	$0{,}26304$
grosse Terz	$\frac{5}{4}$	$= 1{,}25000$	$0{,}32193$
Quarte	$\frac{4}{3}$	$= 1{,}33333$	$0{,}41503$
Quinte	$\frac{3}{2}$	$= 1{,}50000$	$0{,}58496$
kleine Sexte	$\frac{8}{5}$	$= 1{,}60000$	$0{,}67807$
grosse Sexte	$\frac{5}{3}$	$= 1{,}66667$	$0{,}73696$
Octave	2	$= 2{,}00000$	$1{,}00000$

Wie die geometrischen Verhältnisszahlen derjenigen Intervalle, die einander zur Octave ergänzen, in einander multiplicirt, stets 2 geben, so geben die arithmetischen Verhältnisszahlen derselben Intervalle, zu einander addirt, stets 1.

§. 6.

Da jeder Ton zum Grundton gemacht werden kann, so müssen auch die durch die consonirenden Intervalle bestimmten Töne wieder ihre Quinten, Quarten und Terzen haben. Dies führt zum Theil auf neue Intervalle in Beziehung auf den Grundton. Wir werden daher zu der kleinen und grossen Terz, der Quarte, Quinte und den beiden Sexten ihre oberen und unteren consonirenden Intervalle suchen, soweit sie in dem Intervall zwischen dem Grundton und seiner Octave enthalten sind. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke abkürzend der Reihe nach die geometrischen Intervalle für die kleine und grosse Terz, Quarte, Quinte, kleine und grosse Sexte durch

$$i_1,\quad i_2,\quad i_3,\quad i_4,\quad i_5,\quad i_6$$

und ebenso ihre arithmetischen Intervalle durch

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_6$$

Um das neue geometrische Intervall gegen den Grundton zu bestimmen, werden wir das Intervall, von dem wir ausgehen, wenn es um ein anderes bekanntes Intervall erhöht oder erniedrigt werden soll, mit dessen geometri-

scher Verhältnisszahl beziehungsweise zu multipliciren oder zu dividiren haben. Für die arithmetische Bestimmung sind unter denselben Voraussetzungen die Verhältnisszahlen zu addiren oder zu subtrahiren.

§. 7.

Hierdurch ergiebt sich nun mit Weglassung der Einklänge Folgendes.

1) Aus der kleinen Terz:

$i_1 . i_1 = \frac{36}{25} = 1,44000$; $x_1 + x_1 = 0,52608$, die *verminderte Quinte.*

$i_1 . i_2 = \frac{3}{2} = 1,50000$; $x_1 + x_2 = 0,58496$, die Quinte.

$i_1 . i_3 = \frac{8}{5} = 1,60000$; $x_1 + x_3 = 0,67807$, die kleine Sexte.

$i_1 . i_4 = \frac{9}{5} = 1,80000$; $x_1 + x_4 = 0,84800$, d. *grössere kl. Septime.*

$i_1 . i_5 = \frac{48}{25} = 1,92000$; $x_1 + x_5 = 0,94111$, die *verminderte Octave.*

$i_1 . i_6 = \frac{2}{1} = 2,00000$; $x_1 + x_6 = 1,00000$, die Octave.

2) Aus der grossen Terz:

$\frac{i_2}{i_1} = \frac{25}{24} = 1,04167$; $x_2 - x_1 = 0,05889$, der *kleine halbe Ton* od. die *übermässige Prime.*

$i_2 . i_2 = \frac{25}{16} = 1,56250$; $x_2 + x_2 = 0,64386$, die *übermässige Quinte.*

$i_2 . i_3 = \frac{5}{3} = 1,66667$; $x_2 + x_3 = 0,73696$, die grosse Sexte.

$i_2 . i_4 = \frac{15}{8} = 1,87500$; $x_2 + x_4 = 0,90689$, die *grosse Septime.*

$i_2 . i_5 = \frac{2}{1} = 2,00000$; $x_2 + x_5 = 1,00000$, die Octave.

3) Aus der Quarte:

$\frac{i_3}{i_1} = \frac{10}{9} = 1,11111$; $x_3 - x_1 = 0,15199$, der *kleine ganze Ton* od. d. *kleinere gr. Secunde.*

$\frac{i_3}{i_2} = \frac{16}{15} = 1,06667$; $x_3 - x_2 = 0,09311$, die *kleine Secunde.*

$i_3 . i_3 = \frac{16}{9} = 1,77778$; $x_3 + x_3 = 0,83006$, die *kleinere kl. Septime.*

$i_3 . i_4 = \frac{2}{1} = 2,00000$; $x_3 + x_4 = 1,00000$, die Octave

4) Aus der Quinte:

$\frac{i_4}{i_1} = \frac{5}{4} = 1,25000$; $x_4 - x_1 = 0,32193$, die grosse Terz.

$\frac{i_4}{i_2} = \frac{6}{5} = 1,20000$; $x_4 - x_2 = 0,26304$, die kleine Terz.

$\frac{i_4}{i_3} = \frac{9}{8} = 1,12500$; $x_4 - x_3 = 0,16993$, die *grosse Secunde,* od. der *grosse ganze Ton.*

Die oberen Intervalle der Quinte, $i_4 . i_1$, $i_4 . i_2$, $i_4 . i_3$, sind schon unter den vorhergehenden Nummern bestimmt.

5) Aus der kleinen Sexte:

$\frac{i_5}{i_1} = \frac{4}{3} = 1{,}33333$; $x_5 - x_1 = 0{,}41503$, die Quarte.

$\frac{i_5}{i_2} = \frac{32}{25} = 1{,}28000$; $x_5 - x_2 = 0{,}35614$, die *verminderte Quarte.*

$\frac{i_5}{i_3} = \frac{6}{5} = 1{,}20000$; $x_5 - x_3 = 0{,}26304$, die kleine Terz.

$\frac{i_5}{i_4} = \frac{16}{15} = 1{,}06667$; $x_5 - x_4 = 0{,}09311$, die kleine Secunde.

Die oberen Intervalle der kleinen Sexte sind ebenfalls schon im Vorigen enthalten.

6) Aus der grossen Sexte:

$\frac{i_6}{i_1} = \frac{25}{18} = 1{,}38889$; $x_6 - x_1 = 0{,}47392$, die *übermässige Quarte.*

$\frac{i_6}{i_2} = \frac{4}{3} = 1{,}33333$; $x_6 - x_2 = 0{,}41503$, die Quarte.

$\frac{i_6}{i_3} = \frac{5}{4} = 1{,}25000$; $x_6 - x_3 = 0{,}32193$, die grosse Terz.

$\frac{i_6}{i_4} = \frac{10}{9} = 1{,}11111$; $x_6 - x_4 = 0{,}15199$, der kleine ganze Ton.

$\frac{i_6}{i_5} = \frac{25}{24} = 1{,}04167$; $x_6 - x_5 = 0{,}05889$, der kleine halbe Ton.

Die oberen Intervalle der grossen Sexte sind im Vorigen enthalten. Wir haben also auf diese Weise zwölf neue Töne zwischen dem Grundton und seiner Octave bekommen, deren Benennungen in der vorstehenden Entwickelung mit Cursivschrift gedruckt sind.

§. 8.

Auch für jeden dieser zwölf neuen Töne müssen wieder die zugehörigen Terzen, Quarten und Quinten bestimmt werden. Uebergehen wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, diejenigen unter diesen Intervallen, die auf schon bestimmte Töne führen, so bleiben folgende neue Töne übrig, wobei wir die in dem vorigen §. erhaltenen in der Ordnung, wie sie sich ergaben, zum Grunde legen.

1) Aus der verminderten Quinte $= i_1^2$ oder $= 2\,x_1$:

$\frac{i_1^2}{i_2} = \frac{144}{125} = 1{,}15200$; $2x_1 - x_2 = 0{,}20415$, die *verminderte Terz.*

$\frac{i_1^2}{i_3} = \frac{27}{25} = 1{,}08000$; $2x_1 - x_3 = 0{,}11105$, zwischen der kleinen Secunde und dem kleinen ganzen Ton.

$i_1^2 . i_1 = \frac{216}{125} = 1{,}72800$; $2x_1 + x_1 = 0{,}78912$, die *grössere verminderte Septime.*

2) Aus der grössern kleinen Septime $= i_1 . i_4$ oder $= x_1 + x_4$:
$\frac{i_1 . i_4}{i_3} = \frac{27}{20} = 1{,}35000$; $x_1 + x_4 - x_3 = 0{,}43297$, zwischen der reinen und übermässigen Quarte.

3) Aus der verminderten Octave $= i_1 . i_5$ oder $= x_1 + x_5$:
$\frac{i_1 . i_5}{i_2} = \frac{192}{125} = 1{,}52800$; $x_1 + x_5 - x_2 = 0{,}61918$, zwischen der reinen und übermässigen Quinte.

4) Aus der übermässigen Prime $= \frac{i_2}{i_1}$ oder $= x_2 - x_1$:
$\frac{i_2}{i_1} . i_2 = \frac{125}{96} = 1{,}30208$; $x_2 - x_1 + x_2 = 0{,}38082$, zwischen der reinen und verminderten Quarte.

5) Aus der übermässigen Quinte $= i_2^2$ oder $= 2 x_2$:
$\frac{i_2^2}{i_3} = \frac{75}{64} = 1{,}17188$; $2 x_2 - x_3 = 0{,}22883$, die *grössere übermässige Secunde.*

$i_2^2 . i_2 = \frac{125}{64} = 1{,}95312$; $2 x_2 + x_2 = 0{,}96579$, zwischen der reinen und verminderten Octave.

6) Aus der grossen Septime $= i_2 . i_4$ oder $= x_2 + x_4$:
$\frac{i_2 . i_4}{i_3} = \frac{45}{32} = 1{,}40625$; $x_2 + x_4 - x_3 = 0{,}49186$, zwischen der übermässigen Quarte und verminderten Quinte.

7) Aus dem kleinen ganzen Ton $= \frac{i_3}{i_1}$ oder $x_3 - x_1$:
$\frac{i_3}{i_1} . i_3 = \frac{40}{27} = 1{,}48148$; $x_3 - x_1 + x_3 = 0{,}56702$, zwischen der verminderten und reinen Quinte.

8) Aus der kleinen Secunde $= \frac{i_3}{i_2}$ oder $= x_3 - x_2$:
$\frac{i_3}{i_2} . i_3 = \frac{64}{45} = 1{,}42222$; $x_3 - x_2 + x_3 = 0{,}50814$, zwischen der übermässigen Quarte und verminderten Quinte.

9) Aus der kleinern kleinen Septime $= i_3^2$ oder $= 2 x_3$:
$\frac{i_3^2}{i_4} = \frac{32}{27} = 1{,}18519$; $2 x_3 - x_4 = 0{,}24510$, zwischen der grossen übermässigen Secunde und kleinen Terz.

10) Aus der grossen Secunde $= \frac{i_4}{i_3}$ oder $= x_4 - x_3$:
$\frac{i_4}{i_3} . i_4 = \frac{27}{16} = 1{,}68750$; $x_4 - x_3 + x_4 = 0{,}75489$, zwischen der grossen Sexte und verminderten Septime.

11) Aus der verminderten Quarte $= \frac{i_5}{i_2}$ oder $= x_5 - x_2$:
$\frac{i_5}{i_2 . i_2} = \frac{128}{125} = 1{,}02400$; $x_5 - x_2 - x_2 = 0{,}03421$, zwischen dem Einklang und dem kleinen halben Ton.

$\frac{i_5}{i_2} . i_3 = \frac{128}{75} = 1{,}70667$; $x_5 - x_2 + x_3 = 0{,}70667$, die *kleinere verminderte Septime.*

12) Aus der übermässigen Quarte $= \frac{i_6}{i_1}$ oder $= x_6 - x_1$:

$\frac{i_6}{i_1 \cdot i_1} = \frac{125}{108} = 1,15740$; $x_6 - x_1 - x_1 = 0,21088$, die *kleinere übermässige Secunde.*

$\frac{i_6}{i_1} \cdot i_2 = \frac{125}{72} = 1,73611$: $x_6 - x_1 + x_2 = 0,79585$, die *übermässige Sexte.*

$\frac{i_6}{i_1} \cdot i_3 = \frac{50}{27} = 1,85186$; $x_6 - x_1 + x_3 = 0,88895$, zwischen der kleinen und grossen Septime.

§. 9.

Stellen wir jetzt sämmtliche gewonnene Intervalle nach der Grösse geordnet zusammen, so ergiebt sich folgende Tabelle:

			i	x
1) Einklang	$\frac{1}{1}$	=	1,00000;	0,00000
2) ohne Namen	$\frac{128}{125}$	=	1,02400;	0,03421
3) übermässige Prime	$\frac{25}{24}$	=	1,04167;	0,05889
4) kleine Secunde	$\frac{16}{15}$	=	1,06667;	0,09311
5) ohne Namen	$\frac{27}{25}$	=	1,08000;	0,11105
6) kleiner ganzer Ton	$\frac{10}{9}$	=	1,11111;	0,15199
7) grosse Secunde	$\frac{9}{8}$	=	1,12500;	0,16993
8) verminderte Terz	$\frac{144}{125}$	=	1,15200;	0,20415
9) kleine übermässige Secunde	$\frac{125}{108}$	=	1,15740;	0,21088
10) grosse übermässige Secunde	$\frac{75}{64}$	=	1,17188;	0,22883
11) ohne Namen	$\frac{32}{27}$	=	1,18519;	0,24510
12) kleine Terz	$\frac{6}{5}$	=	1,20000;	0,26304
13) grosse Terz	$\frac{5}{4}$	=	1,25000;	0,32193
14) verminderte Quarte	$\frac{32}{25}$	=	1,28000;	0,35614
15) ohne Namen	$\frac{125}{96}$	=	1,30208;	0,38082
16) Quarte	$\frac{4}{3}$	=	1,33333;	0,41503
17) ohne Namen	$\frac{27}{20}$	=	1,35000;	0,43297
18) übermässige Quarte	$\frac{25}{18}$	=	1,38889;	0,47392
19) ohne Namen	$\frac{45}{32}$	=	1,40625;	0,49186

			i	x
20) ohne Namen	$\frac{64}{45}$	=	1,42222;	0,50814
21) verminderte Quinte	$\frac{36}{25}$	=	1,44000;	0,52608
22) ohne Namen	$\frac{40}{27}$	=	1,48148;	0,56702
23) Quinte	$\frac{3}{2}$	=	1,50000;	0,58496
24) ohne Namen	$\frac{192}{125}$	=	1,52800;	0,61918
25) übermässige Quinte	$\frac{25}{16}$	=	1,56250;	0,64386
26) kleine Sexte	$\frac{8}{5}$	=	1,60000;	0,67807
27) grosse Sexte	$\frac{5}{3}$	=	1,66667;	0,73696
28) ohne Namen	$\frac{27}{16}$	=	1,68750;	0,75489
29) verminderte kleine Septime	$\frac{128}{75}$	=	1,70667;	0,77137
30) verminderte Septime	$\frac{216}{125}$	=	1,72800;	0,78912
31) übermässige Sexte	$\frac{125}{72}$	=	1,73611;	0,79585
32) kleinere kleine Septime	$\frac{16}{9}$	=	1,77778;	0,83006
33) grössere kleine Septime	$\frac{9}{5}$	=	1,80000;	0,84800
34) ohne Namen	$\frac{50}{27}$	=	1,85186;	0,88895
35) grosse Septime	$\frac{15}{8}$	=	1,87500;	0,90689
36) verminderte Octave	$\frac{48}{25}$	=	1,92000;	0,94111
37) ohne Namen	$\frac{125}{64}$	=	1,95312;	0,96579
38) Octave	$\frac{2}{1}$	=	2,00000;	1,00000

Die in dieser Reihe gleichweit vom Anfang und Ende entfernten Nummern ergänzen sich stets zur Octave und bewähren die Vollständigkeit der vorausgegangenen Ableitung*).

§. 10.

Offenbar könnten nun weiter auch von den in §. 8. neu aufgefundenen Tönen die zugehörigen Terzen, Quarten und Quinten aufgesucht werden. Sie würden zum Theil mit schon bekannten Tönen zusammenfallen, zum Theil abermals auf neue führen. So fortfahrend würde man genöthigt sein, unendlich viele Töne anzunehmen, von denen nur eine mässige Anzahl scharf unterscheidbar sein würde, abgesehen davon, dass jede grössere Menge derselben

*) Beiläufig mag noch bemerkt werden, dass in dieser Tabelle Nr. 11. das dis und Nr. 19. das fis der Kirnbergerschen Temperatur ist.

dem Gedächtniss beschwerlich fallen und die Sicherheit der Ausübung der Musik gefährden müsste. Hierzu kommt, dass bei den musikalischen Fortschreitungen nach consonirenden Intervallen die Rückkehr zu demselben Ton, von dem man ausgegangen, in den meisten Fällen unmöglich werden würde. Denn da, wie aus dem Vorstehenden erhellt, die wenigsten Terzen, Quarten und Quinten immer wieder auf dieselben Haupttöne fallen, vielmehr, wenn auch nahe an ihnen, doch bald höher bald tiefer liegen, so würde nur in verhältnissmässig wenigen Fällen die vollkommene Rückkehr möglich sein. Hieraus ergiebt sich die Nothwendigkeit, zum Behuf der ausübenden Musik die Zahl der Töne zu beschränken. Man kann jedoch hierbei nicht einige nach Willkühr behalten und andre wegwerfen. Vielmehr müssen die beibehaltenen so modificirt werden, dass sie die weggelassenen zu vertreten geeignet sind, ohne an ihrer Reinheit merklich zu verlieren. Dies führt auf die *Temperatur* der Intervalle.

§. 11.

Bei der Bestimmung der Temperatur werden wir uns mit Vortheil der logarithmischen Ausdrücke bedienen können, die wir die arithmetischen Intervalle genannt haben. Da die consonirenden Intervalle möglichst wenig geändert werden dürfen, so können wir zuerst ihre Näherungswerthe durch Kettenbrüche ausdrücken. Es findet sich

1) für die kleine Terz:

$$0{,}26304 = \frac{822}{3125} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{23 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}},$$

wovon die Näherungswerthe sind:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{19},\ \frac{116}{441},\ \frac{353}{1342};$$

2) für die grosse Terz:

$$0{,}32193 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19}}}}}}}}},$$

wovon die Näherungswerthe:

$$\frac{1}{3},\ \frac{9}{28},\ \frac{19}{59},\ \frac{47}{146},\ \frac{160}{497},\ \frac{367}{1140},\ \frac{1261}{3917},\ \frac{1628}{5057};$$

3) für die Quarte:

$$0{,}41503 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}}}}}}\,,$$

wovon die Näherungswerthe sind:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{17}{41},\ \frac{22}{53},\ \frac{105}{253},\ \frac{127}{306},\ \frac{486}{1171},\ \frac{3043}{7332},\ \frac{9615}{23167};$$

4) für die Quinte:

$$0{,}58496 = \frac{1828}{3125} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}\,,$$

wovon die Näherungswerthe:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{12},\ \frac{24}{41},\ \frac{31}{53},\ \frac{179}{306},\ \frac{210}{359},\ \frac{809}{1383}.$$

Auf diesen Näherungswerthen beruhen die bekannten Quinten- und Quartencirkel. Vermöge des vierten Näherungswerthes der Quinte sind nämlich 12 Quinten nahe gleich 7 Octaven, und vermöge des dritten Näherungswerthes der Quarte 12 Quarten nahe gleich 5 Octaven. Schärfer würden 41 Quinten gleich 24 Octaven und 41 Quarten gleich 17 Octaven sein.

§ 12.

Käme es nun bei der Temperatur der Intervalle nur darauf an, die gangbarsten derselben möglichst scharf in verhältnissmässig kleinen Zahlen darzustellen, so würden sich folgende Bestimmungen vor allen andern zur Annahme empfehlen.

1) Einklang, *c* $= \frac{0}{41} = 0{,}00000$

2) übermässige Prime, *cis* $= \frac{2}{41} = 0{,}04878$

3) kleine Secunde, *des* $= \frac{4}{41} = 0{,}09756$

4)	kleinere / grössere } grosse Secunde, d	$=$	$\frac{6}{41}$ / $\frac{7}{41}$	$= 0{,}14634$ / $= 0{,}17073$
5)	verminderte Terz, es^b	$=$	$\frac{8}{41}$	$= 0{,}19512$
6)	übermässige Secunde, *dis*	$=$	$\frac{9}{41}$	$= 0{,}21951$
7)	kleine Terz, *es*	$=$	$\frac{11}{41}$	$= 0{,}26829$
8)	grosse Terz, *e*	$=$	$\frac{13}{41}$	$= 0{,}31707$
9)	verminderte Quarte, *fes*	$=$	$\frac{15}{41}$	$= 0{,}36585$
10)	Quarte, *f*	$=$	$\frac{17}{41}$	$= 0{,}41463$
11)	übermässige Quarte, *fis*	$=$	$\frac{19}{41}$	$= 0{,}46341$
12)	verminderte Quinte, *ges*	$=$	$\frac{22}{41}$	$= 0{,}53659$
13)	Quinte, *g*	$=$	$\frac{24}{41}$	$= 0{,}58537$
14)	übermässige Quinte, *gis*	$=$	$\frac{26}{41}$	$= 0{,}63415$
15)	kleine Sexte, *as*	$=$	$\frac{28}{41}$	$= 0{,}68293$
16)	grosse Sexte, *a*	$=$	$\frac{30}{41}$	$= 0{,}73171$
17)	verminderte Septime, b^b	$=$	$\frac{32}{41}$	$= 0{,}78049$
18)	übermässige Sexte, *ais*	$=$	$\frac{33}{41}$	$= 0{,}80488$
19)	kleinere / grössere } kleine Septime, b	$=$	$\frac{34}{41}$ / $\frac{35}{41}$	$= 0{,}82927$ / $= 0{,}85366$
20)	grosse Septime, *h*	$=$	$\frac{37}{41}$	$= 0{,}90244$
21)	verminderte Octave, *ces*	$=$	$\frac{39}{41}$	$= 0{,}95122$
22)	Octave, $\bar{c}$	$=$	$\frac{41}{41}$	$= 1{,}00000$

In dieser Temperatur entsprechen die oberen und unteren consonirenden Intervalle des Einklangs und der Octave, der übermässigen Prime und verminderten Octave, der beiden Terzen und Sexten, der Quarte und der Quinte sämmtlich den hier gegebenen abgekürzten Bestimmungen. Dagegen trifft die obere Quarte der kleinen Secunde und die untere Quarte der grossen Septime nicht genau auf eins der hier bestimmten Intervalle und muss daher entweder um $\frac{1}{41}$ zu hoch oder zu niedrig genommen werden. Dasselbe gilt von den Quarten der kleinern grossen Secunde und grössern kleinen Septime, von den Terzen und Quinten der grössern grossen Secunde und der kleinern kleinen Septime, von den grossen Terzen und Quinten der verminderten Terz und übermässigen Sexte, endlich von der kleinen Terz der übermässigen Secunde und der verminderten Septime. Die Temperatur ist daher eine *ungleich schwebende*.

§. 13.

Um aber die musikalischen Bedingungen einer Temperatur überhaupt und insbesondere einer *gleichschwebenden,* als einer solchen, in welcher alle gleichnamigen Intervalle gleiche Grösse haben, genauer kennen zu lernen, ist es nöthig, auf die consonirenden Verhältnisse *dreier* Töne, die *harmonischen Dreiklänge* oder *Accorde* Rücksicht zu nehmen. Bekanntlich versteht man unter einem Dreiklang eine solche Verbindung von drei gleichzeitigen Tönen, in welcher je zwei derselben eins der vier consonirenden Intervalle, der kleinen Terz, grossen Terz, Quarte oder Quinte bilden. Offenbar können nur die consonirenden Intervalle selbst oder ihre Umkehrungen in eine solche Verbindung eingehen. Schreiben wir daher diese Intervalle, mit Ausschluss der Octave, in eine Reihe, so erhalten wir folgende sieben Elemente möglicher Accorde:

$$1\,,\ \frac{6}{5}\,,\ \frac{5}{4}\,,\ \frac{4}{3}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{8}{5}\,,\ \frac{5}{3}\,.$$

Aus ihnen ergeben sich im Ganzen 35 Verbindungen zu dreien, von denen jedoch nur folgende sechs den angegebenen Charakter eines Accords an sich tragen:

1) $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6$, der Duraccord,

2) $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$, der Mollaccord,

3) $1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5} = 5 : 6 : 8$, der kleine Sextenaccord,

4) $1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3} = 12 : 15 : 20$, der grosse Sextenaccord,

5) $1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5} = 15 : 20 : 24$, der kleine Quart-Sextenaccord,

6) $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 4 : 5$, der grosse Quart-Sextenaccord.

In dem ersten dieser Accorde bildet also die grosse Terz mit der kleinen eine Quinte, in dem zweiten umgekehrt die kleine mit der grossen Terz eine Quinte. Im dritten und vierten bilden die kleine und grosse Terz bezüglich mit der Quarte eine kleine und grosse Sexte. Im fünften und sechsten endlich ist das untere Intervall eine Quarte, die durch eine kleine und grosse Terz beziehungsweise zur kleinen und grossen Sexte ergänzt wird. Hieraus erhellt, dass in jeder Temperatur, wenn sie der Accorde fähig sein soll, *kleine und grosse Terz zusammengenommen immer der Quinte gleich,* oder, da diese die Ergänzung der Quarte zur Octave ist, *die beiden Terzen mit der Quarte zusammen genau der Octave gleich sein müssen.* Da die Sexten umgekehrte Terzen sind, so folgt dann von selbst, dass die kleine Terz mit der Quarte eine kleine Sexte, die grosse Terz mit der Quarte eine grosse Sexte giebt.

§. 14.

Nehmen wir zu den drei Tönen des Dreiklangs als vierten noch die Octave des Grundtons hinzu, so wird der Umfang der Octave in den sechs Grundaccor-

den immer in zwei Terzen und eine Quarte nach allen möglichen Versetzungen zerlegt, nämlich in folgender Ordnung. Es ist die Octave

1) im Duraccord = gr. Terz + kl. Terz + Quarte,
2) im Mollaccord = kl. Terz + gr. Terz + Quarte,
3) im kleinen Sextenaccord = kl. Terz + Quarte + gr. Terz,
4) im grossen Sextenaccord = gr. Terz + Quarte + kl. Terz,
5) im kleinen Quart-Sextenaccord = Quarte + kl. Terz + gr. Terz,
6) im grossen Quart-Sextenaccord = Quarte + gr. Terz + kl. Terz.

Die Verhältnisszahlen dieser drei Intervalle sind dann beziehungsweise

(1) 4 : 5 : 6 : 8
(2) 10 : 12 : 15 : 20
(3) 5 : 6 : 8 : 10
(4) 12 : 15 : 20 : 24
(5) 15 : 20 : 24 : 30
(6) 3 : 4 : 5 : 6.

Als gemeinschaftliches Merkmal der drei Duraccorde (1), (3), (6), giebt sich zu erkennen, dass in ihnen immer drei aufeinander folgende Verhältnisszahlen in *stetiger arithmetischer* Proportion stehen, nämlich in (1) die drei ersten, in (3) die drei letzten, in (6) sowohl die drei ersten als die drei letzten. Ebenso ergiebt sich als gemeinsamer Charakter der drei Mollaccorde (2), (4), (5), dass in ihnen immer drei aufeinander folgende Verhältnisszahlen in *stetiger harmonischer* Proportion stehen. In (2) ist nämlich

$$15 - 12 : 12 - 10 = 15 : 10$$
und $$20 - 15 : 15 - 12 = 20 : 12.$$

In (4) findet nur das zweite dieser Verhältnisse statt. In (5) endlich ist

$$30 - 24 : 24 - 20 = 30 : 20.$$

Bekanntlich trägt die harmonische Proportion von dieser Anwendung ihren Namen.

§. 15.

Der in §. 13. gefundenen Bedingung, dass die beiden Terzen mit der Quarte zusammengenommen die Octave geben sollen, wird nun Genüge geleistet, wenn wir von den in §. 11. berechneten Näherungswerthen, für die kleine Terz den zweiten $= \frac{1}{4}$, für die grosse Terz den ersten $= \frac{1}{3}$, für die Quarte den dritten $= \frac{5}{12}$ und für die Quinte den vierten $= \frac{7}{12}$ annehmen.

Dann nämlich findet sich, wenn wir sie, auf gleiche Benennung gebracht, bezüglich $= \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ setzen,

1) für die kleine Terz:
ihre kleine Terz $= \frac{6}{12}$, ihre grosse Terz $= \frac{7}{12}$, ihre Quarte $= \frac{8}{12}$,
ihre Quinte $= \frac{10}{12}$;

2) für die grosse Terz:
ihre kleine Terz $= \frac{7}{12}$, ihre grosse Terz $= \frac{8}{12}$, ihre Quarte $= \frac{9}{12}$,
ihre Quinte $= \frac{11}{12}$; ihre untere kleine Terz $= \frac{1}{12}$;

3) für die Quarte:
ihre kleine Terz $= \frac{8}{12}$, ihre grosse Terz $= \frac{9}{12}$, ihre Quarte $= \frac{10}{12}$;
ihre untere kleine Terz $= \frac{2}{12}$, ihre untere grosse Terz $= \frac{1}{12}$;

4) für die Quinte:
ihre kleine Terz $= \frac{10}{12}$, ihre grosse Terz $= \frac{11}{12}$;
ihre untere kleine Terz $= \frac{4}{12}$, ihre untere grosse Terz $= \frac{3}{12}$,
ihre untere Quarte $= \frac{2}{12}$.

Man gelangt zu demselben Resultat auch ohne für die consonirenden Intervalle bestimmte Näherungswerthe anzunehmen. Bezeichnen wir die temperirte kleine und grosse Terz, Quarte und Quinte der Reihe nach durch x', x'', x''', x'''', so ist

1) für die kleine Terz:
ihre kleine Terz $= 2x'$, ihre grosse Terz $= x' + x''$,
ihre Quarte $= x' + x'''$, ihre Quinte $= x' + x''''$:

2) für die grosse Terz:
ihre kleine Terz $= x'' + x'$, ihre grosse Terz $= 2x''$,
ihre Quarte $= x'' + x'''$, ihre Quinte $= x'' + x''''$;
ihre untere kleinere Terz $= x'' - x'$;

3) für die Quarte:
ihre kleine Terz $= x''' + x'$, ihre grosse Terz $= x''' + x''$,
ihre Quarte $= 2x'''$, ihre Quinte $= x''' + x''''$;
ihre untere kleine Terz $= x''' - x'$, ihre untere grosse Terz $= x''' - x''$;

4) für die Quinte:
ihre kleine Terz $= x'''' + x'$, ihre grosse Terz $= x'''' + x''$,
ihre Quarte $= x'''' + x'''$;
ihre untere kleine Terz $= x'''' - x'$, ihre untere grosse Terz $= x'''' - x''$,
ihre untere Quarte $= x'''' - x'''$.

Setzen wir nun von diesen Intervallen diejenigen gleich, die sich oben unter einer besondern Annahme als gleich ergeben haben, so erhalten wir ausser den identischen Gleichungen folgende zwei:

$$x' + x''' = 2x'' \quad \text{und} \quad x'''' + x' = 2x'''.$$

Es muss aber ausserdem, wie wir sahen, immer sein

$$x' + x'' = x'''' \quad \text{und} \quad x''' + x'''' = 1.$$

Sucht man aus diesen vier Gleichungen den Werth der vier unbekannten Grössen, so findet sich leicht

$$x' = \frac{3}{12}, \quad x'' = \frac{4}{12}, \quad x''' = \frac{5}{12}, \quad x'''' = \frac{7}{12},$$

wie zuvor.

§. 15.

Auf diesem doppelten Wege erhält man also die zwölf Töne der gleichschwebenden Temperatur, deren geometrische und arithmetische Intervalle wir jetzt übersichtlich zusammenstellen.

		i			x
Einklang, *c*	=	1,00000;	$\frac{0}{12}$	=	0,00000
kleine Secunde, *cis*	=	1,05946;	$\frac{1}{12}$	=	0,08333
grosse Secunde, *d*	=	1,12246;	$\frac{2}{12}$	=	0,16667
kleine Terz, *dis*	=	1,18921;	$\frac{3}{12}$	=	0,25000
grosse Terz, *e*	=	1,25992;	$\frac{4}{12}$	=	0,33333
Quarte, *f*	=	1,33484;	$\frac{5}{12}$	=	0,41667
falsche Quinte *fis*	=	1,41421;	$\frac{6}{12}$	=	0,50000
reine Quinte, *g*	=	1,49831;	$\frac{7}{12}$	=	0,58333
kleine Sexte, *gis*	=	1,58740;	$\frac{8}{12}$	=	0,66667
grosse Sexte, *a*	=	1,68179;	$\frac{9}{12}$	=	0,75000
kleine Septime, *b*	=	1,78182;	$\frac{10}{12}$	=	0,83334
grosse Septime, *h*	=	1,88775;	$\frac{11}{12}$	=	0,91667
Octave $\bar{c}$	=	2,00000;	$\frac{12}{12}$	=	1,00000

In der gleichschwebenden Temperatur ist also das Verhältniss

des Grundtons zur kleinen Terz = 5 : 5,94605 anstatt 5 : 6
des Grundtons zur grossen Terz = 4 : 5,03968 anstatt 4 : 5
des Grundtons zur Quarte = 3 : 4,00452 anstatt 3 : 4
des Grundtons zur Quinte = 2 : 2,99662 anstatt 2 : 3

Die Verhältnisse der Töne in den sechs Accorden (§. 13.) modificiren sich aber wie folgt. Es wird das Verhältniss

des Duraccords = 4 : 5,03968 : 5,99324
des Mollaccords = 10 : 11,89210 : 14,98310

des kleinen Sextenaccords	=	5 :	5,94605 :	7,93700
des grossen Sextenaccords	=	12 :	15,11904 :	20,18148
des kleinen Quart-Sextenaccords	=	15 :	20,02260 :	23,81100
des grossen Quart-Sextenaccords	=	3 :	4,00452 :	5,04537

In mehreren Accorden weicht also für die gleichschwebende Temperatur das Verhältniss der consonirenden Intervalle auf ziemlich beträchtliche Weise von den akustisch bestimmten Grundverhältnissen ab. Da sie gleichwohl auch nach der gleichschwebenden Temperatur sowohl einzeln als zu Accorden verbunden noch immer Wohlklang hervorbringen, so ist der Grund dieses Wohlklangs schwerlich in dem regelmässigen periodischen Zusammenfallen der Schwingungen zu suchen*), obgleich nicht in Abrede gestellt werden kann, dass namentlich das Schwirren allzuweit von der akustischen Reinheit sich entfernender Tonverbindungen auf diesen physikalischen Grund zurückzuführen ist.

II.

PSYCHOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE INTERVALLE.

§. 17.

Die psychologische Untersuchung über die Töne und ihre Verhältnisse hat es nicht mit ihren äusseren Ursachen, den Schwingungen tönender Körper, sondern mit dem *Empfindungen* zu thun, welche die ersteren in uns hervorbringen, und mit den *Vorstellungen*, welche diese in der Seele zurücklassen. Ohne Zweifel hängen diese Vorstellungen und Empfindungen mit ihren objectiven Ursachen zusammen, und die numerisch bestimmte Kenntniss dieser Ursachen wird benutzt werden müssen, um mit ähnlicher Bestimmtheit die Unterschiede und Verhältnisse ihrer Wirkungen aufzuklären. Es würde aber voreilig sein, die Schwingungszahlen ohne weiteres als den adäquaten Ausdruck der Empfindungen zu betrachten, da nur soviel fest steht, dass das quantitativ Bestimmbare an diesen letzteren eine *Function* der Schwingungszahlen sein muss. Eine wesentliche Verschiedenheit zwischen dem Inhalt der Ton-Empfindungen und Vorstellungen und den Tonursachen gibt sich unmittelbar zu erkennen. Wir empfinden die Töne innerhalb bestimmter, durch die Organisation unsers Gehörs gesetzter Grenzen, aber oberhalb und unterhalb dieser Grenzen gibt es noch Schwingungen, die zu langsam oder zu schnell sind, als dass sie von unserm Ohre als Töne vernommen würden. Einer andern Orga-

*) Die Einwürfe gegen diese Ansicht hat in sehr einleuchtender Weise von Baer (a. a. O. S. 284) zusammengestellt; vergl. Herbart's kleine philos. Schriften. Bd. I. S. 334 ff.

nisation können sie aber gar wohl ebenfalls als solche erscheinen. Es gäbe also dann im objectiven Sinne noch Töne, wo im subjectiven Sinne, für uns, keine mehr vorhanden sind, und es reichte die objective Tonreihe nach beiden Seiten über die Reihe der subjectiven Tonempfindungen hinaus. Innerhalb der Grenzen vernehmbarer Töne gehen unsere Empfindungen derselben in stetiger, unmerklicher Weise in einander über, der Unterschied ihrer Ursachen ist aber immer durch eine discrete Grösse, durch die Differenz der Schwingungszahlen angeblich. Empfänden wir die einzelnen Schwingungen, so würde die Stetigkeit der Tonempfindungen aufhören, und die höheren Octaven würden eine reichere Mannigfaltigkeit unterscheidbarer Töne darbieten als die tieferen. Denken wir uns aber ein Ohr, für welches jede auch noch so grosse und noch so kleine Anzahl von Schwingungen eine Tonempfindung hervorbrächte, so würde sich für dieses Ohr die Anzahl der Töne nach oben hin ins Unendliche vermehren, nach unten hin aber bald ihre endliche Begrenzung finden; denn wenn wir bei 32 Schwingungen noch einen Ton empfinden, so möchte dies für ein solches Ohr auch bei 8, 4, 2 Schwingungen der Fall sein; aber hier wäre auch die absolute Grenze erreicht. Für die *allgemeine Vorstellung* der Töne, die sich um die Begrenzung der physischen Bedingungen, unter welchen sie entstehen, nicht zu kümmern hat, ist jedoch eine solche einseitige Grenze nicht vorhanden, vielmehr die Reihe der Töne nach beiden Seiten hin eine schlechthin *unbegrenzte;* es hindert uns nichts, die Tiefe wie die Höhe der Töne ins Unbegrenzte wachsend *vorzustellen.*

§. 18.

Der erste und einfachste Gedanke über den Zusammenhang der Tonempfindungen und Tonvorstellungen mit ihren äusseren Ursachen wäre nun allerdings der, anzunehmen, dass die Seele zwar nicht die einzelnen Schwingungen percipire, ebensowenig von ihren Mengen einen bestimmten Zahlbegriff sich bilde, wohl aber einen *anschaulichen Gesammteindruck* von ihnen erhalte. Als einfachstes Bild eines solchen Eindrucks würde sich eine gerade Linie von bestimmter Länge darbieten. Dächte man nun eine solche Linie als die Repräsentantin des Grundtons und nähme sie zur Einheit, so würde die Octave als eine doppelt so lange Linie, die Quinte als das $\frac{3}{2}$-fache, die Quarte als das $\frac{4}{3}$-fache derselben u. s. f. sich darstellen. Das Wohlgefallen an den Consonanzen würde dann auf der Fähigkeit der Seele beruhen, die einfachsten dieser Verhältnisse mit Sicherheit zu erkennen, das Missfallen an den Dissonanzen auf der Unerkennbarkeit des Zahlverhältnisses der sie bestimmenden Töne. Das erstere würde sich als ein Lustgefühl, als Freude an der Fasslichkeit der Verhältnisse, das letztere als Unlust, Verdruss über ihre Unfasslichkeit zu erkennen geben. In der That befriedigen auch nur die consonirenden Intervalle und tragen daher in gewissen Abstufungen den Charakter der Ruhe, der den unbefriedigenden, unruhigen Dissonanzen gänzlich fehlt.

§. 19.

Gesetzt nun, diese Erklärung sei richtig, so würde jedenfalls noch eine zweite hinzukommen müssen, die nämlich, inwiefern diese Verstandesoperation des Vergleichens der Töne nach quantitativen Bestimmungen in den *Gefühlen*, welche die Consonanzen begleiten, erkennbar sei. Denn dass wir, auch wenn wir die Gefühle des Wohlgefallens an den Consonanzen und des Missfallens an den Dissonanzen zu analysiren versuchen, uns solcher Vergleichungen wie die angegebenen nicht bewusst werden, ist Thatsache. Es würde aber zu einer sehr mystischen Psychologie führen, wenn man annehmen wollte, die Seele sei in einem unbewussten Zustande fähig, Verhältnisse zu erkennen, die sie mit aller Anstrengung im bewussten in sich zu beobachten nicht vermag. Es hiesse dies, die gesunde natürliche Ansicht auf den Kopf stellen und behaupten, dass das im Bewusstsein Enthaltene das Dunkele und Unbestimmte sei, und die Seele nur dann, wenn sie sich ihrer nicht bewusst ist, ihre höchste Erkenntnisskraft ausübe. Ist nun auch eine solche Behauptung in der Lehre von der intellectuellen Anschauung zu verschiedenen Zeiten aufgestellt worden, so heisst dies doch nie etwas anders als, auf klare wissenschaftliche Erkenntniss Verzicht leisten und der Schwärmerei der Phantasie Thür und Thor öffnen. Es ist wol richtig, dass Erfinder und Entdecker, bevor sie sich ihrer Ideen klar bewusst werden, dunkle Vorgefühle haben; aber es ist kein Grund vorhanden, diese für den Ausdruck eines bereits *fertigen,* in der Tiefe der Seele bisher schlummernden oder ihr irgend woher auf übernatürliche Weise mitgetheilten Gedankens zu halten. Die nüchterne natürliche Ansicht führt vielmehr nur dahin, dass sich in einem solchen Vorgefühl ein *werdender* Gedanke offenbare, der eben dann erst geworden ist, wenn er klar ins Bewusstsein tritt, und dass eine Gedankencombination im Entstehen ist, die als eine *gültige* sich erst ausweist, wenn wir uns ihrer und ihrer Beziehungen klar und deutlich bewusst werden.

§. 20.

Solcher messenden oder schätzenden Vergleichungen der Höhe der Töne, wie sie sich auf ihre Schwingungszahlen oder deren Totaleindrücke gründen müssten, sind oder werden wir uns aber auf keine Weise bewusst, selbst dann nicht, wenn wir zur Erkenntniss gekommen sind, dass jene Schwingungsmengen die objectiven Ursachen unserer subjectiven Tonempfindungen repräsentiren. Dagegen ist es nicht eine zufällig gewählte Metapher, dass wir von Höhe und Tiefe der Töne reden, vielmehr der adäquate Ausdruck der unmittelbaren Vergleichung derselben. Höhe und Tiefe drücken aber nicht absolute Grössen oder Längen, sondern *Abstände* aus, welche durch eine Zahlenreihe repräsentirt werden, deren Anfang nicht die Einheit, sondern die Null ist, und wobei es sich unmittelbar nicht um Quotienten, sondern um Differenzen, nicht um geometrische, sondern um arithmetische Verhältnisse handelt. Alle unsere intensiven Grössenschätzungen sind *zunächst* und *unmittelbar* von dieser Art. Wir

mögen nun Intensitäten des Lichts oder der Wärme, der Schwere oder der Härte, der Töne oder der Gerüche unter einander vergleichen, wenn wir die eine Empfindung stärker, die andere schwächer finden, so ist dies nie etwas anderes als die Behauptung eines additiven oder subtractiven Mehr oder Weniger, nicht die Erkenntniss des Wievielfachen oder des Wievielten, von der wir meistens erst durch ziemlich verwickelte wissenschaftliche Betrachtungen, also durch Schlüsse, eine Vorstellung erhalten. Nun ist zwar die Stärke der Töne von ihrer Höhe gänzlich verschieden, und letztere nicht eine quantitative, eine Gradbestimmung ihrer Qualität, sondern eine Relation zwischen den Tonqualitäten, die quantitativer Schätzung zugänglich ist, aber diese Schätzung ist unmittelbar eben nur eine comparative des Höheren und Tieferen, wie bei der Beurtheilung grösserer oder kleinerer Intensitäten, eine Schätzung von Differenzen, nicht von Quotienten.

§. 21.

Wir sprechen in der That nur eine bekannte Thatsache aus, wenn wir sagen, das musikalische Gehör unterscheide in den Intervallen überhaupt die grösseren oder kleineren *Abstände* der Töne von einem angenommenen Grundton. Die *Tonleiter* mit ihrem ganzen und halben Tönen spricht dafür; es ist eine stufenweise Erhebung über den Grundton, die wir empfinden, wenn wir sie aufwärts durchlaufen, und eine allmälige Wiederannäherung an denselben, wenn wir irgendwo in ihr umkehren und in ihr wieder herabsteigen. Niemand empfindet hier Verhältnisse wie 1 : 2, 2 : 3 u. s. f., sondern nur ein Mehr oder Weniger der Entfernung, für welches wir durch Uebung allmälig die Einheit des ganzen Tons und seine beiläufige Hälfte als Maass festhalten lernen. Wissenschaftlich ausgedrückt heisst dies nun nichts anders als: *Das musikalische Gehör unterscheidet nicht die geometrischen, sondern die arithmetischen Intervalle der Töne;* nach unserer früheren Bezeichnung (§. 5.) nicht die Grösse i, sondern die Grösse x. Es ist dies, wie wir sehen, dieselbe, welche angenähert durch die Zwölftel der gleichschwebenden Temperatur ausgedrückt wird, und deren sich die praktische Musik allein bedient, indess sie von den Verhältnissen der Schwingungszahlen keinen Gebrauch macht.

§. 22.

Da $x = \frac{\lg i}{\lg 2}$, wo i das akustische Verhältniss der Schwingungszahlen bedeutet, die Wahl des Logarithmensystems in diesem Ausdruck aber ganz beliebig ist, so wird die einfachste Annahme sein, die Logarithmen der Basis 2 zu gebrauchen. Dann ist $x = \lg i$. Man kann daher den Satz des vorigen §. auch so ausdrücken: *Das musikalische Gehör unterscheidet nicht die geometrischen Verhältnisse der Schwingungszahlen, sondern die Logarithmen dieser Verhältnisse.* Dieser Ausdruck klingt paradox. Denn, indess wir die geometrischen Verhältnisse der Schwingungszahlen für zu schwierig erklärten, um der unmittelbaren Vergleichung erkennbar zu sein, substituiren wir ihnen jetzt

einen noch weit tiefer liegenden, nur durch die Wissenschaft erzeugten, dem gemeinen Bewusstsein fremd bleibenden Grössenbegriff. Dies bedarf also einer näheren Aufklärung.

§. 23.

In den *Empfindungen* der Töne liegt, wenn wir, wie hier durchgängig geschieht, von der möglichen Verschiedenheit ihrer Intensität absehen und nur gleichstarke Töne miteinander vergleichen, unmittelbar gar nichts Quantitatives. Erst durch Schlüsse erkennen wir, dass die äusseren Ursachen der Töne Schwingungen in bestimmter Anzahl sind. Die Töne als Empfindungen stellen sich vielmehr als eine Reihe stetig ineinander übergehender *Qualitäten* dar, in ähnlicher Weise wie auch im Gebiet der Farben von Gelb zu Blau eine unendliche Menge von Abstufungen des Grünen, oder vom Gelb zum Roth des Orangen einen stetigen Uebergang vermittelt. Wir empfinden also *qualitative* Unterschiede, diese jedoch in sehr verschiedenen Abstufungen; wir unterscheiden also *Grade* der Verschiedenheit. Bei sehr nahe liegenden Tonempfindungen ist dieser Grad sehr klein, mit der grössern Entfernung wächst er. Ob er irgendwo in die Einheit übergeht und damit sein Maximum erreicht, soll weiterhin untersucht werden. Mit der *Vergleichung* der Tonempfindungen findet sich also allerdings eine Grössenbestimmung ein, deren Beziehung zu den Schwingungszahlen wir uns jedoch keineswegs bewusst sind. Jede Vergleichung beruht aber, wenn man sie näher zergliedert, auf der Unterscheidung von *Gleichem* und *Ungleichem* oder *Entgegengesetzten* in dem Verglichenen. Nun nehmen wir zwar an unsern einzelnen Empfindungen der Töne etwas Zusammengesetztes, Mannichfaltiges nicht wahr. Wollen wir aber die Thatsache, dass wir sie als verschiedene, einander näher oder entfernter verwandte wahrnehmen, in einen Begriff fassen, so müssen wir die Qualitäten der Tonempfindungen *in Gedanken in Gleiches und Ungleiches zerlegen,* und werden dann sagen können, dass die nahe verwandten, also nur wenig unterschiedenen Töne des Gleichen mehr als des Ungleichen, die nur entfernt verwandten umgekehrt des Ungleichen mehr als des Gleichen besitzend gedacht werden müssen. Da nun alle mögliche Verhältnisse zwischen dem Quantum des Gleichen und dem des Ungleichen angenommen werden können, so erlangen wir hierdurch einen allgemeinen Begriff, durch den wir jeden erkennbaren Unterschied der Qualität der Töne aus den quantitativen Verhältnissen des Gleichen und Ungleichen in ihnen auszudrücken vermögen. Die Qualität wird also hier als eine Einheit dargestellt, welche als die Summe zweier ächten Brüche zu denken ist, deren einer den *Grad der Gleichheit,* der andre den *Grad der Ungleichheit* der verglichenen Tonempfindungen bezeichnet.

§. 24.

Der Grad der Ungleichheit der Qualitäten der Tonempfindungen ist nun nichts andres als das, was wir bisher das arithmetische Intervall der Töne ge-

nannt und durch $x = \frac{\lg i}{\lg 2} = \log i$, (bas $= 2$), ausgedrückt haben. Diese Grösse ist $= 0$ für den Einklang, nimmt zu mit der Grösse der Intervalle und erreicht den Werth der Einheit mit der Octave, die sich hiernach als das Intervall der grössten Ungleichheit der Töne darstellt. Dies, sowie die Frage, was nun der Werth von x, sofern er über die Octave hinaus weiter ins Unendliche wächst, zu bedeuten habe, bedarf einer besondern Erörterung. Für jetzt aber genügt es zu bemerken, dass wir uns der logarithmischen Abhängigkeit der Grösse x von den Schwingungszahlen bei der Vergleichung der Tonempfindungen zwar nicht bewusst werden, dass wir aber auf den Begriff dieser Grösse überhaupt, als eines echten Bruches, durch welchen der Grad der Ungleichheit und damit der Grund der Verschiedenheit von zwei verglichenen Tonempfindungen ausgedrückt wird, mit Nothwendigkeit kommen, sobald wir uns über diese Verschiedenheit durch Denken Rechenschaft zu geben versuchen. Es folgt aus dem Vorstehenden von selbst, dass der Grad der Gleichheit eines Tons mit dem angenommenen Grundton durch $1 - x$ ausgedrückt wird.

§. 25.

Als Einschaltung mag in Beziehung auf die Bestimmung von x noch Folgendes bemerkt werden. Bedeuten $\triangle x$ und $\triangle i$ bezüglich Aenderungen von x und i, die, obwohl nicht verschwindend klein, doch so klein sein mögen, dass ihre zweiten und höhern Potenzen vernachlässigt werden können, so folgt aus der Gleichung $x = \lg i$, (bas $= 2$) bekanntlich $\triangle x = \frac{\triangle i}{i . \lg \text{ nat } 2}$ $= 1{,}44207 . \frac{\triangle i}{i}$. Setzt man nun hier $\triangle i = i' - i$, wo also i' das geometrische Intervall zwischen einem benachbarten höhern Ton und dem Grundton ist, so zeigt sich, dass die Aenderung des Intervalls i der Grösse $\frac{i' - i}{i}$ direct proportional ist. Setzen wir nun wieder, wie oben, $i = \frac{y_0}{a}$, und ebenso $i' = \frac{y'_0}{a}$, wo a, y_0, y'_0 beziehungsweise die Schwingungszahlen des Grundtons und der Töne von den Intervallen i und i' sind, so findet sich $\triangle x$ proportional $\frac{y'_0 - y_0}{y_0}$. Setzen wir für y_0 der Reise nach c, f, a, wo diese Buchstaben die Schwingungszahlen der durch sie bezeichneten Töne bedeuten, in demselben Sinne d, g, h für y'_0, so ergiebt sich

$$\frac{d-c}{c} = \frac{g-f}{f} = \frac{h-a}{a} = \frac{1}{8}, \text{ der grosse ganze Ton, ebenso}$$

$$\frac{e-d}{d} = \frac{a-g}{g} = \frac{1}{9}, \text{ der kleine ganze Ton,}$$

$$\frac{f-e}{e} = \frac{\bar{c}-h}{h} = \frac{1}{15}, \text{ der halbe Ton.}$$

Der Unterschied zweier benachbarter Intervalle, den das Gehör vernimmt, ist also, wenn er klein genug, *proportional dem durch die Schwingungszahl des niedrigeren von beiden Tönen gemessenen Unterschied der Schwingungszahlen dieser Töne.*

§. 26.

Das in §. 24. erhaltene Resultat, vermöge dessen sich die Octave als das Intervall der grössten Ungleichheit der Töne darstellt, scheint im Widerspruch mit der musikalischen Erfahrung zu stehen, welche vielmehr der Octave eine an Einerleiheit gränzende Aehnlichkeit mit dem Grundton beilegt und deshalb dieses Intervall als das nächste und leichtfasslichste nach dem Einklang betrachtet. In der That steht diese Erfahrung jener Bestimmung entgegen, nach welcher wir, wenn wir uns der Sprache der Aristotelischen Logik bedienen, die Octave als den Ton bezeichnen müssen, der zu dem Grundton den *conträren Gegensatz* bildet, indem beide die äussersten Enden der zwischen ihnen liegenden Reihe von Tönen sind. Aber diese Ansicht lässt sich ebensowenig zurücknehmen, denn es ist Thatsache, dass vom Grundton bis zu der Octave die Höhe fortwährend zunimmt. Stehen demnach beide Behauptungen gleich fest, so muss die Octave in *anderer Beziehung* dem Grundton ähnlich sein, als sie ihm conträr entgegengesetzt ist, und wird überhaupt die Verwandschaft der Töne ausser ihrem Höhenunterschied noch einer besondern Erklärung bedürfen. Diese ergiebt sich nun ganz einfach durch folgende Bemerkung. Zwei völlig gleiche Töne werden nur als Ein Ton empfunden; minder gleiche zwar als zwei, aber doch noch in einem gewissen *Zusammenhang*. Jemehr des Ungleichen im Verhältniss zum Gleichen mit dem Grundton ein Ton enthält, um so mehr Grund zur *gesonderten* Auffassung der Töne ist gegeben. Vollkommen kann diese aber erst dann eintreten, wenn das Gleiche neben dem Ungleichen oder Entgegengesetzten gänzlich verschwindet. Hiernach ist die Octave aufzufassen als dasjenige Intervall, bei dem *zuerst* der höhere Ton von dem Grundton *sich völlig sondert* und neben diesem als ein zweiter *vollkommen selbstständiger* Ton erscheint; indess bei den kleineren Intervallen die Töne, vermöge des Gleichen mit dem Grundton, in einer gewissen *Abhängigkeit* von ihm bleiben, von der sie sich durch ihr Entgegengesetztes zu dem Grundton nicht ganz zu befreien vermögen. Die Aehnlichkeit der Octave mit dem Grundton beruht hiernach auf der *gleichen Selbstständigkeit* wie dieser, also nicht auf der Gleichheit des Inhalts, der Qualität, welche vielmehr eine rein verschiedene ist, sondern auf der *Gleichheit der Setzung,* gleichsam auf der Ebenbürtigkeit beider Töne. Zwei Töne, die um das Intervall einer Octave von einander entfernt sind, können daher als *coordinirte* Töne, die zwischenliegenden dagegen als ihnen *subordinirt* betrachtet werden. Die Octave ist demnach in Beziehung auf den Grundton als der erste *schlechthin andere, absolut verschiedene, von diesem gänzlich unabhängige und gleich selbstständige Ton* zu betrachten, die zwischenliegenden Töne dagegen sind nur *relativ* verschiedene, vom Grundton und seiner Octave mehr oder weniger *abhängige.*

§. 27.

Ist die Octave vom Grundton rein verschieden ohne alle Gleichheit, jeder mittlere Ton aber als aus Gleichem und Ungleichem zum Grundton zusammengesetzt anzusehen, so ist dieses Ungleiche als das Gleiche mit der Octave, so-

wie das Gleiche mit dem Grundton als das Ungleiche, Entgegengesetzte der Octave zu betrachten. Hiernach muss in demselben Maasse, in welchem die Gleichheit mit dem Grundton abnimmt, die Gleichheit mit der Octave zunehmen, und in demselben Maasse, in welchem die Abhängigkeit vom Grundton sich vermindert, die von der Octave wachsen, und, je nachdem die eine oder die andere Abhängigkeit vorherrscht, der Grundton oder die Octave als Beziehungspunkt fühlbar werden. In der That fühlen wir beim Aufsteigen in der Tonleiter in der ersten Hälfte des Octavenumfangs mehr die zunehmende Entfernung vom Grundton, in der zweiten mehr die zunehmende Annäherung an die Octave. Auch erklärt sich durch diese Vertauschung des Beziehungspunktes der Töne, warum wir die Sexten wie umgekehrte Terzen, die Septimen wie umgekehrte Secunden empfinden. Ein jeder als Grundton angenommene Ton hat daher auf- und abwärts ein gleiches Gebiet, in dem er überwiegend herrscht, und die Töne vorzugsweise als von ihm abhängig sich darstellen; dieses Gebiet beträgt nach beiden Seiten hin die Hälfte des Umfangs einer Octave.

§. 28.

Ueber die Octave hinaus bis zur zweiten Octave wiederholen sich die Tonverhältnisse des ersten Octavenbereichs. Die zweite Octave muss also als ein von der ersten Octave rein verschiedener Ton angesehen werden. Sie ist aber nicht weniger verschieden von dem Grundton, denn sie ist ja noch entfernter von ihm. Sie kann aber auch nicht *mehr* verschieden sein, denn es ist schon die erste Octave gänzlich vom Grundton verschieden. Es kann also auch von der zweiten Octave nur dies gesagt werden, dass sie vom Grundton rein verschieden sei. Dies ist kein Widerspruch, denn conträrer Gegensatz lässt eine Mehrheit des Entgegengesetzten zu. Das von dem Grundton rein Verschiedene hat aber wieder seine Gattungen und Arten, welche Reihen bilden, deren äusserste Enden einander wieder conträr entgegengesetzt sind. In diesem Sinne würde nun auch von einem jeden zwischen der ersten nnd zweiten Octave liegenden Tone zu sagen sein, dass er vom Grundton rein verschieden sei. Diese Verschiedenheit bestimmt sich jedoch noch näher durch die Vermittelung der Octave, auf welche jene Töne als auf ihren Grundton bezogen werden. In ähnlicher Weise für die höheren Octaven, und ebenso anderseits für die unteren Octaven des Grundtons. Man hat daher höhere und niedere *Ordnungen der reinen Verschiedenheit* der Töne vom Grundton, entsprechend den oberen und unteren Octaven desselben, anzunehmen und daher von jedem Ton, der zwischen der $n$ten und $(n+1)$ten Octave liegt und von der ersteren im Grade x verschieden ist, zu sagen, dass er dem Grundton in der Ordnung n und dem Grade x ungleich, entgegengesetzt oder von ihm verschieden sei.

§. 29.

Alle diese Verhältnisse der Töne lassen sich durch eine schematische Construction leicht versinnlichen. Die Gesammtheit der Vorstellungen aller Töne in ihrer Continuität, von welcher die Gesammtheit der empfindbaren

Töne nur ein endlicher Theil ist, kann nämlich angesehen werden als eine um einen geraden Cylinder gewundene, überall gleich geneigte und nach beiden Seiten ins Unbegrenzte gehende *Spirale*. Eine ganze Windung derselben, deren Anfangs- und Endpunkt in dieselbe Seitenlinie des Cylinders fällt, entspricht dann dem Umfange der Octave. Alle um eine Octave von einander entfernten Töne liegen immer in derselben Seitenlinie. Es gibt demnach einen doppelten Weg vom Grundton zur Octave, einen krummlinigen stetigen, durch alle zwischenliegenden Töne, und einen geradlinigen, auf der Seitenlinie, der jedoch, da hier keine anderen Töne dazwischen liegen, als ein Sprung zu betrachten ist. Eben deshalb aber, weil hier nichts Tönendes sich einschieben lässt, erscheinen nach dieser Richtung die Octaven wie benachbarte Töne. Schneidet man den Cylinder durch eine auf der Axe senkrechte, durch den dem Grundton entsprechenden Punkt gehende Ebene, so gibt diese auf der Cylinderfläche einen Kreis. Die senkrechten Abstände der Punkte der Spirale von diesem Kreise messen dann die Höhen der entsprechenden Töne über dem Grundton, der Abstand des Endpunkts der ganzen Windung vom Anfangspunkt die Höhe der Octave. Die Spirale geht aus der Seitenlinie des Anfangspunkts allmälig in die diametral entgegengesetzte Seitenlinie über, nähert sich aber dann der anfänglichen wieder und kehrt mit der Octave in sie zurück. Dies entspricht dem Gefühl der mit der Höhe bis zur Mitte des Octavenumfangs zunehmenden Entfernung der Töne vom Grundton und dem Eindruck der Wiederannäherung, der wiederzunehmenden Verwandschaft zum Grundton mit der Annäherung an die Octave, sofern diese als ein dem Grundton ähnlicher Ton empfunden wird; eine Eigenschaft, welche die Lage in der gemeinschaftlichen Seitenlinie bezeichnet.

§ 30.

Wenn α die constante Neigung der Spirale gegen einen durch einen beliebigen Punkt in ihr gelegten, auf der Axe des Cylinders senkrechten Kreis, z den senkrechten Abstand irgend eines anderen Punktes der Spirale von diesem Kreis, und u den Bogen jenes Kreises bedeutet, der zwischen dem Durchschnitt desselben mit der Spirale und dem Fusspunkt von z enthalten ist, so ist die Gleichung der Spirale für die Cylinderfläche

$$z = u \operatorname{tg} \alpha.$$

Aus §. 24 ergibt sich aber als Relation zwischen dem arithmetischen und geometrischen Intervall und der Ordnungszahl n der Octave

$$n + \lg i = n + x.$$

Diese Gleichung wird durch die der Spirale ausgedrückt, wenn wir $\operatorname{tg} \alpha = 1$, also $\alpha = 45°$, $u = n + x$ und $z = n + \lg i$ setzen, so dass dann

$$z = u = n + x$$

die Gleichung der Spirale sein wird. Es bedeutet hier nun n die Anzahl der Umläufe durch die Peripherie des Kreises, oder den Umfang des Cylinders, x den hinzuzusetzenden Bogen, der für alle gleichnamigen Töne in verschiede-

nen Octaven dieselbe Länge hat, endlich z die Höhe des Tons über dem Grundton, die fortwährend wächst, wenn man in der Tonlinie aufsteigt. Das einfachste adäquate Schema der continuirlichen Folge der Tonempfindungen ist demnach eine gegen die Basis des geraden Cylinders unter einem Winkel von 45° geneigte, um die Oberfläche desselben gewundene Spirale. Die Projection derselben auf die Ebene des Grundkreises ist offenbar der Umfang dieses Kreises; für die Projection auf die Ebene des Axenschnitts findet sich aber leicht, wenn x' die auf dem Durchmesser des Grundkreises vom Scheitel aus genommene Abscisse bedeutet, und der Halbmesser des Kreises $= 1$ gesetzt wird,

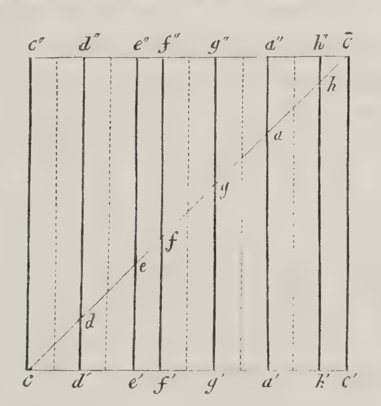
$$z = 2n\pi + \text{arc cos}\,(1 - x'),$$

wo für den arc cos seine beiden kleinsten positiven oder negativen Werthe zu nehmen sind, je nachdem

$$n \geqq 0 \text{ oder } < 0 \text{ ist.}$$

§. 31.

Dieselbe Construction veranschaulicht auch in sehr geeigneter Weise die Zerlegung eines jeden Tons in Gleiches und Ungleiches mit dem angenommenen Grundton und seiner Octave. Breitet man nämlich die Cylinderfläche in einer Ebene aus, so stellt sich der Theil der Spirale, welcher dem Umfang einer Octave entspricht, als die Diagonale eines Quadrats dar, dessen Seite gleich dem Umfang des Cylinders ist (s. d. Fig.). Theilt man nun die Grundlinie die-



ses Quadrats in zwölf gleiche Theile und errichtet in den Endpunkten dieser Theile senkrechte Linien, so stellen diese die ihrer Intensität nach gleichen ganzen und halben Töne der gleichschwebenden Temperatur dar. Man könnte die Grundlinie auch eben so gut in 1000 Theile theilen, nach §. 9 die Werthe von x auf ihr bestimmen und durch Errichtung von Senkrechten in den Endpunkten der hierdurch erhaltenen Abschnitte nach den akustischen Bestimmungen die Octaven der Töne construiren. Die Diagonale zerlegt dann jede dieser Senkrechten in zwei Abschnitte, von denen der obere seiner Grösse nach das Gleiche mit dem Grundton, folglich das Ungleiche mit der Octave, der un-

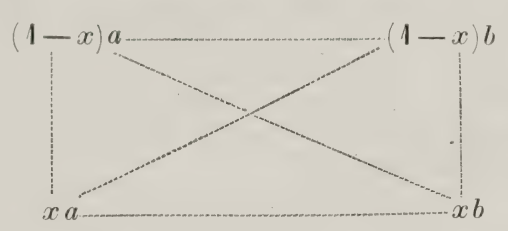
tere das Ungleiche mit dem Grundton oder das Gleiche mit der Octave im Verhältniss zur Einheit der Intensität des Tons darstellt, welche die Länge der Senkrechten repräsentirt. Auf diese Weise zerfällt in der Figur der Ton $d = d'd''$ in $dd' = \frac{2}{12}$ und $dd'' = \frac{10}{12}$, der Ton $e = e'e''$ in $ee' = \frac{4}{12}$ und und $ee'' = \frac{8}{12}$, der Ton $f = f'f''$ in $ff' = \frac{5}{12}$ und $ff'' = \frac{7}{12}$ u. s. f. Die Abstände vom Grundton und der Octave, cd' und $d'c'$ für d, ce' und $e'c'$ für e, cf' und $f'c'$ für f u. s. f. drücken beziehungsweise die Grade der Abhängigkeit der entsprechenden Töne von der Octave und von dem Grundton aus.

§. 32.

Die Zerlegung zweier gleichzeitig gegebener Tonempfindungen oder, wie wir uns von nun an ausdrücken wollen, da der physiologische Process des leiblichen Hörens hier überall nicht in Betrachtung kommt, zweier gleichzeitig gegebener *Tonvorstellungen* bahnt den Weg zur psychologischen Erklärung ihrer Consonanz oder Dissonanz. Da es nämlich ein allgemeines Gesetz der Seelenthätigkeit ist, dass alle Vorstellungen sich soweit mit einander zu vereinigen streben, als es die entgegengesetzte Beschaffenheit ihres Inhalts zulässt, so entsteht auch zwischen zwei gleichzeitigen Tonvorstellungen in dem Maasse, in welchem sie als gleich zu betrachten sind, ein Streben sich zu vereinigen, in Einen Ton zusammenzuziehen, in dem Grade aber, in welchem sie ungleich, einander entgegengestetzt sind, ein Widerstreben gegen diese Vereinigung, ein Streben sich gesondert zu halten, ihre Zweiheit zu behaupten. Diese Strebungen sind einander conträr entgegengesetzte geistige Thätigkeiten, die mit Anziehung und Abstossung verglichen werden können. Näher betrachtet haben wir es aber nicht blos mit zwei, sondern mit vier solchen einander paarweise entgegengesetzten Thätigkeiten zu thun. Zuerst nämlich strebt jeder von beiden Tönen im Grade seiner Gleichheit mit dem andern, diesen *mit sich* zu vereinigen, gleichsam als Subject den andern als Prädicat sich anzueignen oder von sich abhängig zu machen. Hierdurch entsteht Streit zwischen den Tonvorstellungen darum, welcher von dem andern sich aneignen lassen und in sofern sich ihm unterordnen soll. Diesem Streben der Aneignung von Seiten des andern Tons widerstrebt nun zweitens jeder von beiden im Grade seiner Ungleichheit, seines Gegensatzes zu dem andern. Hierdurch kommt aber auch jede Tonvorstellung mit sich selbst in Widerstreit, indem ihr zugleich ein Streben, die andere Tonvorstellung sich anzueignen, und ein Widerstreben dagegen beiwohnt. Aber dieses Widerstreben ist, wie schon gesagt, zugleich gegen das Aneignungsstreben des andern Tons gerichtet, denn es ist ein Widerstreben gegen *jede* Art der Vereinigung. Endlich muss auch das Streben beider Tonvorstellungen, sich als gesonderte zu behaupten, als ein doppeltes und entgegengesetztes angesehen werden; denn jede von beiden strebt im Grade des Gegensatzes zu der andern *sich* selbstständig und den andern von sich gesondert zu erhalten, sie behauptet sich dadurch in ihrer Selbstständigkeit, indem sie die Abhängigkeit von dem andern zurückstösst.

§. 33.

Nennen wir, zur bessern Unterscheidung, die beiden qualitativ verschiedenen, intensiv jedoch gleich zu denkenden Tonvorstellungen a und b, den Grad ihrer Ungleichheit oder ihres Gegensatzes, wie bisher, x, also den Grad ihrer Gleichheit $1 - x$, so entstehen folgende vier einander paarweise entgegengesetzte Thätigkeiten:



Vermöge des Quantums $(1 - x)\,a$ strebt a, sich b anzueignen, vermöge des Quantums xa widerstrebt es dieser Vereinigung, der aber auch andererseits b vermöge xb widerstrebt. Ebenso strebt andererseits b durch $(1 - x)\,b$, sich a anzueignen, es widerstrebt dagegen selbst durch xb, sowie a durch xa. Die Strebungen $(1 - x)\,a$ und $(1 - x)\,b$ sind aber unter sich wieder in sofern entgegengesetzt, als vermöge der ersteren a die Tonvorstellung b, vermöge der anderen b die Tonvorstellung *a von sich* abhängig zu machen sucht. Ebenso sind endlich die Widerstrebungen xa und xb darum als entgegengesetzt anzusehen, weil a vermöge xa auf Kosten von b, dagegen b vermöge xb auf Kosten von a seine Selbstständigkeit zu behaupten sucht. Wir haben also, da hinsichtlich der Quantität oder Intensität hier allenthalben $a = b = 1$ zu setzen ist, die vier paarweise entgegengesetzten geistigen Thätigkeiten, nämlich Strebungen $1 - x$, $1 - x$, x, x durch Zerlegung der beiden Tonvorstellungen a und b erhalten.

§. 34.

Nothwendiger Weise kann das Resultat solcher entgegengesetzter gleichzeitiger Strebungen kein anderes als Streit sein. Im allgemeinen muss sich also zwischen zwei gleichzeitig gegebenen Vorstellungen Streit um ihre Vereinigung oder Sonderung erheben, der sich im Bewusstsein als *Gefühl der Unruhe* zu erkennen geben wird. Sollte aber unter besonderen Bedingungen dieser Streit sich dadurch ausgleichen, dass ein Theil der streitenden Thätigkeiten dem anderen Theil unterläge und gänzlich aus dem Bewusstsein verschwände, so würde hier *Ruhe* eintreten. Ruhe und Unruhe sind aber die charakteristischen Merkmale der Consonanzen und Dissonanzen, deren Erklärung daher von dem Verhalten jener streitenden Thätigkeiten abhängig ist.

Dass nun für den *Einklang* und die *Octave* der Charakter des Intervalls nur Ruhe sein kann, ist unmittelbar klar; denn in beiden Fällen fehlt die Gelegenheit zum Streit. Im Einklang vereinigen sich, verschmelzen die Töne ohne alle Hindernisse in einen einzigen. Ebenso bleiben beim Intervall der Octave

die Töne ohne allen Streit gesondert, denn jeder von beiden Tönen ist in Beziehung auf den andern ein rein verschiedener, ohne alle Gleichheit, die zur Vereinigung treibt. Daher sind der Einklang und die Octave die *vollkommensten* Consonanzen, denn es bietet sich hier nicht einmal die Möglichkeit des Streits dar.

Welche Wirkungen dagegen für die anderen Intervalle aus den entgegengesetzten Strebungen zur Vereinigung und Sonderung hervorgehen mögen, würde sich durch blosse allgemeine Reflexionen nur in sehr ungenügender Weise ermitteln lassen. Es bedarf dazu einer vorausgehenden Theorie. Eine solche bietet uns die von Herbart begründete mathematische Psychologie dar, der wir zur Fortführung unserer Untersuchung einige Lehnsätze entnehmen, deren Beweise aber übergehen müssen, da sie sich hier nicht ohne Weitläufigkeiten entwickeln lassen würden.

§. 35.

Bevor wir jedoch zu der Angabe dieser Sätze schreiten, muss als auf eine merkwürdige Thatsache, die kein Versuch, die consonirenden Intervalle zu erklären, wird unbeachtet lassen können, darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Grade der Ungleichheit oder des Gegensatzes der Intervalle zum Grundton annäherungsweise sich sehr einfach als Functionen von $\sqrt{2}$ darstellen lassen. Es ist nämlich, wenn wir diesen Grad wieder durch x bezeichnen,

$$\begin{array}{lll}
 & \overbrace{\qquad\qquad x \qquad\qquad} \quad \text{oder} & \overbrace{\qquad\qquad 1-x \qquad\qquad} \\
\text{1) für die kleine Terz} & \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = 0{,}2612, & \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{4}{4+\sqrt{2}} = 0{,}7388; \\
\text{2) für die grosse Terz} & \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 0{,}3204, & \frac{3}{3+\sqrt{2}} = 0{,}6796; \\
\text{3) für die Quarte} & \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ = \sqrt{2}-1 \end{array}\right\} = 0{,}4142, & \left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \\ = 2-\sqrt{2} \end{array}\right\} = 0{,}5858; \\
\text{4) für die Quinte} & \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2} = 0{,}5858, & \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 = 0{,}4142.
\end{array}$$

Es ist also das Verhältniss von $1-x : x$

$$\begin{array}{ll}
\text{für die Quinte} & = 1 : \sqrt{2}, \\
\text{für die Quarte} & = 2 : \sqrt{2}, \\
\text{für die grosse Terz} & = 3 : \sqrt{2}, \\
\text{für die kleine Terz} & = 4 : \sqrt{2}.
\end{array}$$

Quarte und Quinte bestimmen sich hier als Ergänzungen zur Octave gegenseitig. Ebenso werden die Sexten durch die Terzen bestimmt, indem für sie nur die Werthe von x und $1-x$ in den Terzen vertauscht zu werden brauchen. Die grosse Secunde ergiebt sich weiter als Differenz der Quinte und Quarte; nämlich es ist

5) für die grosse Secunde $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 0{,}1716$, also

$$1 - x = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1) = 0{,}8284, \quad \text{und}$$

$$1 - x : x = 2 : \sqrt{2}-1.$$

Ebenso ergiebt sich die kleine Secunde als Differenz der Quarte und grossen Terz, indem

6) für die kleine Secunde $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+3} = 0{,}0938$, also

$$1 - x = \frac{4}{\sqrt{2}+3} = 0{,}9052, \text{ und}$$

$$1 - x : x = 4 : \sqrt{2}-1.$$

Die beiden Septimen lassen sich aus den Secunden durch Vertauschung von x und $1-x$ ebenso bestimmen, wie die Sexten aus den Terzen. Die Vergleichung der Decimalwerthe mit den akustischen Bestimmungen in §. 9. zeigt, dass der Unterschied zwischen beiden nie 0,002 erreicht, also ohne Vergleich geringer ist als der zwischen jenen Bestimmungen und denen der gleichschwebenden Temperatur.

§. 36.

Zur Erklärung dieser Ausdrücke bedürfen wir nun folgender Lehnsätze aus der mathematischen Psychologie.

1) Wird die Seele gleichzeitig zu zwei oder mehreren einander entgegengesetzten einfachen Thätigkeiten bestimmt, so hemmen sich diese in gewissen, durch Rechnung näher bestimmbaren Graden, je nach Verhältniss der Grösse ihres Gegensatzes und der Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Intensitäten. Der wahrnehmbare Erfolg hiervon ist, dass, je grösser diese Hemmung ist, um so schwächer wir uns dieser Thätigkeiten bewusst bleiben.

2) Sind nur zwei solche Thätigkeiten gegeben, so kann, wie ungleich auch ihre Intensitäten sein mögen, doch niemals die eine von beiden gänzlich aus dem Bewusstsein verschwinden. Bei drei und mehreren dagegen kann schon eine verhältnissmässig geringe Ungleichheit der Intensitäten bewirken, dass die schwächste Thätigkeit völlig gehemmt wird und dann ganz aus dem Bewusstsein verschwindet. Die stärkeren bleiben zwar im Bewusstsein, hemmen sich aber in denselben Verhältnissen, in denen dies geschehen würde, wenn die durch sie völlig gehemmte schwächste gar nicht gleichzeitig mit ihnen gegeben wäre.

3) Sind drei solche Thätigkeiten gegeben, von denen je zwei einander conträr entgegengesetzt sind, und ihre Intensitäten der Reihe nach gleich a, b, c, wo $a \geqq b$ und $b > c$ sein soll, so wird c durch a und b gänzlich gehemmt und aus dem Bewusstsein verdrängt, wenn

$$c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Ist $a = b$, so vereinfacht sich diese Formel in

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Verhält sich also hier $c : a = 1 : \sqrt{2}$, so verschwindet die schwächste unter den drei Thätigkeiten neben den beiden gleichen stärkeren aus dem Bewusstsein.

4) Sind vier einander conträr entgegengesetzte Thätigkeiten von den Intensitäten a, b, c, d gegeben, von denen $a \geqq b$, $b \geqq c$ und $c > d$ ist, so wird d durch a, b und c gänzlich gehemmt, wenn

$$d = \sqrt{\frac{abc\,(b+c)}{ab+ac+bc}}\,.$$

Ist $c = d$, so reducirt sich diese Formel auf die erste in der vorhergehenden Nummer. Ist zugleich auch $a = b$, so wird $c = d$ gänzlich gehemmt, wenn

$$c = d = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\,,$$

also unter denselben Bedingungen, unter welchen die schwächste von drei geistigen Thätigkeiten durch zwei unter einander gleiche stärkere völlig gehemmt wird.

5) Unter derselben Voraussetzung wie in der vorhergehenden Nummer wird für jeden Werth von d allgemein von dieser Thätigkeit gehemmt

$$\frac{abc\,(b+c+d)}{abc+abd+acd+bcd}\,;$$

ebenso von c

$$\frac{abd\,(b+c+d)}{abc+abd+acd+bcd}\,,$$

von b

$$\frac{acd\,(b+c+d)}{abc+abd+acd+bcd}\,,$$

von a

$$\frac{bcd\,(b+c+d)}{abc+abd+acd+bcd}\,.$$

Ist $a = b$ und $c = d$, so werden die Hemmungen von a und b gleich, nämlich

$$= \frac{c\,(a+2c)}{2\,(a+c)}\,;$$

ebenso werden die von c und d gleich, nämlich

$$= \frac{a\,(a+2c)}{2\,(a+c)}\,.$$

§. 37.

Wenden wir nun diese Lehnsätze auf die musikalischen Intervalle an, so ist zuerst im allgemeinen zu bemerken, dass wir es hier (nach §. 33.) mit vier paarweise gleichen Thätigkeiten $x, x, 1-x, 1-x$ zu thun haben, und also in den Sätzen 4 und 5 (§. 36.) $a = b$ und $c = d$ anzunehmen ist.

Was nun die Intervalle unter der Octave betrifft, so wird in ihnen das Ungleiche zum Grundton vom Gleichen überwogen; denn es ist hier $1 - x > x$. Daher ist $a = b = 1 - x$ und $c = d = x$ zu setzen. Da nun unter diesen Voraussetzungen (nach §. 36, 4) $c = d$ neben $a = b$ aus dem Bewusstsein

verschwindet, wenn $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$, so wird überhaupt das Streben zur Sonderung der Tonvorstellungen neben dem Streben zur Vereinigung aus dem Bewusstsein weichen, wenn

$$x = \frac{1-x}{\sqrt{2}},$$

d. i. wenn

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Dies trifft (nach §. 35.) auf die *Quarte*.

Umgekehrt ist für die Intervalle oberhalb der Mitte der Octaven $1 - x < x$, daher $a = b = x$ und $c = d = 1 - x$ zu setzen. Als Bedingung des Verschwindens des Strebens zur Vereinigung aus dem Bewusstsein ergiebt sich dann

$$1 - x = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

d. i.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},$$

das Intervall der *Quinte*.

Es ist demnach in der Quarte das Streben zur Sonderung der Tonvorstellungen neben dem Streben zur Vereinigung derselben, in der Quinte umgekehrt das Streben zur Vereinigung neben dem zur Sonderung *völlig unmerklich*. In beiden Intervallen ist also in dem sogleich noch näher zu bestimmenden Sinne der Streit zwischen den entgegengesetzten Strebungen aufgehoben, und der Charakter der *Ruhe* vorherrschend.

§. 38.

Es würde eine falsche Auslegung der gewonnenen Ergebnisse sein, wenn man sagen wollte, sie zeigten, dass bei der Quarte das Entgegengesetzte, bei der Quinte das Gleiche in den beiden Tonvorstellungen aus dem Bewusstsein verschwinde; denn dann müsste in beiden Fällen ein dritter neuer Ton an die Stelle treten, was eben so sehr gegen die Erfahrung als unmöglich ist. Es würde dies voraussetzen, dass sich in den Tönen das Gleiche vom Entgegengesetzten *wirklich trennen* lasse, indess uns die Empfindung und die von ihr zurückbleibende Vorstellung als ein Untheilbares, Einfaches gegeben ist, das keine Abänderung seiner Qualität zulässt. Die Töne bleiben, wie sie sind, als verschiedene im Bewusstsein. Aber auch das würde eine falsche Auslegung sein, wenn man behaupten wollte, es ergebe sich, dass bei der Quarte und Quinte der Widerstreit zwischen den entgegengesetzten Strebungen *wirklich* aufhöre. Er dauert vielmehr fort, und die Töne befinden sich in einer *innern Spannung*. Die wahre Deutung ist, dass diese Spannung nicht ins Bewusstsein fällt und daher *nicht wahrnehmbar* ist. Daher ist der Charakter dieser Intervalle nur *scheinbare* Ruhe, bei verborgen bleibenden, *latentem* Streit. Die Ursache dieses Streits dauert fort und erneuert sich ununterbrochen in jedem Zeitmoment, aber ihre Wirkung wird sofort gehemmt. Darum erscheinen in

beiden Fällen die Töne als verträgliche, befreundete, einstimmige. Der Charakter dieser Einstimmigkeit ist aber bei der Quinte ein andrer als bei der Quarte. Bei jener bleibt ein Theil des Strebens zur Sonderung im Bewusstsein, daher *erscheinen* die Töne als *gesonderte* und stellen sich scheinbar als selbstständige dar, indess ihre wahre Selbstständigkeit erst mit der Octave eintritt. Bei der Quarte bleibt umgekehrt ein Theil des Strebens zur Vereinigung, und die Töne *erscheinen* als *verschmolzen.* Im Uebrigen wird in beiden Fällen auch nicht einmal *aller merkbare* Streit beseitigt; denn in der Quarte sucht jeder von beiden zur Vereinigung strebenden Töne sich den andern anzueignen, ebenso bei der Quinte jeder der zur Sonderung strebenden Töne den andern *von sich* zu sondern und sich auf dessen Kosten als selbstständig darzustellen. Daher consoniren Quarte und Quinte unvollkommener als der Einklang und die Octave, bei denen sich gar kein Streit erhebt. Wohl aber zeigt sich die Quarte durch das im Bewusstsein bleibende überwiegende Streben zur Vereinigung dem Einklang, und die Quinte durch ihr überwiegendes Streben zur Sonderung der Töne der Octave verwandt. Endlich muss noch bemerkt werden, dass alle diese Strebungen nicht als distincte Vorstellungen, sondern nur als *Gefühle* im Bewusstsein vorhanden sind.

§. 39.

Die Grösse des im Bewusstsein bleibenden Strebens zur Vereinigung für die Quarte, zur Sonderung für die Quinte, lässt sich aus §. 36. 5 bestimmen. Da nämlich dort der Ausdruck $\frac{c(a+2c)}{2(a+c)}$ angiebt, wie viel von $a = b$ gehemmt wird, so ist das ungehemmt bleibende Quantum $= a - \frac{c\,(a+2c)}{2\,(a+c)}$.

Setzt man nun für die Quarte $a = 1 - x = 2 - \sqrt{2}, c = x = \sqrt{2} - 1$, so ergiebt sich als das ungehemmt bleibende Quantum des Strebens zur Vereinigung

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\,(1-x),$$

Es bleibt also die Hälfte jenes Strebens im Bewusstsein.

Ebenso, wenn man für die Quinte $a = x = 2 - \sqrt{2}$ und $c = 1 - x = \sqrt{2} - 1$ setzt, ergiebt sich offenbar ebenfalls

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\,x,$$

also die Hälfte des Strebens zur Sonderung.

Die andere Hälfte dieser Strebungen findet seine Verwendung zur gänzlichen Hemmung des entgegengesetzten Strebens, das sich nicht hemmen lässt, ohne rückwirkend die dasselbe hemmende Thätigkeit wenigstens theilweise zu hemmen Dies darf jedoch auf keine Weise so verstanden werden, als ob schon ein geringeres Quantum des überwiegenden Strebens zureichend gewesen wäre, das entgegengesetzte völlig zu hemmen; denn die Formeln zeigen, dass, wenn $c > \frac{a}{\sqrt{2}}$, wie klein auch der Ueberschuss des Werthes von c über

$\frac{a}{\sqrt{2}}$ sein möge, c nicht mehr völlig gehemmt wird. Es sind also zu dieser völligen Hemmung der beiden c die ganzen beiden a erforderlich, und die Ergebnisse der vorstehenden Rechnung bedeuten nur dies, dass das überwiegende Streben, obwohl nach seiner ganzen Stärke nothwendig, um das entgegengesetzte schwächere zu unterdrücken, doch deshalb nicht wie dieses ganz aus dem Bewusstsein weicht, sondern in bis zur Hälfte seiner Stärke vermindertem Grade im Bewusstsein wahrnehmbar bleibt.

§. 40.

Das Gegenstück zu den Consonanzen der Quarte und Quinte bildet die Mitte der Octave, das fis der gleichschwebenden Temperatur. Hier ist $x = 1 - x = \frac{1}{2}$, also Gleichheit der zur Vereinigung und Sonderung strebenden Thätigkeiten. Daher hemmen sich alle vier in gleichem Maasse. Setzt man in der ersten Formel von §. 36. 5, $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, so ergiebt dieselbe als Quantum der Hemmung für jede der vier Strebungen $\frac{3}{8}$, so dass also von jeder $\frac{1}{8}$ (sie selbst $= \frac{1}{2}$ gesetzt, also $\frac{1}{4}$ ihrer Intensität als Einheit) im Bewusstsein bleibt, und der Streit zwischen ihnen nach allen möglichen Beziehungen als Gefühl wahrnehmbar ist. Daher hier die härteste *Dissonanz* zwischen zwei vollkommenen Consonanzen. Um dies noch näher zu erläutern dienen folgende Bemerkungen. Bei der Quarte ist $1 - x = x\sqrt{2}$, d. i. das Streben zur Vereinigung ist *genau* so gross, um, ohne Ueberschuss seiner Wirksamkeit, das Streben zur Sonderung niederzuhalten. Oberhalb der Quarte und unterhalb der Quinte dagegen ist $1 - x < x\sqrt{2}$, ohne dass doch umgekehrt $x = (1 - x)\sqrt{2}$ wäre, was erst bei der Quinte eintritt, wo also das Streben zur Sonderung *genau* so gross ist, um ohne Ueberschuss seiner Wirksamkeit das Streben zur Vereinigung niederzuhalten. Zugleich ist hier auch $x < (1 - x)\sqrt{2}$. Daher bleiben zwischen der Quinte und Quarte sämmtliche vier einander widerstreitende Thätigkeiten im Bewusstsein, und ihr Streit erreicht sein Maximum in der Mitte der Octave, wo alle vier gleich sind.

§. 41.

Was die Terzen betrifft, so bemerken wir zunächst folgende Rechnungsthatsachen.

1) Der in §. 36. angegebene Werth von x für die *grosse Terz* ergiebt sich aus der Formel $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (§. 36. 4) wenn $c = x$ und $a = \frac{2}{3}(1 - x)$ gesetzt wird; denn dies giebt in der That $x = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$. Es reichen hiernach schon zwei Drittheil des zwischen dem Grundton und der grossen Terz stattfindenden Strebens zur Vereinigung hin, um das Streben zur Sonderung aus dem Bewusstsein zu verdrängen.

2) Eben so ergiebt sich aus der Formel $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$, wenn $c = x$ und $a = \frac{1}{2}(1 - x)$ gesetzt wird, $x = \frac{1}{1 + 2\sqrt{2}}$, der Grad des Gegensatzes für die *kleine Terz.* Bei dieser reicht also schon die Hälfte des Strebens zur Vereinigung hin, das entgegengesetzte Streben aus dem Bewusstsein zu verdrängen.

Hieraus allein lässt sich aber nicht erklären, warum die Terzen Consonanzen sind. Denn die Eigenschaft, dass schon ein Theil des Strebens zur Vereinigung hinreichend ist, das entgegengesetzte Streben zu unterdrücken, besitzen alle Intervalle, die kleiner sind als die Quarte. Es bedarf also noch einer andern Betrachtungsweise. Diese ist folgende.

§. 42.

Wie aus §. 40. hervorgeht, ist unterhalb der Quarte $1 - x > x\sqrt{2}$, das Streben zur Vereinigung überwiegt das zur Sonderung in dem Maasse, dass letzteres nicht nur völlig gehemmt ist, sondern auch noch ein freier verwendbarer Ueberschuss des ersteren bleibt. Dieser kann nicht ohne Wirksamkeit sein, die Töne werden sich nun also wirklich vereinigen. Aber es wird unzählig viele Grade der Vereinigung geben, je nach der verschiedenen Grösse der sie herbeiführenden Thätigkeit. Wir werden daher Grade der *Zusammenziehung* der Töne annehmen können. Um dies durch ein sinnliches Gleichniss zu erläutern, mag, wie schon früher, das Streben zur Vereinigung als Anziehung, das zur Sonderung als Abstossung, und zwar zuerst zweier von einander entfernter Körper vorgestellt werden. Ueberwiegt die erstere in hinreichendem Maasse, so werden die Körper zur Berührung kommen; wächst sie noch weiter, so werden sie in einander eindringen. Die Zusammenziehung der Töne ist also in ähnlicher Weise als eine mehr oder weniger vollkommene Durchdringung, als eine innigere Vereinigung zu denken. Da aber, wie bereits in §. 38. bemerkt worden ist, der Gegensatz der Tonvorstellungen sich nicht getrennt von ihrer Gleichheit hemmen lässt, vielmehr als Grund ihrer Unterscheidbarkeit stets im Bewusstsein bleibt, so wird jetzt von diesem ein neues Streben, ein *Widerstreben* gegen die Zusammenziehung (gleichsam eine Abstossung in der Berührung, unterschieden von der Abstossung vor derselben) entstehen, das sich der engern Vereinigung widersetzt. Da es nun allein auf der Ungleichheit, dem Gegensatz der Tonvorstellungen beruht, so werden wir es proportional x zu setzen haben. Es versteht sich von selbst, dass es für jeden von beiden Tönen in Ansatz zu bringen ist. Ihm gegenüber steht der *Ueberschuss* des Strebens zur Vereinigung, der ebenfalls für jeden von beiden Tönen statt hat. So entstehen vier neue, einander ebenso entgegengesetzte Strebungen, wie die bisher betrachteten.

§. 43.

Der oben genannte Ueberschuss ist nun allgemein für alle Intervalle unter der Quarte $= 1 - x - x\sqrt{2}$, da $x\sqrt{2}$ diejenige Grösse des Strebens zur Vereinigung bedeutet, die genau zureicht, um das Streben zur Sonderung x

völlig zu hemmen, $1-x$ aber überhaupt das ganze Streben zur Vereinigung ist. Für die *grosse Terz* wird nun

$$1-x-x\sqrt{2}=\frac{1}{3}(1-x),$$

wie sich unmittelbar ergiebt, wenn man den Grad ihres Gegensatzes, ihr arithmetisches Intervall $x=\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ im linken Theil der vorstehenden Gleichung substituirt. Dieses Streben zur Zusammenziehung $\frac{1}{3}(1-x)$ wird aber durch das Widerstreben x völlig und ohne Ueberschuss von Seiten des letzteren gehemmt. Denn setzt man in der mehrmals gebrauchten Formel $c=\frac{a}{\sqrt{2}}$ $a=x=\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$, so ergiebt sich $c=\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{1}{3}(1-x)$. Dies bedeutet nun Folgendes. Zwischen der Quarte und grossen Terz entsteht eine neue Unruhe, indem das Streben zur Zusammenziehung ein überwiegendes, daher im Bewusstsein wahrnehmbares Widerstreben aufregt. In der grossen Terz selbst aber ist dieses Widerstreben ganz erforderlich, um jenes Streben niederzuhalten, daher hier eine relative Ruhe eintritt, die jedoch der Ruhe der Quarte nicht gleichkommt, da jenes Widerstreben in vermindertem Grade im Bewusstsein bleibt und als eine gewisse Spannung sich bemerklich macht, die sich auch als Gefühl einer unbefriedigten Sehnsucht in der grossen Terz erkennen lässt.

Für die *kleine Terz* ist $x=\frac{1}{1+2\sqrt{2}}$; daher wird hier

$$1-x-x\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-x).$$

Dieses Streben zur Zusammenziehung $\frac{1}{2}(1-x)$ ist nun hier genau erforderlich und zureichend, um das Widerstreben x völlig zu hemmen. Denn substituirt man in $c=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $a=\frac{1}{2}(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$, so kommt $c=\frac{1}{1+2\sqrt{2}}=x$.

Der Sinn hiervon ist: zwischen der grossen und kleinen Terz erneuert sich die Unruhe, indem das Streben zur Zusammenziehung der Töne wächst, ohne das Widerstreben überwinden zu können. Beruhigung tritt erst mit der kleinen Terz ein, wo das Streben zur Zusammenziehung zureicht, aber auch ganz erforderlich ist, um das Wiederstreben zu unterdrücken.

Die Intervalle unter der kleinen Terz können nur Dissonanzen sein, denn es findet hier, da mit der Annäherung an den Einklang das Streben zur Zusammenziehung immer mehr überwiegt, eine vollkommene Einheit der durch ihre Ungleichheit noch immer unterschiedenen Töne statt. Diese Einheit erscheint daher als eine erzwungene, in sich entzweite. Die kleine Terz verräth den Uebergang zu diesen Dissonanzen durch den traurigen gedrückten Charakter, der ihr eigenthümlich ist.

Die Sexten bedürfen als umgekehrte Terzen keiner eigenen Erklärung, da alles, was für diese gilt, sich leicht auf sie übertragen lässt wenn, statt des Grundtons die Octave substituirt wird.

Die Secunden und Septimen kommen als selbstständige Intervalle nur bei der Tonleiter in Betracht, über die wir in der gegenwärtigen Abhandlung besondere Untersuchungen anzustellen nicht beabsichtigen.

§. 44.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, das Verhältniss der consonirenden Intervalle *in den Accorden* psychologisch zu erörtern.

Aus §. 13. ergiebt sich, dass, wenn drei innerhalb des Bereichs der Octave liegende Töne einen Accord geben sollen, durch sie der Umfang der Octave in eine kleine Terz, eine grosse Terz und eine Quarte zerlegt werden muss. Die psychologisch deducirten Werthe der consonirenden Intervalle, wie wenig sie auch von den akustischen Bestimmungen abweichen, genügen doch dieser Bedingung nicht vollständig; denn die Summe der drei vorgenannten Intervalle ergiebt sich aus ihnen

$$= 0{,}2612 + 0{,}2304 + 0{,}4142 = 0{,}9948, \text{ anstatt } 1.$$

Diese Differenz beweist jedoch nichts gegen die Richtigkeit der psychologischen Bestimmungen an sich. Die gleichschwebende Temperatur zeigt, dass die akustischen Werthbestimmungen der Intervalle ohne merkbare Verminderung ihres Wohlklangs weit bedeutendere Abänderungen zulassen als diejenigen sind, welche durch die Differenzen zwischen ihnen und den psychologischen Bestimmungen ausgedrückt werden. So gewiss es daher auch ist, dass die akustischen Werthe der Intervalle vollkommen genau diejenigen sind, für welche ein periodisches Coincidiren der Tonwellen statt hat, so muss doch für die *Tonvorstellungen,* für *die* Musik, welche nicht sinnlich vernommen, sondern in höchster Reinheit in der Phantasie, unabhängig von den physischen Entstehungsursachen der Töne vorgestellt wird, angenommen werden, dass die gefundenen psychologischen Intervallenwerthe *noch reinere* Consonanzen geben und *Ideale* sind, die die Wirklichkeit nicht vollständig erreichen kann, weil durch Nebenumstände (das Schwirren der Saiten, die Stösse etc.), die in den Bedingungen der physischen Hervorbringung der Töne liegen, die Reinheit in andrer Weise beeinträchtigt wird. Dies gilt jedoch, wie wir sogleich sehen werden, nur so lange, als es sich um die Betrachtung der *einzelnen* Consonanzen handelt. Es wird sich zeigen, dass sie, um zu Accorden verknüpfbar zu sein, Modificationen erleiden müssen, durch welche sie mit den akustischen Bestimmungen fast genau zusammenfallen.

§. 45.

Zerlegen wir nämlich das arithmetische Intervall der Octave $= 1$ in die drei Intervalle der grossen und kleinen Terz und der Quarte, so fragt es sich, wie diese drei Grössen zu bestimmen sind, damit sie den für sie aufgefundenen psychologischen *Verhältnissen* genügen, ohne aufzuhören, die Octave genau auszufüllen. Werden sie der Reihe nach durch x, y, z bezeichnet, so folgt aus §. 43. für das Verhältniss der Terzen

$$x : y = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} : \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} : \frac{1}{4+\sqrt{2}},$$

$$\text{also} \quad (3+\sqrt{2})x = (4+\sqrt{2})y.$$

Ebenso folgt aus §. 43. und 37.

$$x : z = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} : \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} : \frac{1}{2+\sqrt{2}},$$

$$\text{also} \quad (3+\sqrt{2})x = (2+\sqrt{2})z,$$

woraus, da $x + y + z = 1$ sein soll, wird

$$(3+\sqrt{2})x = (2+\sqrt{2})\ (1-x-y).$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen x und y, so findet sich

$$x = \frac{5+3\sqrt{2}}{16+9\sqrt{2}} = \frac{26+3\sqrt{2}}{94} = 0{,}32173,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{8+5\sqrt{2}}{16+9\sqrt{2}}\right) = \frac{19+4\sqrt{2}}{94} = 0{,}26231.$$

Hieraus folgt

$$z = \frac{7}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{16+9\sqrt{2}}\right) = \frac{7(7-\sqrt{2})}{94} = 0{,}41596.$$

Für die Quinte ergiebt sich

$$1 - z = x + y = \frac{1}{2}\left(\frac{18+11\sqrt{2}}{16+9\sqrt{2}}\right) = \frac{45+7\sqrt{2}}{94} = 0{,}58404.$$

Diese Werthe weichen von den akustischen Bestimmungen der gleichnamigen Intervalle 0,32193, 0,26304, 0,41503, 0,58496 sämmtlich um weniger als 0,001 ab und unterscheiden sich von ihnen demnach auf eine dem musikalischen Gehör unmerkliche Weise.

§. 46.

Das Ergebniss ist also, *dass die consonirenden Intervalle in ihrer psychologischen Reinheit unfähig sind, reine Accorde zu geben, und zu diesem Zwecke Abänderungen erleiden müssen, durch welche jedoch ihre Verhältnisse ungestört bleiben, und sie ihren akustischen Bestimmungen sehr nahe kommen.*

Bestände die Musik nur in der Consonanz je zweier gleichzeitiger Töne, so würden zwar nicht für die äussere sinnliche Empfindung, aber für die innere Wahrnehmung die psychologischen Bestimmungen der Intervalle die grösste Befriedigung gewähren. Beruhte die Musik nur auf der Harmonie drei und mehrerer gleichzeitiger Töne, so würde ihre grösste Reinheit durch consonirende Intervallen erreicht, die den akustisch bestimmten überaus nahe kommen. Da sie nun aber zugleich auf Fortschreitungen nach consonirenden Intervallen gegründet ist, so müssen, um der Möglichkeit der sichern Rückkehr zu dem angenommenen Grundton willen, auch die akustisch bestimmten Intervalle sich diejenigen Abänderungen gefallen lassen, welche die gleichschwebende Temperatur einführt. Für diese wird die Octave durch die Terzen und Quarte nach den einfachen Verhältnissen 3 : 4 : 5 in allen sechs möglichen Ver-

setzungen dieser Zahlen getheilt. Es ist merkwürdig, dass diese Theilung nach denselben Zahlen erfolgt, welche die kleinsten sind, aus denen sich ein rationales rechtwinkliges Dreieck construiren lässt. Ob dies nur ein zufälliges Zusammentreffen oder eine Hindeutung auf eine schematische Construction ist, müssen wir für jetzt unentschieden lassen.

Schlussanmerkung.

Herbart sucht die Tauglichkeit zu Accorden vorzugsweise den Intervallen der gleichschwebenden Temperatur zu vindiciren. Wir können uns hierin seiner Theorie nicht anschliessen, die auch schwerlich in dieser Beziehung die Erfahrung für sich haben möchte. Wenn er jeden der einen Accord bildenden Töne vermöge seines Gegensatzes zu den beiden andern sich in drei Theile «brechen» lässt, so vermissen wir eine genügende Nachweisung, dass diese Theile, paarweise genommen, als einander voll entgegengesetzt zu betrachten sind, und vermögen diese Lücke nicht zu ergänzen. Aber auch abgesehen hiervon wissen wir uns nicht deutliche Rechenschaft darüber zu geben, was hier eigentlich die geführten Hemmungsrechnungen für eine Bedeutung haben sollen. Diese müsste sich in ähnlicher Weise auseinander setzen lassen, wie dies im Vorstehenden für die einfachen Intervalle durch Einführung der Begriffe des Strebens zur Vereinigung und zur Sonderung zn leisten versucht worden ist. Auch dies hat uns nicht gelingen wollen. Wir haben es daher vorgezogen, bei dem gewöhnlichen Begriffe des Accords (§. 13.) stehen zu bleiben und in der harmonischen Einstimmung dreier Töne nichts weiter zu suchen als die Consonanz jeder ihrer drei möglichen Verbindungen zu zweien.

ÜBER DIE

SCHWINGUNGEN DER SAITEN,

VON

A. SEEBECK.



Die Theorie der Saiten hat während eines grossen Theiles des vorigen Jahrhunderts die Mathematiker vielfach beschäftigt. Besonders war die Frage wegen der Gestalt der schwingenden Saite der Gegenstand eines Streites, welcher um die Mitte jenes Jahrhunderts mit Lebhaftigkeit geführt wurde, und dessen Ergebniss bekanntlich dies war, dass die Saite jede beliebige Gestalt annehmen kann. An dieses Resultat lassen sich einige weitere Fragen knüpfen. Ist ausser der einen ganz willkührlichen Gestalt noch eine zweite eben so willkührliche für einen andern Zeitpunkt möglich? Ist, wenn die Schwingungen nach einer Richtung geschehen, die Bewegung irgend eines Punktes der Saite ganz willkührlich? Gilt dies für jeden Punkt der Saite? Gilt es für mehrere Punkte zugleich? Ist, wenn die Saite doppelt gebogen wird, die Gestalt der Bahn irgend eines Punktes ganz willkührlich? Ist die Geschwindigkeit desselben ganz willkührlich? Können Bahn und Geschwindigkeit zugleich ganz willkührlich sein? Wie beantworten sich diese Fragen für die Bewegung eines Saitenpunktes im Raume, wenn longitudinale Schwingungen zu den transversalen hinzutreten?

Ich werde, um diese Fragen zu beantworten, zuerst die transversalen Schwingungen nach einer Richtung, sodann die nach zwei Dimensionen behandeln, und endlich die longitudinalen Schwingungen dazutreten lassen. Drehende Schwingungen sind zwar an Saiten auch möglich, ich werde sie aber hier nicht mit in Rechnung nehmen, indem sie, wenn die Saite unendlich dünn gedacht wird, als unendlich klein gegen die andern Schwingungen anzusehen sind.

I.

TRANSVERSALSCHWINGUNGEN NACH EINER RICHTUNG.

§. 1.

Schwingungsdauer.

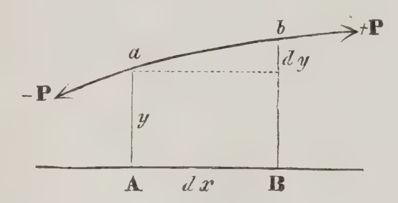
Die Saite werde gedacht als ein Faden von gleichförmiger Dicke und Dichtigkeit, gespannt durch eine Kraft P. Es werde angenommen

1) dass, nachdem das Gleichgewicht einmal gestört worden ist, keine Kräfte ausser P auf dieselbe wirken, dass also weder die aus der Steifheit, noch die aus der Schwere der Saite entspringenden Kräfte einen merklichen Einfluss ausüben, auch dass weder Luftwiderstand, noch sonst ein Hinderniss stattfinde.

2) Die beiden Enden der Saite sollen als vollkommen unbeweglich angenommen werden.

3) Es werde angenommen, dass im Zustande der Schwingung stets die Ablenkung jedes Theilchens unendlich klein und gegen die Saite rechtwinklig sei, wie auch dass die Neigung der gekrümmten Saite gegen ihre Gleichgewichtslage in allen Punkten ebenfalls unendlich klein sei. Daraus folgt, dass die Saite während des Schwingens unendlich wenig gedehnt wird, und die Spannung in allen Punkten als constant zu betrachten ist.

Die Gleichgewichtslage werde als Axe der x angenommen, und es sei den Theilen eine beliebige Ablenkung und Geschwindigkeit in der Ebene der xy ertheilt. Es sei AB ein Element der Saite, dessen Abscisse x und



dessen Länge dx ist. Dasselbe habe zur Zeit t die Lage ab, nämlich die Ablenkung y und die Neigung $\alpha = \frac{dy}{dx}$. Die auf den Endpunkt a wirkende Kraft $-P$ kann zerlegt werden nach der Richtung der x und y in die Componenten

$$-P\cos\alpha \quad \text{und} \quad -P\sin\alpha,$$

wofür man, da α unendlich klein ist, auch setzen kann

$$-P \quad \text{und} \quad -P\alpha = -P\frac{dy}{dx}.$$

Die auf den andern Endpunkt b wirkende Kraft $+P$ kann ebenso zerlegt werden in die Componenten

$$P\cos(\alpha + d\alpha) \quad \text{und} \quad P\sin(\alpha + d\alpha),$$

wofür zu setzen ist

$$P \quad \text{und} \quad P(\alpha + d\alpha) = P\frac{dy}{dx} + P\frac{d^2y}{dx}.$$

Die beiden Kräfte $-P$ und $+P$ in der Richtung der x geben die Resultante 0 und das statische Moment Pdy; die beiden andern Kräfte geben die Resultante $P\frac{d^2y}{dx}$ und das statische Moment $-Pdy$. Es wirkt also auf das Element dx die Kraft $P\frac{d^2y}{dx}$ rechtwinklig zur Saite. Bezeichnet man mit p das Gewicht einer Längeneinheit der Saite, also mit pdx das Gewicht des Elements, so hat man demnach die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{gPd^2y}{pdxdx};$$

und wenn man zur Abkürzung $\sqrt{\frac{Pg}{p}} = c$ setzt,

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = c^2 \frac{d^{\,2} y}{dx^2}\,.$$

Das Integral dieser Gleichung, welches zuerst D'Alembert*) gegeben hat, ist bekanntlich

$$y = f(ct - x) + F(ct - x),$$

wo f und F beliebige Functionen bedeuten.

Die Natur dieser Functionen wird nun zu einem gewissen Maasse dadurch bestimmt, dass beide Enden der Saite unbeweglich sind. Nimmt man den einen Endpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten, so ist y beständig $= 0$, wenn $x = 0$; dies giebt

$$0 = f(ct) + F(ct)$$

für jeden Werth von t oder von ct, wodurch die vorige Gleichung übergeht in

$$y = f(ct + x) - f(ct - x) \qquad (1).$$

Ist L die Länge der Saite, so wird auch $y = 0$, wenn $x = L$, daher

$$0 = f(ct + L) - f(ct - L).$$

Da dies ebenfalls für jeden Werth von ct gilt, so kann man auch ct mit $ct + L$ vertauschen, und erhält dann

$$f(ct + 2L) = f(ct).$$

Dies bedeutet, dass die Function f periodisch ist, und denselben Werth wieder annimmt, so oft ct um $2L$, oder t um $\frac{2L}{c}$ vermehrt wird. Nach Verlauf der Zeit $\frac{2L}{c}$ nimmt also y in der Gleichung (1) denselben Werth wieder an. Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt} = cf'(ct + x) - cf'(ct - x),$$

so dass nach Verlauf jener Zeit derselbe Bewegungszustand wiederkehrt. Es ist also $\frac{2L}{c}$ oder $2L\sqrt{\frac{p}{Pg}}$ die Dauer einer Schwingung, und daher die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde

$$N = \frac{2L}{c} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{pg}}\,.$$

§. 2.

Bestimmung der Bewegung der Saite durch die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts.

Die Gestalt der Saite und die Geschwindigkeit ihrer Theile zu irgend einer Zeit hängt von der ursprünglichen Störung des Gleichgewichts ab und muss sich durch diese ausdrücken lassen. Um diese Bestimmung zu machen, können die Fourier'schen Reihen benutzt werden.

Da nämlich $f(ct)$ periodisch ist, und denselben Werth wieder annimmt, so oft ct um $2L$ vermehrt wird, so kann man setzen

*) Mém. de l'Acad. de Berlin 1747.

$$f(ct) = a_0 + a_1 \cos \pi \frac{ct}{L} + a_2 \cos 2\pi \frac{ct}{L} + \dots + a_p \cos p\pi \frac{ct}{L} + \dots$$
$$+ b_1 \sin \pi \frac{ct}{L} + b_2 \sin 2\pi \frac{ct}{L} + \dots + b_p \sin p\pi \frac{ct}{L} + \dots$$

wo die Constanten a und b durch die anfängliche Störung bedingt sind. Setzt man diesen Werth von f in die Gleichung (1), so kommt

$$y = a_1 \left(\cos \pi \frac{ct+x}{L} - \cos \pi \frac{ct-x}{L}\right) + a_2 \left(\cos 2\pi \frac{ct+x}{L} - \cos 2\pi \frac{ct-x}{L}\right) + \dots$$
$$+ b_1 \left(\sin \pi \frac{ct+x}{L} - \sin \pi \frac{ct-x}{L}\right) + b_2 \left(\sin 2\pi \frac{ct+x}{L} - \sin 2\pi \frac{ct-x}{L}\right) + \dots$$

Dafür kann man setzen

$$y = \theta_1 \sin \pi \frac{x}{L} + \theta_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + \dots \quad (2.)$$

wo

$$\theta_p = 2 b_p \cos p\pi \frac{ct}{L} - 2 a_p \sin p\pi \frac{ct}{L}.$$

Aus (2) erhält man

$$v = \frac{dy}{dt} = \vartheta_1 \sin \pi \frac{x}{L} + \vartheta_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + \dots \quad (3.)$$

wo

$$\vartheta_p = -\frac{2\pi p c}{L} \left(b_p \sin p\pi \frac{ct}{L} + a_p \cos p\pi \frac{ct}{L}\right).$$

Rechnet man nun die Zeit von dem Moment an, wo die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts stattfand, und bezeichnet die da ertheilte Ablenkung und Geschwindigkeit mit y_0 und v_0, so hat man, indem $t = 0$ gesetzt wird,

$$y_0 = 2 \left\{ b_1 \sin \pi \frac{x}{L} + b_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + \dots \right\} \quad (4.)$$

$$v_0 = -\frac{2\pi x}{L} \left\{ a_1 \sin \pi \frac{x}{L} + 2 a_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + \dots \right\} \quad (5.)$$

Man sieht hieraus, dass die Constanten b durch die anfängliche Ablenkung der Theile, und die a durch die anfängliche Geschwindigkeit derselben gegeben sind. Ist also die ursprüngliche Störung bekannt, so ist durch die Gleichungen (2) und (3) die Bewegung der Saite vollständig bestimmt.

Die Gleichung (4) kann jede Curve von 0 bis L, und die Gleichung (5) jede Geschwindigkeitsscala zwischen denselben Grenzen vorstellen. Da nun die ursprüngliche Störung völlig willkührlich ist, sowohl in Beziehung auf Ablenkung als Geschwindigkeit der Theile, so sind alle Constanten b und a ganz willkührlich (nur unendlich klein), und die Function $f(ct)$ ist innerhalb der gefundenen Periode ganz beliebig. Sind z. B. alle $a = 0$, so erreichen alle Punkte zugleich die grösste Ablenkung: sind alle $b = 0$, so gehn alle zugleich durch die Gleichgewichtslage.

§. 3.

Höhere Töne und Knoten.

Sind alle a und $b = 0$ mit Ausnahme derer von der Form a_{np} und b_{np}, wo n eine bestimmte ganze Zahl ist, p aber jede ganze Zahl bedeutet, so wird

$$f(ct) = a_0 + a_n \cos n\pi \frac{ct}{L} + a_{2n} \cos 2n\pi \frac{ct}{L} + \dots$$
$$+ b_n \sin n\pi \frac{ct}{L} + b_{2n} \sin 2n\pi \frac{ct}{L} + \dots$$

Diese Reihe nimmt denselben Werth wieder an, so oft ct um $\frac{2L}{n}$ oder t um $\frac{2L}{nc}$ vermehrt wird. In diesem Falle ist also die Dauer einer Schwingung $\frac{2L}{nc}$, und die Anzahl der Schwingungen einer Saite ist allgemein

$$N = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{Pg}{p}},$$

wo n jede ganze Zahl bedeuten kann.

Für den genannten Fall wird

$$y = \theta_n \sin n\pi \frac{x}{L} + \theta_{2n} \sin 2n\pi \frac{x}{L} + \dots \quad (6.)$$

Dieser Werth wird $= 0$, so oft $\frac{n\pi x}{L} = m\pi$ oder $x = \frac{m}{n} L$, wo m jede ganze Zahl von 0 bis n bedeuten kann. Es hat also dann die Saite ausser den beiden Enden noch $n - 1$ Punkte, die beständig ohne Ablenkung bleiben; dies sind die Schwingungsknoten, durch welche sie in n gleiche Theile abgetheilt wird.

Diese Art von Bewegung kann bekanntlich durch Berührung eines Knoten herbeigeführt werden. Dies geht auch aus der Gleichung (2) hervor. Denn wenn y beständig $= 0$ ist für einen Punkt, dessen Abscisse $\frac{m}{n} L$, wo m und n relative Primzahlen sein müssen, so giebt jene Gleichung

$$0 = \theta_1 \sin \frac{m\pi}{n} + \theta_2 \sin \frac{2m\pi}{n} + \dots + \theta_p \sin \frac{pm\pi}{n} + \dots$$

für jeden Werth von t. Die Glieder, deren p ein Vielfaches von n ist, werden 0 wegen des Factors $\sin \frac{pm\pi}{n}$; alle übrigen können nur 0 werden, wenn θ_p beständig 0 ist, und dies ist nur möglich, wenn $a_p = 0$ und $b_p = 0$. Es müssen also dann alle a und $b = 0$ sein, mit Ausnahme derer von der Form a_{np} und b_{np}, was, wie so eben gezeigt ist, die übrigen Knoten bedingt.

§. 4.

Gestalt der schwingenden Saite.

Taylor, welcher zuerst die Aufgabe von den Schwingungen der Saite behandelt und die Formel für die Schwingungsdauer gegeben hat*), ging bei seiner Theorie von der Annahme aus, dass die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts blos in einer Biegung bestehe, und zwar von solcher Art, dass die auf jeden Punkt wirkende Kraft seiner Ablenkung proportional sei. Er suchte auch zu zeigen, dass wenn anfänglich diese Gestalt nicht vorhanden sei, sie sich sogleich, ehe noch die erste Viertelschwingung vollendet sei, von selbst herstellen müsse. Dieses Letztere ist nicht richtig.

Johann Bernoulli, welcher die Theorie auf einem andern Wege behandelte**), ging in Betreff der anfänglichen Störung des Gleichgewichts we-

*) Methodus incrementorum Lond. 1717. Prop. XXII. XXIII.

*) Comment. Acad. Petropol. T. III. 1728.

sentlich von derselben Voraussetzung aus, wie Taylor, und zeigte, dass die die daraus sich ergebende Gestalt die sogenannte *Gefährtin der Cycloide* sei. Diese Linie, welche auch oft mit dem Namen Cycloide bezeichnet wird, erhält man aus unserer Theorie, wenn man alle a und $b = 0$ setzt, ausser a_1 und b_1, denn dann wird

$$y = \theta_1 \sin \pi \frac{x}{L},$$

was die Gleichung jener Linie ist, sofern θ_1 als eine Constante in Beziehung auf x gedacht wird.

Von jener viel zu grossen Beschränkung hat D'Alembert die Theorie der Saiten befreit *), indem er die allgemeine Differentialgleichung für die Bewegung derselben aufstellte und integrirte. Er zog aus seiner Theorie den Schluss, dass die Saite ausser der Gefährtin der Cycloide noch unendlich viele andere Gestalten annehmen könne, und führte dies an einer grossen Anzahl von Beispielen aus.

Noch weiter ging Euler **), indem er aus der ganz unbestimmten Natur der Function f den Schluss zog, die Saite könne jede beliebige, selbst ganz regellose Gestalt annehmen. Diese Verallgemeinerung wurde von D'Alembert bestritten und von Euler vertheidigt, ohne dass der streitige Punkt zwischen ihnen zur Entscheidung kam. In der That aber war es nach dem damaligen Standpunkte als zweifelhaft anzusehen, ob f eine ganz gesetzlose Veränderung ausdrücken könne.

Auf einen einfacheren Gesichtspunkt suchte Daniel Bernoulli jene unendlich mannigfaltige Gestalt zurückzuführen ***). Er nahm an, dass jedem Tone der Saite eine Gestalt von der Form

$$y = A \sin n\pi \frac{x}{L}$$

entspreche; indem aber beliebig viele solche Schwingungen zugleich existiren können, werde die Gestalt allgemein dargestellt durch die Gleichung

$$y = A_1 \sin \pi \frac{x}{L} + A_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + A_3 \sin 3\pi \frac{x}{L} + \ldots,$$

wo dann aus den verschiedenen Werthen der Constanten $A_1, A_2 \ldots$ jene unendliche Mannigfaltigkeit entspringe. Da man gegenwärtig weiss, dass überhaupt durch eine Gleichung von dieser Form jede Gestalt von 0 bis L dargestellt werden kann, so sieht man, dass D. Bernoulli's Ansicht im Resultat richtig war; allein da man damals jene Bedeutung dieser Gleichung noch nicht kannte, so hatte Euler Grund zu der Entgegnung †), dass man auf diesem Wege zwar zu unendlich vielen, aber nicht zu jeder beliebigen Gestalt gelangen könne. In der That hatte Euler schon in seiner ersten Abhandlung (1748) eben diese Gleichung aufgestellt, aber nur als ein Beispiel, nicht vermuthend, dass dadurch jede Gestalt dargestellt werden könne.

---

*) Mém. de l'Acad. de Berlin 1747.

**) Ebend. 1748.

***) Ebend. 1753.

†) Ebend.

Die noch immer schwebende Frage, ob wirklich die Saite jede ganz willkührliche Gestalt haben könne, wurde endlich von Lagrange in einer seiner frühesten Abhandlungen*) zur Entscheidung gebracht, indem er, einen ganz verschiedenen Weg der Behandlung einschlagend, die Richtigkeit der Eulerschen Ansicht streng erwies. Nach der Entwickelung, welche die allgemeine Theorie der willkührlichen Functionen seitdem und auf Veranlassung dieser Aufgabe gefunden hat, ist es gegenwärtig nicht mehr nöthig, den besonderen Fall der Saiten auf dem Wege herzuleiten, durch welchen Lagrange eine neue Bahn auf diesem Felde gebrochen hat.

So allgemein Euler's Behauptung in Betreff der Gestalt der Saite war, so kann man doch noch einen Schritt weiter gehn. Wenn man nämlich die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts nicht, wie in den jetzt angeführten Abhandlungen der Einfachheit wegen geschehen ist, in einer blossen Ablenkung der Theile bestehen lässt, sondern ihnen zugleich, wie oben angenommen worden, eine beliebige Geschwindigkeit ertheilt, so sieht man sogleich, dass nach der ersten willkührlichen Gestalt noch wiederum für die folgenden Zeitmomente unendlich mannigfaltige Gestalten eintreten können, und es bietet sich die Frage dar, ob für irgend einen andern Zeitpunkt noch eine zweite ganz willkührliche Gestalt möglich sei. Euler nimmt zwar in einer späteren Abhandlung**) diese allgemeinere Voraussetzung über die ursprüngliche Störung auf und zeigt, wie für diesen Fall durch eine sehr einfache Construction die ganze Bewegung der Saite bestimmt werden könne, ohne jedoch dabei die genannte Frage zu berühren.

§. 5.

Kann die Saite zwei von einander unabhängige, ganz willkührliche Gestalten annehmen?

Die erste beliebige Gestalt, welche zur Zeit 0 stattfindet, hängt nach Gleichung (4) blos von den Werthen der b ab. Zur Zeit t aber ist

$$y = \theta_1 \sin \pi \frac{x}{L} + \theta_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} + \ldots + \theta_p \sin p\pi \frac{x}{L} + \ldots$$

Dies giebt jede willkührliche Gestalt, wofern alle θ ganz beliebig sind. Es ist aber

$$\theta_p = 2 b_p \cos p\pi \frac{ct}{L} - 2 a_p \sin p\pi \frac{ct}{L}.$$

Ist nun b_p und t gegeben, so ist noch das zweite Glied dieses Ausdrucks wegen des Factors a_p willkührlich, also auch θ_p beliebig, ausgenommen den Fall, wenn $\sin p\pi \frac{ct}{L} = 0$ d. h. wenn $\frac{pct}{L} =$ einer ganzen Zahl q. Damit also die zweite Gestalt ganz willkührlich sei, darf pt nicht $= q\frac{L}{c}$ sein, wo p und q jede ganze Zahl bedeuten können, d. h. es muss t incommensurabel zu $\frac{L}{c}$ oder zur Schwingungsdauer angenommen werden.

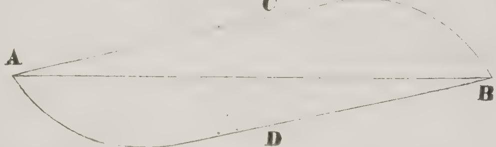
*) Miscellanea Societatis Taurinensis. T. I. 1759.

**) Nov. Comment. Acad. Petrop. 1779.

Es ist also allerdings ausser der ersten ganz willkührlichen Gestalt noch eine zweite ebenso willkührliche möglich, jedoch nur dann, wenn die Zwischenzeit zwischen beiden incommensurabel zur Schwingungsdauer genommen wird. Durch beide Gestalten zusammen sind alle a und b bestimmt, also bleibt dann in der ganzen Bewegung der Saite nichts Willkührliches mehr.

§. 6.
Symmetrien der Gestalt.

Ist t commensurabel zu $\frac{L}{c}$, also z. B. $pt = q\frac{L}{c}$, so wird $\theta_p = 2b_p$, $\theta_{2p} = 2b_{2p}$ etc., also nicht alle Coefficienten θ willkührlich. Ist $t = q\frac{L}{c}$, d. h. gleich einer ganzen Anzahl von Halbschwingungen, so werden alle θ von den a unabhängig, d. h. die Gestalt der Saite wird nicht nur nach einer Anzahl von ganzen Schwingungen — was ohnehin einleuchtet —, sondern auch nach einer Anzahl von halben Schwingungen unabhängig von der anfänglichen Geschwindigkeit und nur abhängig von der ersten Gestalt. Auch ergiebt sich leicht, dass nach Verlauf einer halben Schwingung die Gestalt sich in die symmetrisch entgegengesetzte verwandelt haben muss, wo die gleichen Ordinaten mit entgegengesetztem Zeichen und in entgegengesetzter Ordnung erscheinen, so dass, wenn ACB die Gestalt zu einer Zeit ist,



nach $\frac{1}{2}$ Schwingung ADB die Gestalt sein muss. Denn bezeichnet man mit y' den Werth, welchen y annimmt, wenn man in der Gleichung (1) $L - x$ anstatt x und $t + \frac{L}{c}$ anstatt t setzt, so erhält man

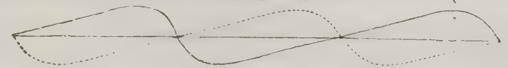
$$y' = f(ct + 2L - x) - f(ct + x);$$

und da

$$f(ct + 2L) = f(ct) \text{ ist,}$$
$$y' = f(ct - x) - f(ct + x)$$
$$y' = -y$$

was das bezeichnete Resultat ausdrückt.

Was die Gestalt der Saite bei den höheren Tönen betrifft, so kann sie zwar von einem Knoten bis zum nächsten ganz willkührlich sein, wie man aus der Gleichung (6) sieht, da diese eine willkührliche Function von ct zwischen den Grenzen 0 und $\frac{L}{n}$ ausdrückt; aber mit der Gestalt dieses einen Theiles ist die aller übrigen bestimmt, und zwar, wie man aus eben jener Gleichung ersieht, in solcher Weise, dass in gleichem Abstande zu beiden Seiten eines Knoten die Ordinaten gleich, aber entgegengesetzt sind (S. d. folg. Fig.). Auch



sieht man leicht, dass auch hier nach Verlauf einer halben Schwingung die Gestalt jeder Abtheilung in die symmetrisch entgegengesetzte übergeht. Man kann diese Symmetrien der Gestalt sehr wohl bemerken, wenn man die Schwingungen an jenen schraubenförmigen Messingdräthen beobachtet, welche August zu diesem Zwecke in Gebrauch gebracht hat.

§. 7.

Ist die Bewegung eines Punktes der Saite willkührlich?

Nimmt man einen bestimmten Punkt der Saite, setzt man also für x irgend einen bestimmten Werth λ, so ist y nur noch eine Function der Zeit, und es fragt sich, ob vermöge der Wahl der Constanten a und b diesem Punkte eine ganz willkührliche Bewegung ertheilt werden könne, d. h. ob an ihm eine ganz beliebige Zu- und Abnahme der Ablenkung stattfinden könne?

Die Gleichung (2) giebt

$$\left.\begin{aligned} y = c_1 \cos \pi \frac{ct}{L} + c_2 \cos 2\pi \frac{ct}{L} + \dots \\ + d_1 \sin \pi \frac{ct}{L} + d_2 \sin 2\pi \frac{ct}{L} + \dots \end{aligned}\right\} \quad (7.)$$

wenn man

$$c_p = 2\, b_p \sin p\pi \frac{\lambda}{L}$$

$$d_p = -2\, a_p \sin p\pi \frac{\lambda}{L}$$

setzt. Ist nun λ commensurabel zu L, nämlich $= \frac{m}{r} L$, wo m und r relative Primzahlen sind, so werden alle die Glieder $= 0$, deren $p = r,\ 2r,\ 3r \dots$ und es stellt also die Gleichung (7) nicht jede beliebige Function zwischen den Grenzen $-\frac{L}{c}$ und $+\frac{L}{c}$ dar. Ist hingegen λ incommensurabel zu L, so dass $\sin p\pi \frac{\lambda}{L}$ niemals $= 0$ wird, so können alle Constanten der Gleichung (7) vermöge des a und b beliebig gemacht werden, und es fehlt daher dieser Gleichung nur ein willkührliches constantes Glied, um eine ganz beliebige Function der Zeit darzustellen. Das Fehlen dieses constanten Gliedes rührt daher, dass die Saite selbst als Axe des x genommen worden ist, und zeigt an, dass die Schwingung zu beiden Seiten des Gleichgewichtsortes so geschehen muss, dass

$$\int_{t_1}^{t_1 + \frac{2L}{c}} y\, dt = 0$$

ist. Nimmt man eine Linie der t als Abscissenaxe und construirt darüber die Welle der y *), so ist diese Linie von völlig willkührlicher Gestalt, und es muss

*) Ich verstehe unter der Welle der y den Theil der durch die Gleichung (7) vorgestellten Curve, welcher zwischen zwei Punkten gleicher Schwingungsphase liegt, d. h. von t_1 bis $t_1 + \frac{2L}{c}$ enthalten ist.

nur die Axe der t so gelegt werden, dass die Summe der *über* ihr liegenden Areale der Summe der *unter* ihr liegenden gleich wird.

Es ist also die Bewegung eines Punktes, welcher die Saite in einem irrationalen Verhältniss theilt, ganz beliebig, bis auf die Beschränkung, dass die Summe der positiven Ablenkungen der der negativen innerhalb der Dauer einer Schwingung gleich sein muss.

§. 8.

Beschränkung für einen Punkt, welcher die Saite in einem rationalen Verhältniss theilt.

Für einen Punkt, welcher $\frac{m}{r}$ der Saite abschneidet, ist $c_r, c_{2r}, c_{3r}\ldots, d_r, d_{2r}, d_{3r}\ldots = 0$. Welche Bedeutung hat dieses Ausfallen jedes $r$ten Gliedes?

Es ist einleuchtend, dass, indem der $r$te Theil der Constanten wegfällt, sich die Willkührlichkeit der durch die Gleichung (7) dargestellten Function um $\frac{1}{r}$ vermindern muss. Wie dies zu nehmen ist, kann man näher auf folgende Weise sehen. Setzt man in jener Gleichung für $\pi\frac{ct}{L}$ nach einander die Werthe $\tau+\frac{2\pi}{r}, \tau+\frac{4\pi}{r}, \tau+\frac{6\pi}{r} \ldots \tau+\frac{2r\pi}{r}$, und addirt die entstehenden Ausdrücke, so wird diese Summe, welche durch S bezeichnet werden möge,

$$S = \sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{(d_p \cos p\tau + c_p \sin p\tau)\sum_{n=1}^{n=r}\cos\frac{2np\pi}{r}\right\}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{n=n}\cos n\varphi = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{2};$$

also im vorliegenden Falle

$$\sum_{n=1}^{n=r}\cos\frac{2np\pi}{r} = \frac{\sin\frac{p\pi}{r}}{2\sin\frac{p\pi}{r}} - \frac{1}{2}.$$

Dieses giebt in allen Fällen 0, ausser wenn $\frac{p}{r}$ eine ganze Zahl ist, in welchem letzteren Falle diese Summe $= r$ wird; daher ist

$$S = r\left\{\begin{matrix} d_r\cos r\tau + d_{2r}\cos 2r\tau + \ldots \\ + c_r\sin r\tau + c_{2r}\sin 2r\tau + \ldots \end{matrix}\right\}.$$

Da nun für einen Punkt, der auf $\frac{m}{r}$ der Saite liegt, $c_r, c_{2r} \ldots d_r, d_{2r}, \ldots = 0$, so ist für einen solchen Punkt S beständig $= 0$. Liegt z. B. der Punkt auf $\frac{1}{3}$ der Saite, so besteht zwischen dem ersten, zweiten und dritten Drittel der Welle die Beziehung, dass die drei entsprechenden Ordinaten dieser drei Theile, (d. h. die zu $t = t_1 + \frac{2L}{3c}$, $t_1 + \frac{4L}{3c}$ und $t_1 + \frac{6L}{3c}$ gehörenden Ordina-

ten) die Summe Null geben. Es können daher zwei Drittel dieser Welle von ganz willkührlicher Gestalt angenommen werden, aber durch diese ist dann das noch übrige Drittel bestimmt. Allgemein, wenn der Punkt auf $\frac{m}{r}$ der Saite liegt, so sind $\frac{r-1}{r}$ der Welle willkührlich, aber durch sie ist das letzte $\frac{1}{r}$ derselben bestimmt. Für die Mitte der Saite ergiebt sich sowohl hieraus, als aus §. 6., dass die Welle dieses Punktes aus zwei gleichen entgegengesetzten Theilen bestehen muss, wie z. B. folgende Figur.



Es ist eine bekannte Erfahrung, dass eine Saite nicht anspricht, wenn man sie mit dem Violinbogen gerade in der Mitte streicht. Fast dasselbe findet auf $\frac{1}{3}$ und in abnehmendem Maasse auf $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ oder $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ u. s. w. statt; auf diesen Punkten ist durch Streichen der Ton nicht oder nur unvollkommen zu erlangen, obgleich er sehr leicht anspricht, sobald man nahe neben diesen Stellen streicht. Dies hat offenbar seinen Grund darin, dass die Bewegung der genannten Punkte nur zur Hälfte, zu $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ u. s. w. frei ist, und daher der unregelmässigen Einwirkung des Bogens um so mehr widerstrebt, je mehr die Freiheit dieser Bewegung beschränkt ist.

II.

TRANSVERSALSCHWINGUNGEN NACH ZWEI RICHTUNGEN.

§. 9.

Bestimmung der Bewegung der Saite.

Wenn die Kräfte, durch welche das Gleichgewicht der Saite gestört wird, nicht in einer Ebene liegen, so erhält dieselbe eine Gestalt von doppelter Krümmung, und es beschreiben die Punkte derselben im Allgemeinen nicht mehr gerade Linien, sondern in sich zurücklaufende krumme Linien. Im Uebrigen sollen die in §. 1. vorangestellten Voraussetzungen auch hier gültig bleiben. Es sei demnach, wenn wieder die Saite als Axe der x genommen wird, die Ablenkung eines Saitenelements dx gegeben durch y und z, und werde in der Figur des §. 1. die Linie der z rechtwinklig zur Ebene der Figur gedacht. Dann zerlege man die in a wirkende Kraft — P in drei Componenten parallel y, z, x. Bezeichnet man mit $90° - \alpha$ und $90° - \beta$ die Winkel, welche das Element mit y und z bildet, so werden diese Componenten beziehungsweise

$$-P\sin\alpha,\quad -P\sin\beta,\quad -P\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta},$$

wofür man, da α und β unendlich klein sind, setzen kann

$$-P\alpha,\qquad -P\beta,\qquad -P.$$

Ebenso giebt die in b wirkende Kraft $+P$ die drei Componenten

$$P(\alpha+d\alpha),\qquad P(\beta+d\beta),\qquad P.$$

Aus $-P\alpha$ und $P(\alpha+d\alpha)$ erhält man die Kraft $Pd\alpha$ oder $P\frac{d^2y}{dx}$, aus $-P\beta$ und $P(\beta+d\beta)$ die Kraft $Pd\beta$ oder $P\frac{d^2z}{dx}$, und aus beiden Paaren zusammen das statische Moment $P\sqrt{dy^2+dz^2}$. Aus $-P$ und $+P$ aber erhält man die Resultante 0 und das statische Moment $-P\sqrt{dy^2+dz^2}$. Man behält daher blos in der Richtung der y die Kraft $P\frac{d^2y}{dx}$ und in der der z die Kraft $P\frac{d^2z}{dx}$. Daher werden die beiden Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2y}{dt^2}=c^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c^2\frac{d^2z}{dx^2},$$

woraus man ganz wie in §. 1. erhält

$$y=f(ct+x)-f(ct-x),$$
$$z=\varphi(ct+x)-\varphi(ct-x),$$

wo

$$f(ct)=f(ct+2L),$$
$$\varphi(ct)=\varphi(ct+2L).$$

Nach Verlauf der Zeit $\frac{2L}{c}$ kehrt also derselbe Bewegungszustand wieder.

Die Function $\varphi(ct)$ ist ebenso willkührlich als $f(ct)$, so dass

$$\varphi(ct)=\alpha_0+\alpha_1\cos\pi\frac{ct}{L}+\alpha_2\cos 2\pi\frac{ct}{L}+\dots$$
$$+\beta_1\sin\pi\frac{ct}{L}+\beta_2\sin 2\pi\frac{ct}{L}+\dots$$

und

$$z=2\beta_1\sin\pi\frac{x}{L}\cos\pi\frac{ct}{L}+2\beta_2\sin 2\pi\frac{x}{L}\cos 2\pi\frac{ct}{L}+\dots$$
$$-2\alpha_1\sin\pi\frac{x}{L}\sin\pi\frac{ct}{L}-2\alpha_2\sin 2\pi\frac{x}{L}\sin 2\pi\frac{ct}{L}-\dots$$

gesetzt werden kann. Die Constanten α, sowie die a der Gleichung $f(ct)$ (§. 2.) sind durch die anfängliche Geschwindigkeit, die β und b durch die anfängliche Ablenkung aller Theilchen der Saite bestimmt.

Wie die anfängliche Gestalt der Saite durch die Wahl der b und β eine ganz willkührliche Linie doppelter Krümmung sein kann, so sieht man aus §. 5., dass die Wahl der a und α es gestattet, derselben noch eine zweite, ebenso willkührliche Gestalt für einen andern Zeitmoment beizulegen, wenn die Zeit zwischen beiden Momenten in einem irrationalen Verhältniss zur Schwingungsdauer steht. Ebenso kann, was über die höheren Töne und über

die Symmetrie der Gestalt in §. 3. und 6. gesagt ist, auf den vorliegenden Fall unmittelbar übertragen werden.

§. 10.

Ist die Bewegung eines Punktes der Saite in Beziehung auf Bahn und Geschwindigkeit ganz willkührlich?

Die Bewegung irgend eines Punktes der Saite wird vorgestellt durch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y = c_1 \cos \pi \frac{ct}{L} + c_2 \cos 2\pi \frac{ct}{L} + \ldots\ldots \\ + d_1 \sin \pi \frac{ct}{L} + d_2 \sin 2\pi \frac{ct}{L} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} z = \gamma_1 \cos \pi \frac{ct}{L} + \gamma_2 \cos 2\pi \frac{ct}{L} + \ldots\ldots \\ + \delta_1 \sin \pi \frac{ct}{L} + \delta_2 \sin 2\pi \frac{ct}{L} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wo die c und d dieselhe Bedeutung haben, wie in §. 7., und die γ und δ auf dieselbe Weise durch α und β bestimmt sind.

Für einen Punkt, welcher die Saite in einem irrationalen Verhältniss theilt, sind alle c und d, γ und δ beliebig. Hieraus ergiebt sich, dass die Bewegung eines solchen Punktes ganz willkührlich ist, bis auf die Beschränkung, dass

$$\int_{t_1}^{t_1+\frac{2L}{c}} y\,dt = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{t_1}^{t_1+\frac{2L}{c}} z\,dt = 0,$$

eine Beschränkung, welche sich weder auf die Geschwindigkeit, noch auf die Gestalt der Bahn, sondern nur auf die Lage bezieht, welche der Gleichgewichtsort gegen die Bahn einnimmt. Dies kann auf folgende Weise anschaulich gemacht werden.

Man construire über der Linie der t als Abscissenaxe eine beliebige Welle der y und verlege die Linie der t, parallel mit sich so, dass das Areal der zwischen ihr und der Wellenlinie liegenden Fläche $= 0$ wird. Ebenso construire man eine andre beliebige Welle der z. Denkt man sich nun diese beiden Figuren so verbunden, dass ihre Ebenen sich in der Axe der t rechtwinklig schneiden, so wird die Grösse und Richtung der zu irgend einem Werthe von t gehörenden Ablenkung des Punktes aus seiner Gleichgewichtslage vorgestellt durch die Diagonale des aus y und z vollendeten Rechtecks. Man erhält auf diese Weise eine Welle doppelter Krümmung, eine um die Axe der t sich windende Linie, von welcher jene beiden Figuren die Projectionen nach yt und zt sind. Projicirt man dieselbe Linie auf die Ebene der yz, so erhält man die Bahn, welche der Punkt durchläuft. Für einen Punkt, welcher die Saite in einem irrationalen Verhältniss theilt, ist nun die Welle der y, zufolge §. 7., ganz willkührlich, ebenso die Welle der z, und daher ist auch jene Welle doppelter Krümmung von ganz willkührlicher Gestalt; daraus ersieht man, dass nicht nur die Projection der letzteren auf die Ebene yz, also die beschriebene

Bahn ebenfalls ganz willkührlich ist, sondern dass auch durch eine beliebig angenommene Bahn die *Geschwindigkeit* noch ganz unbestimmt gelassen wird. Denn denkt man sich über dieser Bahn einen geraden Cylinder errichtet, so stellen alle auf die Oberfläche dieses Cylinders gezeichneten Wellen verschiedene Bewegungen dar, welche sämmtlich dieselbe Bahn geben. Es kann sogar bei einer beliebig angenommenen Gestalt der Bahn noch jede willkührliche Geschwindigkeit stattfinden. Die vorhin bezeichnete Welle doppelter Krümmung drückt nämlich die Geschwindigkeit des bezüglichen Punktes dadurch aus, dass die Tangente der Neigung jener Linie gegen die Axe der t dieser Geschwindigkeit gleich ist, indem $v = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$. Wenn man daher bei einer willkührlichen Geschwindigkeit eine willkührliche Gestalt der Bahn haben will, so denke man sich zuerst die verlangte Geschwindigkeit durch eine Curve dargestellt, welche über der Axe der t so construirt ist, dass die Tangente ihrer Neigung dieser Geschwindigkeit gleich ist, und dann die Ebene dieser Figur als Mantel auf einen Cylinder gewickelt, dessen Grundfläche die verlangte Gestalt der Bahn hat; man erhält alsdann die Welle doppelter Krümmung, welche den verlangten Bedingungen genügt. Natürlich muss die *Grösse* der Bahn so bemessen werden, dass sie bei der verlangten Geschwindigkeit gerade einmal, oder auch mehrmals während der Dauer einer Schwingung durchlaufen wird.

Man sieht also, dass die Bewegung eines Punktes, welcher die Saite in einem irrationalen Verhältniss theilt, sowohl in Beziehung auf die Gestalt der Bahn, als in Beziehung auf die Geschwindigkeit — innerhalb der Dauer einer Schwingung — ganz willkührlich ist. Da durch eine solche Bewegung alle a, b, α und β bestimmt sind, so ist dadurch die Bewegung aller übrigen Punkte mit bestimmt.

§. 11.

In wie weit ist die Bewegung eines Punktes willkührlich, welcher die Saite in einem rationalen Verhältniss theilt?

Die Bewegung derjenigen Punkte, welche die Saite in einem rationalen Verhältniss theilen, ist nicht in gleichem Maasse willkührlich. Was die *Mitte* der Saite betrifft, so geht aus dem Umstande, dass hier nach Verlauf einer halben Schwingung die Ablenkung in die gleiche entgegengesetzte übergegangen sein muss (§. 8.), die Eigenschaft hervor, dass die Bahn dieses Punktes einen Mittelpunkt haben muss, d. h. einen Punkt, der jede durch ihn gezogne Sehne halbirt, und dass die Geschwindigkeit in je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten dieser Bahn gleich sein muss. Für alle übrigen Punkte findet etwas Aehnliches nicht statt.

Für einen Punkt, der auf $\frac{m}{r}$ der Saite liegt, wird in den Gleichungen (7) und (8) jedes $r$te Glied gleich Null. Hieraus sieht man, in Verbindung mit §. 8., dass die Bewegung dieses Punktes während $\frac{r-1}{r}$ einer Schwingungsdauer ganz willkührlich in Beziehung auf Bahn und Geschwindigkeit genommen werden kann, aber dann hierdurch für das noch übrige $\frac{1}{r}$ mit bestimmt

ist. Obgleich demnach hier die Gestalt der Bahn und die Geschwindigkeit nicht *zugleich* willkührlich sind für die ganze Schwingungsdauer, so ist doch damit nicht ausgeschlossen, dass nicht die Bahn *oder* die Geschwindigkeit ganz beliebig sein könne, wie ich, um nicht zu lange bei diesem Gegenstande zu verweilen, nur an einem Beispiele andeuten will.

Soll ein Punkt, der auf $\frac{1}{3}$ der Saite liegt, eine willkührlich angenommene Bahn durchlaufen, so kommt dies darauf hinaus, eine Wellenscale zu construiren, deren Projection auf die Ebene der yz diese Bahn darstellt, und welche zugleich nach §. 8. der Bedingung genügt, dass je drei um $\frac{2L}{3c}$ von einander abstehende Ordinaten die Summe Null geben. Man denke sich daher über der Bahncurve einen Cylinder errichtet, dessen Höhe $= \frac{2L}{c}$, nehme auf dessen Oberfläche drei Punkte an, den ersten in der Basis, mit den Coordinaten y' und z', den zweiten in der Höhe $\frac{2L}{3c}$, mit den Coordinaten y'' und z'', und den dritten in der Höhe $\frac{4L}{3c}$ mit den Coordinaten y''' und z'''. Diese drei Punkte können willkührlich gewählt werden, nur so, dass in Beziehung auf eine ebenfalls willkührliche Axe des Cylinders (Axe der t) die beiden Gleichungen

$$y' + y'' + y''' = 0, \qquad z' + z'' + z''' = 0$$

stattfinden, was stets auf unendlich mannigfaltige Weise geschehen kann. Jetzt ziehe man von dem ersten nach dem zweiten Punkte auf der Oberfläche des Cylinders eine beliebige Linie, nur mit der Beschränkung, dass dabei die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} c_1 \cos\frac{4}{3}\pi + c_2 \cos\frac{8}{3}\pi + c_4 \cos\frac{16}{3}\pi + \ldots \\ + d_1 \sin\frac{4}{3}\pi + d_2 \sin\frac{8}{3}\pi + d_4 \sin\frac{16}{3}\pi + \ldots \end{array}\right\} = y''' \\ \left.\begin{array}{l} \gamma_1 \cos\frac{4}{3}\pi + \gamma_2 \cos\frac{8}{3}\pi + \gamma_4 \cos\frac{16}{3}\pi + \ldots \\ + \delta_1 \sin\frac{4}{3}\pi + \delta_2 \sin\frac{8}{3}\pi + \delta_4 \sin\frac{16}{3}\pi + \ldots \end{array}\right\} = z''' \end{array}\right\} \quad (A.)$$

stattfinden, Bedingungen, welchen die gezogene Linie auf unendlich mannigfaltige Weise genügen kann. Von hier an ist die Zeichnung der übrigen Wellenscala völlig bestimmt; denn bezeichnet man jetzt mit dy', dy'', dy''' und dz', dz'', dz''' die Differentiale der Coordinaten im ersten, zweiten und dritten Drittheil der Cylinderhöhe, so ist durch die Gestalt des Cylinders, auf welchem diese Linie fortlaufen soll, $\frac{dy''}{dz''}$ und $\frac{dy'''}{dz'''}$ bestimmt, und ferner muss, weil der Punkt auf $\frac{1}{3}$ der Saite liegt,

$$dy'' + dy''' = -dy', \quad dz'' + dz''' = -dz' \quad (B.)$$

sein. Durch diese vier Bedingungen sind die vier Grössen dy'', dz'', dy''' und dz''' bestimmt. Man erhält auf diese Weise eine Welle, welche der durch die besondre Lage des schwingenden Punktes vorgezeichneten Beschränkung Genüge thut, ferner ganz auf dem angenommenen Cylinder liegt und zugleich einen ununterbrochenen Fortgang hat, indem wegen der Gleichungen (A) das Ende des zweiten Drittels sich dem Anfange des dritten, und damit auch dessen Ende sich (wegen B) dem Anfange des vierten anschliessen muss. Die Pro-

jection der so erhaltenen Linie ist also die verlangte Bahn. Etwas anders gefasst kommt dies darauf hinaus, dass für einen Punkt, der auf $\frac{1}{3}$ der Saite liegt, nicht nur die ganze Bahn, sondern auch für $\frac{1}{3}$ der Schwingungsdauer die Geschwindigkeit willkührlich ist. Das Entsprechende gilt für die übrigen Punkte, welche die Saite in rationalem Verhältniss theilen. Ganz ähnlich überzeugt man sich auch, dass die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer und die Bahn für einen Theil derselben willkührlich genommen werden kann.

§. 12.

Anwendungen auf die Erfahrung.

Man kann die Bahn eines Punktes der Saite beobachten, wenn man eine Stelle derselben durch einem leichten Feilstrich markirt und diese dann im Sonnenschein oder bei Kerzenlicht mit einem Mikroscop betrachtet, dessen Axe unter einem sehr spitzen Winkel gegen die Saite geneigt ist. Beobachtet man auf diese Weise die Mitte der Saite, so fällt sogleich jene Symmetrie der Bahn auf, durch welche sich diese Stelle, dem Vorhergehenden gemäss, vor allen übrigen Punkten auszeichnet. In der ziemlich schnellen Veränderung, welche man dabei nicht nur an der Grösse, sondern auch an der Gestalt der Bahn bemerkt, zeigt sich der Einfluss der in der Rechnung vernachlässigten Umstände, der Steifheit der Saite, der endlichen Grösse ihrer Schwingungen, des Luftwiderstandes, der Resonanz u. s. w.

Es ist einleuchtend, dass die Form der Tonwellen, welche die Saite theils unmittelbar, theils und hauptsächlich mittelbar durch den Resonanzboden der Luft mittheilt, je nach den Werthen der a, b, α und β verschieden sein muss, und man begreift hiernach jene Mannigfaltigkeit des Klanges, über welche ein geschickter Spieler auf den Saiteninstrumenten zu gebieten versteht, während allerdings gewisse Klangverschiedenheiten auch wohl durch einige Unregelmässigkeit der Bewegung erzeugt werden. Die Möglichkeit, jene erstere Verschiedenheit der Bewegung herbeizuführen, liegt am Tage, nicht nur bei den Streichinstrumenten, sondern auch beim Fortepiano und ähnlichen Instrumenten, indem die Zeit, während welcher z. B. der Clavierhammer gegen die Saite drückt, zwar sehr kurz, aber doch nicht so klein ist im Vergleich zu der Dauer einer Schwingung, dass er ihr nicht je nach der Art des Anschlags eine Verschiedenheit der Bewegung einzuprägen vermöchte.

Wenn in dieser Verschiedenheit des Klanges von physikalischer Seite vorzüglich das Interesse liegt, welches jene unendliche Mannigfaltigkeit der Bewegung der Saite gewährt, so würde es dabei allerdings mehr auf die Bewegung der den Schall fortpflanzenden Luft und endlich der Gehörsnerven ankommen. Obgleich es nun nicht möglich ist, aus der Bewegung der Saite die der Lufttheilchen vollständig abzuleiten, weil sich die Veränderungen nicht in Rechnung bringen lassen, welche die Schwingungen beim Uebergange von der Saite durch den Resonanzboden an die Luft erleiden, so sieht man doch im Allgemeinen, dass für die den Ton fortpflanzenden Lufttheilchen eine gleiche Willkührlichkeit der Bewegung möglich ist, wie für einen irrational theilenden

Punkt der Saite selbst, indem sich annehmen lässt, dass der Resonanzboden die Fähigkeit besitzt, alle die einzelnen Cosinus- und Sinusglieder — wenn auch in ungleichem Maasse — fortzupflanzen, aus welchen man sich die Bewegung des letzteren zusammengesetzt denken kann. Es kann sogar, insofern sich die Lufttheilchen nach allen drei Dimensionen bewegen können, für sie die Willkühr noch grösser sein als die, welche an den Punkten der Saite selbst bisher besprochen worden ist. Aehnliches gilt von der Bewegung im Gehörorgane selbst.

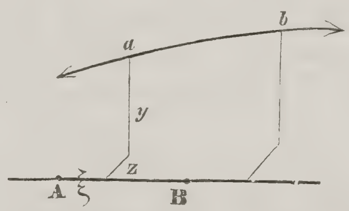
III.

SCHWINGUNGEN NACH DREI DIMENSIONEN.

§. 13.

Allgemeine Bestimmung der Bewegung der Saite.

Es ist bisher angenommen worden, dass die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts blos in einer transversalen Ablenkung und Geschwindigkeit ihrer Theile bestehe. Es werde jetzt angenommen, dass beide von beliebiger Richtung, aber immer nur unendlich klein sind, wodurch dann die Spannung nicht mehr über die ganze Länge der Saite constant ist und zugleich longitudinale Schwingungen entstehen. Es sei also ein Saitentheilchen AB (siehe die hier folgende Figur), dessen Abcisse x und dessen Länge dx ist,



zur Zeit t in die Lage ab versetzt; die transversalen Ablenkungen seien, wie bisher, y und z, die longitudinale aber ξ, so dass seine Abcisse $x + \xi$ und seine Länge $dx + d\xi$ geworden ist, also $\frac{d\xi}{dx}$ die hinzutretende Dehnung des Theilchens ausdrückt.

Bezeichnet man mit m den Elasticitätsmodulus nach Höhe, d. h. mit $\frac{1}{m}$ den Bruchtheil, um welchen ein Prisma, dessen Höhe 1 ist, durch eine Kraft gedehnt wird, die dem Gewichte des Prisma's (hier p) gleich ist, so braucht dasselbe Prisma (und ebenso jeder Theil desselben) zu einer Dehnung um $\frac{d\xi}{dx}$ seiner Länge die Kraft $mp\frac{d\xi}{dx}$, wenn man den Einfluss der bei der Dehnung oder Zusammendrückung entstehenden Wärmeänderung vernachlässigt. Diese Kraft kommt zu der Spannung P hinzu, daher ist jetzt die Kraft an einem Ende a

$$-P - mp\frac{d\xi}{dx}$$

und am andern Ende b

$$P + mp\frac{d\xi}{dx} + mp\frac{d^2\xi}{dx}.$$

Bildet man hieraus, ganz wie früher, die Resultanten nach den drei Coordinatenrichtungen, so erhält man nach der Richtung der x

$$mp\frac{d^2\xi}{dx}$$

und nach denen der y und z, mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

$$P\frac{d^2y}{dx} \text{ und } P\frac{d^2z}{dx}.$$

Die beiden letzten Werthe zeigen, dass für die Transversalschwingungen alle bisherigen Resultate gültig bleiben; aus dem ersten aber erhält man zur Bestimmung der *Longitudinalschwingungen*

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = mg\frac{d^2\xi}{dx^2}$$

und hieraus, ganz dem bisherigen Gange folgend,

$$\xi = F(Ct + x) - F(Ct - z),$$

wo $C = \sqrt{mg}$ und F eine willkührliche Function von solcher Periode bezeichnet, dass

$$F(Ct) = F(Ct + 2L).$$

Daher ist $\frac{2L}{C}$ die Dauer einer Longitudinalschwingung.

Die Bestimmungen der §§. 2. und 3. lassen sich unmittelbar auf die Longitudinalschwingungen übertragen; ebenso, wenn neben ihnen keine transversalen Schwingungen bestehen, die Ergebnisse der §§. 7. und 8. Dasselbe gilt auch von §. 5. und 6., wenn man, was dort von der Gestalt der Saite gesagt ist, hier von ihrer Ausdehnung und Zusammendrückung versteht.

§. 14.

Die Bewegung eines Saitenpunktes im Raume.

Die Bahnen der Saitenpunkte sind jetzt, da Transversal- und Longitudinalbewegungen zugleich stattfinden, im Allgemeinen Linien doppelter Krümmung. Doch lässt sich, was über ihre Bewegung in der Ebene xy gezeigt worden ist, im Allgemeinen nicht auf ihre Bewegung im Raume übertragen, weil c und C zwei verschiedene und von einander unabhängige Werthe sind. Sind diese beiden Werthe incommensurabel, so ist die Bewegung überhaupt nicht periodisch; im entgegengesetzten Falle aber bleiben die früheren Resultate zum Theil auch hier gültig.

Könnte man eine Saite so scharf anspannen, dass $c = C$ würde, d. h. die Dauer einer Transversalschwingung gleich der einer longitudinalen, so würde, was in §. 10. und 11. von der Bewegung der Punkte in einer Ebene gesagt ist, auch auf ihre Bewegung im Raume Anwendung finden, also namentlich ein Punkt, der die Seite in einem irrationalen Verhältniss theilt, jede in sich zurücklaufende, übrigens ganz willkührliche Linie doppelter Krümmung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit durchlaufen können. Denn nennt man u die lon-

gitudinale Geschwindigkeit und v die Resultante aus den beiden transversalen, so kann man aus der willkührlichen ebenen Bahn yz mittelst der beliebigen Aenderung von u jede willkührliche geschlossene Linie im Raume entstehen lassen. Nun bleibt diese Linie dieselbe, wenn man gleichzeitig v und u so abändert, dass der Punkt auf einigen Theilen der Transversalbahn yz länger, auf andern kürzer verweilt, während er zugleich auf den entsprechenden Theilen der Longitudinalbahn ebenso viel mal länger oder kürzer verweilt; man kann daher, ohne Aenderung der Bahn, doch die resultirende Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2}$ ganz beliebig abändern. Ueberhaupt aber ist es unmittelbar einleuchtend, dass jede ganz willkührliche periodische Bewegung durch sechs Gleichungen muss dargestellt werden können, welche die Coordinaten als willkührliche Functionen der Zeit von derselben Periode ausdrücken, also durch sechs Gleichungen von der Form wie (7) und (8).

Sind c und C nicht gleich, aber commensurabel, so dass $pc = qC$, so kann man sich die Saite für die transversalen Schwingen in p und für die longitudinalen in q Theile durch Knoten abgetheilt denken; da dann die beiderlei Schwingungen von gleicher Dauer sind, so wird auch hier noch die Bewegung eines Punktes, welcher die Saite irrational theilt, ganz willkührlich, wie vorhin, nur dass jetzt die Periode $\frac{2L}{pc}$ oder $\frac{2L}{qC}$ ist.

Beiläufig kann hier bemerkt werden, dass man sich eine Bewegung wie die so eben besprochenen, und überhaupt jede periodische Bewegung in der Ebene oder im Raume, wie willkührlich sie auch in Beziehung auf Bahn und Geschwindigkeit angenommen werde, stets als aus lauter elliptischen Centralbewegungen zusammengesetzt denken kann. Denn stellt man sie durch sechs Coordinatengleichungen von der Form wie (7) und (8) dar und verbindet aus diesen immer die sechs Glieder von gleicher Stellenzahl, so erhält man jedesmal eine elliptische Centralbewegung, den Mittelpunkt der Ellipse als Centralpunkt genommen. Auf diese Weise entsteht ein System von Ellipsen, welche im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen liegen, und wobei die Umlaufszeit in der ersten gleich ist der Periode der Bewegung, die in der zweiten halb so gross, in der dritten dreimal kleiner u. s. w., so dass die einzelnen Ellipsen als den einzelnen Tönen der Saite entsprechend gedacht werden können. Es liegt ausser dem Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung auf einige weitere Folgerungen, welche sich hieran knüpfen lassen, einzugehen.

Resultate.

Für *transversale* Schwingungen hat sich ergeben:

Die Saite kann zwei von einander unabhängige ganz willkührliche Gestalten einfacher oder doppelter Krümmung annehmen, wofern nur die Zeit, welche sie gebraucht, um von der einen zur andern Gestalt überzugehn, incommensurabel ist zur Dauer einer Schwingung. Durch beide Gestalten, verbunden mit der Zwischenzeit, ist die ganze Bewegung der Saite bestimmt.

Ein Punkt der Saite, welcher dieselbe in einem irrationalen Verhältniss theilt, kann jede ganz willkührliche Bewegung, sowohl in Beziehung auf Geschwindigkeit als Gestalt der Bahn, annehmen; durch diese ist dann die Bewegung aller übrigen Punkte bestimmt.

Für einen Punkt, der auf $\frac{m}{r}$ der Saite liegt, ist die Bewegung während $\frac{r-1}{r}$ einer Schwingungsdauer in Beziehung auf Bahn und Geschwindigkeit willkührlich, durch sie aber für das übrige $\frac{1}{r}$ bestimmt.

Die Bahn eines solchen Punktes, mit Ausnahme des mittelsten, kann für die Dauer einer ganzen Schwingung willkührlich genommen werden; seine Geschwindigkeit ist dann zwar nicht mehr ganz willkührlich, aber doch unendlich mannigfaltig. Auch umgekehrt kann die Geschwindigkeit willkührlich und die Bahn unendlich mannigfaltig genommen werden.

Die Mitte der Saite beschreibt eine Bahn, welche einen Mittelpunkt hat, und deren Hälften mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Für *longitudinale* Schwingungen gelten ähnliche Bestimmungen, wenn man, was vorhin von der Gestalt der Saite galt, jetzt von ihrer Ausdehnung und Zusammendrückung versteht, und was von der Bewegung der einzelnen Punkte gesagt ist, blos auf ihre Geschwindigkeit bezieht.

Finden transversale und longitudinale Schwingungen zugleich statt, so gelten im Allgemeinen nicht dieselben Bestimmungen für die Bewegung eines Saitenpunktes im Raume; doch ist, wenn die beiderlei Schwingungen von commensurabler Dauer sind, die Bewegung eines Punktes, welcher die Saite irrational theilt, zwar von einer bestimmten Periode, aber sonst in Beziehung auf Geschwindigkeit und Gestalt im Raume ganz willkührlich.

ÜBER DIE

SPIRALEN DER CONCHYLIEN,

VON

C. F. NAUMANN.



Wenn die Ergründung der Gesetzmässigkeit organischer Formen überhaupt als eine interessante Aufgabe mathematischer Forschungen zu betrachten ist, so dürften wohl keine organischen Gebilde zu solchen Forschungen dringender auffordern, als die Conchylien, oder die Schalgehäuse der Acephalen, der Gasteropoden und Cephalopoden. Denn es offenbart sich in den meisten dieser Schalgehäuse eine so bewundernswerthe Regelmässigkeit der Gestaltung, und in den Gehäusen einer und derselben *Species* eine so vollständige, bis in das kleinste Detail zu verfolgende Wiederholung desselben Gestaltungs-Typus, dass diese organischen Gebilde, in Bezug auf Gleichmässigkeit und Uebereinstimmung ihrer specifischen Configuration, die Krystalle der anorganischen Natur bei Weitem übertreffen. Ganz vorzüglich aber und in höchst überraschender Weise gibt sich uns diese Geometrie der organischen Natur in denen, nach gewissen *Spiralen* oder Spiralschraubenlinien aufgewundenen Conchylien vieler Gasteropoden und Cephalopoden zu erkennen; und wer sich nur einigermaassen mit der Betrachtung solcher Formen beschäftigt hat, ja wer nur einmal den centralen Durchschnitt eines Nautilus zu bewundern Gelegenheit hatte, dem wird sich unwillkührlich die Ueberzeugung aufgedrängt haben, dass in diesen Conchylien eine strenge mathematische Gesetzmässigkeit walten müsse, welche sie eben so wohl als einen Gegenstand der Messung und Rechnung erscheinen lässt, wie die Krystallformen des Mineralreiches.

Seitdem nun zuerst durch Moseley *) die Formen gewisser Conchylien in das Gebiet mathematischer Untersuchungen gezogen worden sind, habe auch ich mich mit diesem interessanten Zweige der Morphologie des Thierreiches zu beschäftigen versucht, und bin dabei anfangs auf Resultate gelangt, welche mit denen von Moseley wesentlich übereinstimmen. Die zunächst festgestellte Thatsache ist nämlich die, dass die unmittelbar auf einander folgenden Windungsabstände bei denen in einer Ebene, wie bei denen in einer Kegelfläche gewundenen Conchylien eine *geometrische Progression* nach irgend einem Quotienten p bilden, welcher gewöhnlich einen sehr einfachen numerischen Ausdruck hat**).

---

*) On the geometrical forms of turbinated and discoid shells, in den Philosophical transactions for the year 1838, p. 351 ff.

**) Poggend. Annal. Bd. 50. 1840. S. 223.

Da nun die Windungsabstände einer jeden *logarithmischen* Spirale gleichfalls eine geometrische Progression bilden, so musste man unwillkührlich auf die Vermuthung geführt werden, dass es *diese* Spiralen seien, welche das Windungsgesetz der Conchylien bestimmen. Moseley hat auch wirklich versucht, für mehre Gasteropoden so wie für Nautilus Pompilius die logarithmische Spirale geltend zu machen, und ich selbst wurde bei meinen ersten Untersuchungen (ohne damals Moseley's Arbeit zu kennen) auf dieselbe Ansicht geleitet, indem ich mit der Thatsache der nach einer geometrischen Progression fortschreitenden Windungs*abstände* die Voraussetzung verband, dass auch die successiven Windungs*halbmesser demselben* Gesetze unterworfen seien. Wenn nämlich diese sehr nahe liegende Voraussetzung gegründet war, so *musste* in der That die *logarithmische* Spirale das Windungsgesetz der Conchylien bestimmen, so *musste diese* Linie als die wirkliche *Conchospirale* zu betrachten sein.

Nachdem ich später Moseley's Abhandlung kennen gelernt hatte, glaubte ich um so weniger an der Richtigkeit jener Voraussetzung zweifeln zu dürfen, und veröffentlichte demgemäss einen zweiten Aufsatz*), in welchem ich nicht nur einige allgemeine Eigenschaften der vorausgesetzten Conchospirale entwickelte, sondern auch einige Methoden angab, um aus gewissen Beobachtungselementen die Windungsquotienten der Ammoniten zu berechnen. Es stand mir jedoch damals nur wenig Material und gar kein Instrument zu Gebote, durch welches die erforderlichen Messungen mit hinreichender Genauigkeit hätten ausgeführt werden können**). So kam es denn, dass ich die zwischen Rechnung und Beobachtung vorkommenden Abweichungen theils der unsicheren Messungsmethode, theils dem Umstande zuschrieb, dass die geometrische Gesetzmässigkeit eines *organischen* Naturproductes wohl niemals ganz streng erfüllt sein werde, und noch weit grösseren Perturbationen unterliegen könne, als die Normalform eines Krystalles***).

Gegenwärtig bin ich im Besitze eines zu derartigen Messungen geeigneten Instrumentes, welches wesentlich aus einem Millimeter-Maassstabe besteht,

---

*) Poggendorff's Annalen Bd. 51. S. 245 ff.

**) Ich hatte mir an einigen halb durchbrochenen Ammoniten aus der geognostischen Sammlung der Freiberger Bergakademie centrale Querschnitte angeschliffen, und konnte mich zur Messung nur eines Cirkels bedienen.

***) Ganz abgesehen von den Beobachtungsfehlern und von denen, durch die kaum zu vermeidende Excentricität des Querdurchschnittes veranlassten Fehlern, glaubte ich daher in denen aus meinen Messungen abgeleiteten Resultaten kleine *Schwankungen* erwarten zu können, ohne deshalb die logarithmische Spirale bezweifeln zu dürfen. Ich legte damals der Prüfung meiner Ansicht die Verhältnisse der Windungs*durchmesser* zu Grunde. Sind nämlich D, D' und D'' drei successive, in eine und dieselbe gerade Linie fallende Durchmesser, so müssen die drei Quotienten $\frac{D''}{D'}$, $\frac{D'}{D}$ und $\sqrt{\frac{D''}{D}}$ *gleichen Werth* haben, dafern die Windung wirklich der logarithmischen Spirale folgt. Nun führten in der That die Messungen an einem Exemplare von Ammonites Murchisonae, von A. elegans und von A. Reineccii auf so nahe übereinstimmende Werthe jener Quotienten, dass ich auch für die Ammoniten eine Bestätigung meiner früheren Ansicht gefunden zu haben glaubte. Die ersten Bedenken gegen die Richtigkeit derselben stiegen in mir auf, als ich im Jahre 1845 ein Exemplar von A. communis durchmaass, und dabei auf so bedeutende Differenzen gelangte, wie sie weder durch Beobachtungsfehler, noch durch die Excentricität des Querschnittes, noch durch die, bei organischen Gebilden vorauszusetzenden Perturbationen gerechtfertigt werden konnten.

an welchem ein Mikroskop mit Fadenkreuz und Nonius durch ein Schraubengewinde hin und her bewegt werden kann. Die kreisförmige horizontale Platte, auf welche die zu messende Conchylie aufgelegt wird, ist an ihrem Rande in 360° getheilt, und lässt sich um ihren Mittelpunkt drehen, um Durchmesser nach allen Richtungen hin messen zu können. Mit Hülfe dieses Instrumentes (welches ich Conchyliometer*) nennen will, obwohl es auch zu mancherlei anderen Messungen geeignet ist) war es mir nun möglich, genauere Messungen anzustellen, welche natürlich auch auf richtigere Resultate führen mussten.

Als eines der Hauptresultate dieser neueren Untersuchungen glaube ich es nun hervorheben zu dürfen, dass das Windungsgesetz der meisten Conchylien *gar nicht* durch die logarithmische Spirale, sondern durch eine ganz *andere* und *eigenthümliche* Spirale bestimmt wird, welcher daher mit allem Rechte der Name *Conchospirale* zukommt, Als ein zweites Resultat ist die Thatsache zu bezeichnen, dass diese Conchospirale in verschiedenen Stadien ihrer Entwickelung nach *verschiedenen* Quotienten gewunden sein kann, so dass z. B. bei einem und demselben Ammoniten die *inneren* Windungen einer *anderen* Zahl gehorchen, als die *äusseren* Windungen**).

Im Folgenden will ich nun zuvörderst die Theorie der Conchospirale entwerfen, dann aber versuchen, beide Resultate in der Natur nachzuweisen, und die Richtigkeit derselben durch die Uebereinstimmung darzuthun, welche sich zwischen Rechnung und Messung herausstellt.

I.

THEORIE DER CONCHOSPIRALE.

1) *Von der einfachen Conchospirale.*

§. 1.

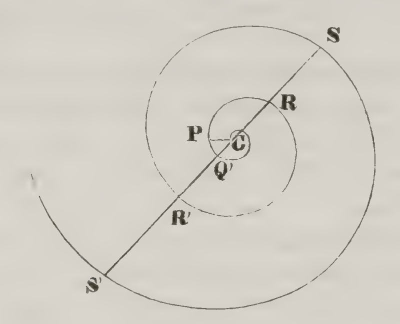
Allgemeine Terminologie. Es ist in dem Wesen der Spiralen überhaupt begründet, dass wir sie nicht auf geradlinige, sondern auf *polare* Coordinaten beziehen müssen, wenn wir die Gesetzmässigkeit ihres Verlaufes erkennen

---

*) Die Nothwendigkeit einer nach Zahl und Maass bestimmten Auffassung der Conchylienformen ist wohl zuerst von Boubée erkannt worden, welcher schon im Jahre 1831 ein Conchyliometer in Vorschlag brachte, dessen Einrichtung wesentlich die des Hauyschen Goniometers ist. Bulletin de la soc. géol. de France. T. I. p. 232. Nachdem später durch Moseley's und meine Untersuchungen auf die mathematische Gesetzmässigkeit der Conchylienformen hingewiesen worden war, gab Alcide d'Orbigny im Jahre 1842 ein ähnliches Instrument an, welches er Helicomètre nennt, und dessen Gebrauch er den Conchyliologen dringend anempfiehlt, da eine genaue Bestimmung der Dimensionen der Conchylien unerlässlich sei (Bulletin de la soc. géol. XIII., p. 200 ff.).

**) Eine vorläufige Notiz über diese beiden Resultate gab ich in Poggendorff's Annalen, Bd. 64, 1845, S. 541 ff.

wollen. Indem man also von einem *ersten* Radius $CP = a$ ausgeht, wird der Verlauf dieser Linien dadurch bestimmt, dass man sich einen um den Mittelpunkt C beweglichen Radius Vector vorstellt, welcher, von der Lage CP ausgehend, successiv im Kreise herumgeführt wird, und dass man für *jede* Lage dieses Radius Vector, oder für jeden Umlaufswinkel v, welchen er mit dem ersten Radius bildet, die Länge r desselben angibt, wie solche durch den betreffenden Punkt der Spirale bestimmt wird.



Den *ersten* Radius $CP = a$ will ich den *Parameter* der Spirale, und jeden besonderen Werth des Radius Vector für einen bestimmten Punkt der Spirale kurzweg den *Radius* dieses Punktes nennen.

Da nun der Radius Vector, nach vollendetem ersten Kreislaufe, einen zweiten, dritten, vierten Kreis u. s. w. beschreiben kann, so wird natürlich der Winkel v nach dem ersten, zweiten, dritten Umlaufe u. s. w. solche Werthe erhalten, welche grösser als 1.2π, 2.2π, 3.2π u. s. w. sein müssen; und gleichwie der erste Umlauf des Radius Vector die *erste* Windung der Spirale liefert, so werden seine folgenden Umläufe die *zweite, dritte, vierte* Windung u. s. w. liefern.

Es ist nun zuvörderst wichtig, sich kurz und bestimmt über die *Lage* der verschiedenen Radien aussprechen zu können, und dazu mag folgende Terminologie dienen*). Drei oder mehre successive Radien, welche *gleiche* Winkelabstände haben, will ich überhaupt *aequidistante* Radien nennen. Zwei (oder auch mehre aequidistante) Radien mögen noch besonders als *singulodistante, semissodistante* und *quadrantodistante* Radien unterschieden werden, je nachdem sie mit einander den Winkel 2π, π oder $\frac{1}{2}\pi$ bilden. Je zwei *singulodistante* Radien CR und CS, oder CR' und CS' fallen also nach *derselben* Richtung vom Mittelpunkte C aus in *eine* gerade Linie, indem der eine nur als die Verlängerung des andern erscheint; je zwei *semisso*distante Radien CR und CR', oder CS und CS' fallen gleichfalls in *eine* gerade Linie, jedoch nach entgegengesetzten Richtungen vom Mittelpunkte aus: sie bilden in ihrer Vereinigung einen *Diameter* der Spirale.

Diese Diameter wollen wir ebenfalls als aequidistante Diameter überhaupt, oder als singulodistante, semissodistante und quadrantodistante Diameter insbesondere bezeichnen, je nachdem sie mit einander gleiche Winkel über-

*) Poggendorff's Annalen. Bd. 50. S. 229.

haupt, oder Winkel von 2π, π und $\frac{1}{2}\pi$ bilden. So sind z. B. in der Figur RR' und SS' zwei *singulo*distante Diameter, dagegen RR', $R'S$ und SS' drei *semisso*distante Diameter.

Unter dem *Windungsabstande* irgend eines Punktes S verstehen wir die radiale Entfernung RS desselben von der unmittelbar vorausgehenden Windung der Spirale; die Windungsabstände einer Windung überhaupt sind also die Differenzen zwischen den singulodistanten Radien *dieser* und der *nächst vorhergehenden* Windung. Auch sie werden als aequidistante, singulodistante, semissodistante und quadrantodistante Windungsabstände unterschieden. In der Figur sind z. B. $Q'R'$ und $R'S'$ zwei singulodistante, RS und $R'S'$ dagegen zwei semissodistante Windungsabstände.

§. 2.

Gleichung der Conchospirale. Diejenige Spirale nun, welche für die meisten*) spiralförmig gewundenen Conchylien das eigentliche Grundgesetz zu liefern scheint, hat die Eigenschaft, dass vom Parameter a aus die Windungsabstände nach einer geometrischen Progression wachsen, oder, dass die vom Mittelpunkte aus in einem und demselben Radius Vector auf einander folgenden *singulodistanten* Windungsabstände eine dergleichen Progression nach irgend einem Quotienten p bilden, welchen ich den *Windungsquotienten* nennen will.

Bezeichnen wir also die Windungsabstände allgemein mit h, und den Winkel, welchen der zu irgend einem Windungsabstand gehörige *grössere* Radius mit dem *ersten* Radius a bildet, mit v, so können wir die successiven singulodistanten Windungsabstände von a aus folgendermaassen ausdrücken:

$$\begin{array}{lll} \text{für } v = 0.2\pi & \text{wird } h = a \\ \text{-}\quad v = 1.2\pi & \text{-}\quad h = ap \\ \text{-}\quad v = 2.2\pi & \text{-}\quad h = ap^2 \\ \text{-}\quad v = 3.2\pi & \text{-}\quad h = ap^3 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \text{-}\quad v = (m-1).2\pi & \text{-}\quad h = ap^{m-1}. \end{array}$$

Der Radius r, welcher irgend einem (z. B. dem $m$ten) Windungsabstande zukommt, ist nun offenbar nichts Anderes als das summatorische Glied der geometrischen Reihe, welche die sämmtlichen bis dahin auf einander folgenden Windungsabstände bilden; folglich wird

$$r = \frac{a}{p-1}(p^m - 1),$$

oder, nach Substitution des Werthes von m,

---

*) Ich will es keinesweges in Abrede stellen, dass gewisse Conchylien auch nach anderen Spiralen gewunden sein können, da ich selbst bis jetzt verhältnissmässig doch nur sehr wenige Species untersucht habe, und da Moseley a. a. O. für mehrere Species die logarithmische Spirale, und Heis (Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der Preussischen Rheinlande, Heft I., 1844, S. 23) für Argonauta Argo die parabolische Spirale gefunden hat.

$$r = \frac{a}{p-1}\left(p^{\frac{v+2\pi}{2\pi}} - 1\right),$$

welches die Gleichung der Conchospirale ist.

Aus dieser Gleichung folgt für $v = -2\pi$

$$r = 0.$$

Es ist also vom Parameter a aus rückwärts noch *eine* Windung möglich, mit welcher die Conchospirale ihren Mittelpunkt erreicht. Für die logarithmische Spirale ist bekanntlich der Mittelpunkt ein asymptotischer Punkt.

Bezeichnet man mit r' den nächst folgenden $x$todistanten Radius, so wird

$$r' = \frac{a}{p-1}\left(p^{m+x} - 1\right)$$

$$= rp^x + \frac{p^x - 1}{p-1}a.$$

Hieraus ersieht man, dass die aequidistanten *Radien* der Conchospirale keinesweges eine geometrische Progression bilden, wie diess in der logarithmischen Spirale der Fall ist; wohl aber haben beide Spiralen *die* Eigenschaft gemein, dass ihre aequidistanten *Windungsabstände* nach einer geometrischen Reihe wachsen.

§. 3.

Bestimmung von p aus den Windungsabständen. Es war

$$\text{für } v = (m-1)2\pi, \quad h = ap^{m-1},$$

und es ist allgemein:

$$\text{für } v = (m+x-1)2\pi, \quad h = ap^x p^{m-1};$$

folglich haben je zwei $x$todistante Windungsabstände das Verhältniss von $1 : p^x$.

Hat man also eine Reihe $x$todistanter Windungsabstände h, h', h'' u. s. w. gemessen, so müssen die Quotienten je zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder solcher Reihe, oder

$$\frac{h'}{h} = \frac{h''}{h'} \dots = p^x$$

sein. Von diesem Verhältnisse wird man Gebrauch machen können, um eigentlich aus je *zwei* gemessenen Windungsabständen von bekannter Angulardistanz x den Windungsquotienten p zu finden. Am einfachsten bieten sich dazu die *singulodistanten* Abstände dar, deren Verhältniss unmittelbar das von $1 : p$ ist. Weil jedoch in der Wirklichkeit kleine Schwankungen vorkommen, auch die Windungsnaht nicht immer mit gleicher Schärfe und Regelmässigkeit ausgebildet ist, so bleibt es immer empfehlenswerth, eine *Reihe* von Windungsabständen zu messen, um aus den verschiedenen Näherungswerthen, welche je zwei derselben für p ergeben, desto sicherer auf den eigentlichen Normalwerth von p schliessen zu können.

Hat man auf solche Weise den wahrscheinlichen Normalwerth von p gefunden, so kann man die Summe der gemessenen Abstände zu Grunde legen,

um daraus die entsprechenden Werthe der einzelnen zu *berechnen*, und wird sich aus der Uebereinstimmung der berechneten und gemessenen Werthe überzeugen, ob jener Normalwerth auch wirklich zulässig sei.

§. 4.

Diameter und Radien der Conchospirale. Die an den Conchylien anzustellenden Messungen werden fast immer mehr oder weniger mit dem Fehler der Excentricität behaftet sein, weil der Mittelpunkt der Spirale in vielen Fällen gar nicht sichtbar, in den meisten Fällen aber mehr oder weniger unsicher bezeichnet ist. Dieser Fehler wird sich jedoch für die *Diameter* in weit geringerem Maasse heraustellen als für die *Radien*, indem ihre Werthe durch eine ungenaue Fixirung des Mittelpunktes weniger alterirt werden, als die Werthe der Radien Aus diesem Grunde erhalten die Diameter für die Anwendung der Theorie eine ganz besondere Wichtigkeit.

Aus der Gleichung

$$r = \frac{a}{p-1}(p^m - 1)$$

folgt unmittelbar, dass der nächste semissodistante Radius

$$r' = \frac{a}{p-1}(p^m p^{1/2} - 1)$$

sein wird. Die *Summe* dieser beiden Radien ist aber derjenige *Diameter* der Spirale, welcher dem Umlaufswinkel $v = (m - \frac{1}{2} 2\pi$ zukommt. Bezeichnen wir also diesen Diameter mit D, so wird

$$D = r' + r = \frac{a}{p-1}[p^m(p^{1/2} + 1) - 2].$$

Unmittelbar aus den vorstehenden Werthen von r und r' (oder auch mittelbar aus denen in §. 2. angegebenen Werthen zweier $x$todistanter Radien) ergiebt sich auch

$$r' = r p^{1/2} + \frac{a}{p^{1/2} + 1}$$

und

$$r = \frac{r'}{p^{1/2}} - \frac{a}{(p^{1/2} + 1)p^{1/2}},$$

wodurch man aus dem kleineren Radius eines Diameters den grösseren finden kann, und umgekehrt, sobald man ausser p und r oder r' auch den Parameter a kennt.

Aus dem Werthe von D folgt aber:

$$r = \frac{D(p^{1/2} + 1) - a}{(p^{1/2} + 1)^2},$$

$$r' = \frac{D(p^{1/2} + 1)p^{1/2} + a}{(p^{1/2} + 1)^2},$$

wodurch man aus irgend einem gemessenen Diameter D die beiden ihn zusammensetzenden Radien finden kann, wenn ausser p und D auch a eine bekannte Grösse ist.

§. 5.

Berechnung von p aus drei Diametern. Aus dem in §. 4. gefundenen Werthe eines Diameter D ergiebt sich der nächstfolgende $x$todistante Diameter

$$D' = \frac{a}{p-1}[p^m(p^{1/2}+1)p^x - 2],$$

und der darauf folgende aequidistante Diameter

$$D'' = \frac{a}{p-1}[p^m(p^{1/2}+1)p^{2x} - 2].$$

Die Differenzen dieser aequidistanten Diameter bestimmen sich also:

$$D' - D = \frac{a}{p-1}p^m(p^{1/2}+1)(p^x - 1),$$

$$D'' - D' = \frac{a}{p-1}p^m(p^{1/2}+1)(p^x - 1)p^x;$$

und folglich wird

$$p^x = \frac{D''-D'}{D'-D}.$$

Demnach kann man auch aus *drei aequidistanten Diametern* den Windungsquotienten p berechnen. Sind diese Diameter singulodistant, so wird

$$p = \frac{D''-D'}{D'-D},$$

und in diesem Falle ist das Resultat sehr einleuchtend, weil dann die Differenzen der Diameter nichts Anderes als die Summen je zweier semissodistanter Windungsabstände sind.

Sind aber die Diameter semissodistant, so wird

$$p = \left(\frac{D''-D'}{D'-D}\right)^2,$$

was ebenfalls für sich begreiflich ist, weil dann beide Differenzen nichts Anderes als zwei semissodistante Windungsabstände sind.

Sind endlich die Diameter quadrantodistant, so wird

$$p = \left(\frac{D''-D'}{D'-D}\right)^4,$$

welche Ausdrücke in vielen Fällen wenigstens zu einer Controle des aus den Windungsabständen gefundenen Werthes von p dienen können.

Aus vorstehenden Werthen von D, D' und D'' ergibt sich übrigens, dass in der *Concho*spirale niemals $\frac{D'}{D} = \frac{D''}{D'} = p^x$ sein kann, während die *logarithmische* Spirale durch diese Eigenschaft ausgezeichnet ist. Dagegen haben beide Spiralen diejenige Eigenschaft gemein, welche durch die Gleichung

$$p^x = \frac{D''-D'}{D'-D}$$

ausgedrückt wird.

§. 6.

Berechnung des Parameters. Der Parameter a ist deshalb ein sehr wichtiges Element, weil er uns den Urwerth aller Windungsabstände und somit eine *absolute Grösse* kennen lehrt, welche für die ganze Entwicklung der Conchylie eine wesentliche Bedeutung haben dürfte *).

Man kann den Parameter sowohl aus je zwei Radien, als auch aus je zwei Diametern von bekannter Angulardistanz x berechnen.

Es folgt nämlich aus denen in §. 2. stehenden Werthen zweier $x$todistanter Radien r und r'

$$r + \frac{a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m.$$

$$r' + \frac{a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m p^x.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich nach den gehörigen Umstellungen:

$$a = \frac{(p-1)(r' - r p^x)}{p^x - 1}.$$

oder, für zwei *singulo*distante Radien:

$$a = r' - p r.$$

Weil jedoch die Radien gewöhnlich weit unsicherer zu messen sind, als die Diameter, so ist es besser, die Berechnung von a auf zwei $x$todistante Diameter D und D' zu gründen, deren allgemeine Ausdrücke in §. 4. und 5. stehen. Aus diesen leitet man zuvörderst ab:

$$D + \frac{2a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1).$$

$$D' + \frac{2a}{p-1} = \frac{a}{p-1} p^m (p^{1/2} + 1) p^x.$$

Man dividirt hierauf die zweite Gleichung durch die erste, und erhält zuletzt:

$$a = \frac{(p-1)(D' - p^x D)}{2(p^x - 1)}.$$

Sind also die Diameter singulodistant, so wird

$$a = \frac{1}{2}(D' - p D).$$

sind sie dagegen semissodistant, so folgt

$$a = \frac{1}{2}(p^{1/2} + 1)(D' - p^{1/2} D).$$

Man wird gewöhnlich im Stande sein, entweder zwei singulodistante, oder doch wenigstens zwei semissodistante Diameter zu messen, um aus ihnen den Werth von a zu berechnen. In vielen Fällen wird man sogar eine *Reihe* von

---

*) Zoologen, welche sich für diese Untersuchungen interessiren sollten, werden durch Beobachtungen an lebenden Gasteropoden in verschiedenen Stadien der Entwickelung die physiologische Bedeutung des Parameters a nachzuweisen vermögen. Es wäre wohl möglich, dass er den Zustand des Embryo und den des frei gewordenen Thieres unterscheidet.

singulodistanten Diametern messen können, und dann einen der Wahrheit ziemlich nahe kommenden Mittelwerth von a finden *).

§. 7.

Bestimmungen des Umlaufswinkels v oder $(m-1)2\pi$. Nachdem die constanten Elemente p und a für die Conchospirale gefunden worden sind, kann man sehr leicht für einen jeden beliebigen, dem Windungsabstande h entsprechenden Punkt derselben den zugehörigen Umlaufswinkel v des Radius Vector berechnen. Es ist nämlich nach §. 2. allgemein

$$\text{für } v=(m-1)2\pi, \quad h=ap^{m-1}.$$

Hieraus folgt

$$m-1=\frac{\log h-\log a}{\log p},$$

oder, weil $m-1=\frac{v}{2\pi}$,

$$v=\frac{(\log h-\log a)2\pi}{\log p}.$$

Man sieht also, dass sich aus einigen Windungsabständen und ein paar Diametern der Conchospirale sämmtliche Elemente derselben mit grosser Leichtigkeit berechnen lassen, und wird hieraus die Ueberzeugung gewinnen, dass *diese* Spirale allerdings weit interessantere Resultate liefert, als die logarithmische Spirale, deren Parameter *nur* auf dem Wege unmittelbarer Beobachtung gefunden werden kann.

§. 8.

Tangential-Winkel der Conchospirale. Bekanntlich ist der allgemeine Ausdruck für die Subtangente einer Curve bei polaren Coordinaten:

$$\text{Subtang.}=\frac{r^2dv}{dr}.$$

Nun war die Gleichung der Conchospirale

$$r=\frac{a}{p-1}(p^m-1),$$

wo m die Grösse $\frac{v+2\pi}{2\pi}$ repräsentirt. Aus dieser Gleichung derivirt sich zunächst der Differentialquotient

$$\frac{dm}{dr}=\frac{p-1}{ap^m\log p}.$$

Weil jedoch $dm=\frac{dv}{2\pi}$, so folgt:

$$\frac{dv}{dr}=\frac{2\pi(p-1)}{ap^m\log p}.$$

---

*) Erhält man für a einen *negativen* Werth, so wird man in der Regel zu dem Schlusse berechtigt sein, dass keine einfache Spirale vorhanden ist, dass die gemessenen Diameter der äusseren Spirale einer Diplospirale angehören, und dass also die *inneren* Windungen auf eine *andere* Spirale zu beziehen sind (§. 15.).

Man findet aber den Tangentialwinkel φ, oder den Neigungswinkel, welchen die Tangente mit dem Radius bildet, indem man die Subtangente durch den Radius dividirt; folglich wird

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{r\,dv}{dr} = \frac{2\pi(p^m - 1)}{p^m \log p}.$$

Hieraus ergibt sich, dass in der Conchospirale der Tangentialwinkel *nicht constant,* sondern einer fortwährenden Veränderung unterworfen ist, während sich die logarithmische Spirale bekanntlich durch die Beständigkeit dieses Winkels anszeichnet.

Der vorstehende Ausdruck*) von tang φ bezieht sich auf denjenigen Punkt der Conchospirale, welcher durch den Umlaufswinkel $v = (m - 1)2\pi$ bestimmt wird. Ist nun $v = 0$, so muss $m = 1$ sein; folglich beginnt die Spirale mit einem Tangentialwinkel, für welchen

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{2\pi(p-1)}{p \log p}.$$

Da nun aber die Spirale unzählige Umläufe machen kann, so wird sich diese Tangente dem Werthe $\frac{2\pi}{\log p}$ immer mehr nähern, ohne ihn doch jemals zu erreichen.

Für $v = -2\pi$, d. h. für den Mittelpunkt der Spirale wird endlich $m = 0$, folglich auch

$$\text{tang}\ \varphi = 0.$$

Vom Mittelpunkte aus durchläuft also der Tangentialwinkel alle möglichen Werthe zwischen 0° und jenem unerreichbaren Maximum, welches durch den Werth von tang $\varphi = \frac{2\pi}{\log p}$ bestimmt wird.

2) *Von der zusammengesetzten Conchospirale.*

§. 9.

Begriff der zusammengesetzten Spirale. Es ist eine Eigenthümlichkeit der Conchospirale, welche wir in der Natur selbst vielfach bestätigt finden, dass sie mitten in ihrem Verlaufe von *einem* Windungsquotienten p auf einen *anderen* Quotienten q übergehen kann; ja, es ist nicht nur möglich, sondern scheint auch in der Wirklichkeit vorzukommen, dass die Conchospirale in ihrer Entwickelung successiv durch *mehre* Quotienten, p, q, s, u. s. w. bestimmt wird. Da sich nun in allen solchen Fällen die *ganze* Spirale aus zweien oder mehren *Theilen* zusammengesetzt erweist, deren jeder sein *besonderes* Gesetz befolgt, so können wir dergleichen Spiralen als *zusammengesetzte* Spiralen überhaupt bezeichnen, und als *Diplo*spiralen, *Triplo*spiralen u. s. w. unterscheiden, je nachdem sie in ihrem Verlaufe durch zwei, drei oder mehre verschiedene Quotienten bestimmt werden. Wir wollen uns vor der Hand nur auf die Be-

*) Es bedarf kaum der Bemerkung, dass in diesem Ausdrucke von tang φ unter $\log p$ der natürliche, und nicht der gemeine Logarithmus zu verstehen ist.

trachtung der Diplospiralen beschränken, welche allerdings in den Conchylien eine ganz gewöhnliche Erscheinung sind, und in deren Theorie auch diejenige aller mehrfach zusammengesetzten Spiralen begründet ist.

Die Diplospiralen sind also solche Conchospiralen, welche nach innen und nach aussen durch zwei verschiedene Windungsquotienten p und q bestimmt werden. Sie bestehen deshalb aus zwei verschiedenen Theilen, aus einer *inneren* und einer *äusseren* Spirale, und können als *entosthene* und *exosthene* Diplospiralen unterschieden werden, je nachdem der *innere* Quotient p, oder der *äussere* Quotient q einen grösseren Werth hat.

§. 10.

Gleichung der äusseren Spirale. Es sei uns irgend eine einfache Conchospirale mit der Gleichung

$$r = \frac{p-1}{a}(p^m - 1)$$

oder

$$r = \frac{a}{p-1}\left(p^{\frac{v+2\pi}{2\pi}} - 1\right)$$

gegeben. Denken wir uns nun, dass diese Spirale bei dem Umlaufswinkel v plötzlich aufhört, das bis dahin giltige Gesetz der Windungsabstände zu befolgen, wie solches durch die Reihe

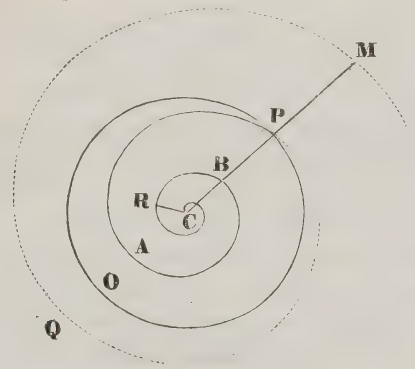
$$a,\ ap,\ ap^2,\ ap^3\ \ldots\ldots\ ap^{m-1}$$

bestimmt wird, und dass sie von dem zuletzt erreichten Windungsabstande ap^{m-1} aus anfängt, ihre *ferneren* Windungsabstände nach einem anderen Quotienten q oder nach der Reihe

$$ap^{m-1},\ aqp^{m-1},\ aq^2p^{m-1},\ aq^3p^{m-1}\ \text{u. s. w.}$$

zu bilden, so haben wir die Grundansicht für die Entwickelung einer Diplospirale gewonnen*).

Um die Sache anschaulicher zu machen, so sei $CBAP$ (s. d. Fig.) die innere Spirale, P derjenige Punkt, wo sie aufhört, also BP ihr letzter Win-



*) Künftige Untersuchungen werden darüber entscheiden müssen, ob zwischen je zwei auf einander folgenden Quotienten p und q ein bestimmtes Abhängigkeitsverhältniss stattfindet oder nicht. Ein so neues und fast noch ganz uncultivirtes Gebiet der angewandten Mathematik verspricht wohl dem Mathematiker wie dem Conchyliologen noch manche interessante Entdeckung.

dungsabstand ap^{m-1}; so wird nun BP gewissermaassen der Parameter der in P beginnenden äusseren Spirale PQM, deren Windungsabstände nach dem Quotienten q fortschreiten, so dass z. B. $PM = aqp^{m-1}$, u. s w.

Für den letzten Radius CP der inneren Spirale gilt

$$R = \frac{a}{p-1}(p^m - 1),$$

und für den nächst vorausgehenden singulodistanten Radius CB

$$R' = \frac{a}{p-1}(p^{m-1} - 1).$$

Es fragt sich nun vor allen Dingen, *wie* wir uns eigentlich den *Uebergang* aus der einen Spirale in die andere, oder die *Verknüpfung* beider Spiralen vorstellen sollen. In dieser Hinsicht bieten sich für die Auffassung des ganzen Problemes besonders *zwei* verschiedene Methoden dar, je nachdem man nämlich die *erste* Windung der äusseren Spirale in dieser oder in jener Art ausgebildet denken will Die in ihren Folgerungen einfachste Vorstellung ist unstreitig die, dass man sich mit dem *letzten* Radius der *inneren* Spirale einen *Kreis* beschrieben denkt, um welchen sich die äussere Spirale, gleichsam wie um ihr Fundament, dergestalt entwickelt, dass ihr Windungsabstand am Ende der ersten Windung $= aqp^{m-1}$ wird. Eine ganz andere, zwar an und für sich einfachere, allein in ihren Folgerungen etwas schwierigere Vorstellung ist die, dass die *erste* Windung der *äusseren* Spirale sich unmittelbar um die *letzte* Windung der *inneren* Spirale dergestalt entwickelt, dass für jeden, durch den Umlaufswinkel $v + z.2\pi$ bestimmten Punkt dieser ersten Windung $h = aq^z p^{m-1}$ wird.

Da mir Zeit und Umstände bisher nicht erlaubten, meine Untersuchungen hinreichend auszudehnen, um ein bestimmtes Urtheil darüber fällen zu können, *welche* von diesen beiden Vorstellungen eigentlich der Natur entspricht, so will ich an gegenwärtigem Orte nur die erstere ausführlich entwickeln, indem ich mir die Entwickelung der zweiten Ansicht und die Vergleichung der beiderseitigen Resultate für eine andere Gelegenheit vorbehalte*).

Man beschreibe also mit dem letzten Radius $CP = R$ der inneren Spirale um den Mittelpunkt C den Kreis PO, so kann sich die äussere Spirale wohl auf eine ähnliche Weise um diesen Kreis entwickeln, wie sich die innere Spirale um den Mittelpunkt entwickelte. Der Mittelpunkt hat sich für die äussere Spirale gleichsam zu dem Kreise PO ausgedehnt, und wir haben daher den constanten Radius dieses Kreises sorgfältig zu berücksichtigen, wenn wir die Gleichung der äusseren Spirale vom Mittelpunkte aus finden wollen.

Um jedoch beide Spiralen im Zusammenhange zu behalten, müssen wir die Umlaufswinkel des Radius Vector aus der inneren Spirale in die äussere Spirale fortrechnen. Der letzte Umlaufswinkel der inneren Spirale war $v = (m - 1)2\pi$; bezeichnen wir also mit w die Umlaufswinkel der äusseren Spirale, und beziehen wir dieselbe auf die Kreisperipherie des Radius R, so wird

*) Eine sehr genaue Untersuchung diplospiraler Conchylien in derjenigen Region ihrer Windung, wo der *Uebergang* aus der inneren in die äusseren Spirale stattfindet, wird allein zu einer bestimmten Entscheidung der Frage gelangen lassen.

$$\begin{array}{ll}
\text{für } w = v, & h = 0 \\
\text{-}\ \ w = v + 2\pi, & h = aqp^{m-1} \\
\text{-}\ \ w = v + 2.2\pi, & h = aq^2p^{m-1} \\
\text{-}\ \ w = v + 3.2\pi, & h = aq^3p^{m-1} \\
\vdots & \vdots \\
\text{-}\ \ w = v + n.2\pi, & h = aq^np^{m-1}.
\end{array}$$

Als das summatorische Glied der in diesen Werthen von h gegebenen Reihe bestimmt sich aber:

$$S = \frac{ap^{m-1}}{q-1}(q^n - 1)\,q,$$

oder, nach Substitution der durch die Winkel v und w ausgedrückten Werthe von m und n,

$$S = \frac{a\,p^{\frac{v}{2\pi}}}{q-1}\left(q^{\frac{w-v}{2\pi}} - 1\right)q,$$

welcher Ausdruck als die Gleichung der äusseren Spirale zu betrachten ist, sofern solche auf die Kreisperipherie des Halbmessers R bezogen wird.

§. 11.

Gleichung der Diplospirale. Will man die äussere Spirale auf den Mittelpunkt beziehen, so hat man zu S die Grösse R (§. 10.) zu addiren, und erhält dadurch den Ausdruck für den *vollständigen* Radius der äusseren Spirale:

$$\begin{aligned}
r &= R + S, \\
&= R + \frac{a\,p^{m-1}}{q-1}(q^n - 1)\,q, \\
&= \frac{a}{p-1}(p^m - 1) + \frac{a\,p^{m-1}}{q-1}(q^n - 1)\,q.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun in der That als die *Gleichung* der Diplospirale betrachten, wenn man nämlich sorgfältig darauf achtet, dass die Grösse m eine *constante* Zahl bedeutet, so lange $n > 0$ ist, und dass sie erst dann als eine *veränderliche* Grösse gelten kann, wenn $n = 0$ geworden ist, mit welchem Werthe die äussere Spirale verschwindet, und wiederum der Radius

$$r = \frac{a}{p-1}(p^m - 1)$$

wird, wie er anfänglich für die innere Spirale bestimmt worden war.

Dass sich aber die äussere Spirale wirklich um die Kreisperipherie des Radius R entwickelt, diess ergibt sich aus dem Ausdrucke von S (§. 10.), welcher für $n = 0$ den Werth 0, für $n = 1$ den Werth aqp^{m-1} erhält, woraus folgt, dass die *erste* Windung der *äusseren* Spirale im Punkte P (s. d. Fig. §. 10.) beginnend, sich um den Kreis PO, als ihr eigentliches Fundament, dergestalt windet, dass ihr Windungsabstand bei $P = 0$, bei $M = aqp^{m-1}$ ist.

Für irgend einen Punkt der *ersten* Windung der äusseren Spirale, dessen Umlaufswinkel $= v + z.2\pi$ (wobei der Werth von z zwischen 0 und 1 liegt),

ist der zugehörige Windungsabstand von der *letzten* Windung der inneren Spirale:

$$h = ap^{m-1}\left[\frac{p-p^z}{p-1} + \frac{(q^z-1)q}{q-1}\right],$$

welcher Werth für $z = 0$

$$h = ap^{m-1},$$

und für $z = 1$

$$h = ap^{m-1}q$$

gibt. In dieser ersten Windung findet daher ein ganz eigenthümliches Gesetz der Windungsabstände statt, wie diess auch für sie, als ein *Uebergangsglied* der inneren Spirale in die äussere, zu erwarten war.

§. 12.

Bestimmung der Windungsquotienten p und q. Je zwei $x$todistante Windungsabstände haben in der *äusseren* Spirale ebenso das Verhältniss von $1 : q^x$, wie in der *inneren* Spirale das Verhältniss von $1 : p^x$, und es findet demnach Alles, was in §. 3. zur Bestimmung des Windungsquotienteu p gesagt worden ist, wiederum seine Anwendung bei der Bestimmung von q.

Man wird also auch durch Messung mehrer aequidistanter Windungsabstände $h, h'; h''$ u. s. w. der inneren und der äusseren Spirale zur Kenntniss von p und q gelangen, indem die Quotienten $\frac{h'}{h}$, $\frac{h''}{h'}$ u. s. w. einerseits den Werth p^x, anderseits den Werth q^x geben. Am zweckmässigsten ist und bleibt es übrigens in allen Fällen, wo möglich*) *singulodistante* Windungsabstände zu Grunde zu legen, weil dann jeder der Quotienten $\frac{h'}{h}$, $\frac{h''}{h'}$ u. s. w. *unmittelbar* auf p oder q gelangen lässt.

Ueberhaupt aber liefert uns eine vollständige Reihe singulodistanter Windungsabstände das einfachste *Erkennungs*mittel des *Vorhandenseins* einer Diplospirale, und es ist daher sehr empfehlenswerth, eine dergleichen Reihe so weit als möglich vom Mittelpunkte aus bis an die äusserste Windung hin zu messen. Man bildet dann die Reihe der Quotienten $\frac{h'}{h}$, $\frac{h''}{h'}$ u. s. w. und überzeugt sich leicht, ob sie durchgängig auf *denselben* Werth verweisen, oder ob sie nach innen einen *anderen* Werth geben, als nach aussen. Im letzteren Falle ist eine Diplospirale angezeigt, und dann wird man gewöhnlich für denjenigen Quotienten $\frac{h'}{h}$, welcher durch den *letzten* Windungsabstand h der inneren, und den *ersten* Windungsabstand h' der äusseren Spirale bestimmt wird, einen, sowohl von p als auch von q *abweichenden* Werth erhalten.

Diess ist auch ganz natürlich, weil im Allgemeinen ein letzter Windungsabstand h der inneren Spirale den Werth $ap^z q^{m-2}$, ein erster Windungsabstand der äusseren Spirale dagegen den zu Ende des vorigen §. stehenden Werth hat, und folglich der Quotient $\frac{h'}{h}$ für *diese* beiden Abstände nur dann

*) Denn allerdings können Fälle vorkommen, wo diess *nicht* mehr möglich ist.

entweder $= p$ oder $= q$ gefunden werden kann, wenn zufällig die Reihe der Windungsabstände in demjenigen Radius Vector gemessen worden ist, für welchen $z = 0$ oder $= 1$ ist.

§ 13.

Diameter der Diplospirale. Die *inneren* Diameter einer Diplospirale, so weit solche nämlich nach p gewunden ist, haben wir bereits in den §§. 4. und 5. betrachtet. Es kann sich daher nur noch um die äusseren Diameter handeln, welche dem nach q gewundenen Theile der Diplospirale angehören Ein jeder solcher Diameter D besteht aber wiederum aus der Summe zweier semissodistanter Radien r und r'; nun war allgemein (§. 11.)

$$r = R + \frac{a p^{m-1}}{q-1}(q^n - 1)q,$$

oder auch, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a q p^{m-1}}{q-1} = A$ setzen,

$$r = R + A(q^n - 1),$$

folglich wird der nächst grössere semissodistante Radius

$$r' = R + A(q^n q^{1/2} - 1),$$

und daher

$$D = r + r' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1) - 2],$$

welches der allgemeine Ausdruck des, dem Umlaufswinkel $w + \pi$ entsprechenden Diameters ist.

§. 14.

Berechnung von q aus drei Diametern der Diplospirale. Der nächst grössere $x$todistante Diameter D' bestimmt sich

$$D' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1)q^x - 2],$$

und der darauf folgende aequidistante Diameter

$$D'' = 2R + A[q^n(q^{1/2} + 1)q^{2x} - 2].$$

Bildet man die Differenzen $D'' - D'$ und $D' - D$, so folgt

$$q^x = \frac{D'' - D'}{D' - D}.$$

Also kann man auch den Windungsquotienten q der äusseren Spirale aus drei aequidistanten Diametern derselben berechnen, gerade so, wie diess in §. 5. für p in Betreff der inneren Spirale gezeigt worden ist. Sind diese Diameter singulodistant, so wird

$$q = \frac{D'' - D'}{D' - D},$$

sind sie dagegen semissodistant, so folgt

$$q = \left(\frac{D'' - D'}{D' - D}\right)^2.$$

Für ganze (d. h. nicht durchschnittene) Ammoniten ist diess oft die einzige Methode, um zur Kenntniss von q zu gelangen; doch muss man sich dabei

dreier quadrantodistanter Diameter bedienen, weshalb die Messungen mit grosser Genauigkeit angestellt werden müssen.

§. 15.

Bestimmung von a in der Diplospirale. Man kann aus je zweien Radien r und r', oder auch aus je zweien Diametern D und D' der äusseren Spirale den Parameter a berechnen, sobald nämlich vorausgesetzt wird, dass m oder der Umlaufswinkel bekannt sei, bei welchem die innere Spirale endigt und die äussere Spirale beginnt.

Es ist nämlich nach §. 13. allgemein in der Diplospirale für den Umlaufswinkel $w = v + n.2\pi$

$$r = R + A(q^n - 1),$$

und es wird also irgend ein grösserer $x$todistanter Radius

$$r' = R + A(q^n q^x - 1).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$r' - R + A = (r - R + A)q^x;$$

$$R - A = \frac{r q^x - r'}{q^x - 1}.$$

Substituirt man hierin die in §. 12. und §. 13. stehenden Werthe von R und A, so ergiebt sich

$$a = \frac{(r q^x - r')(p-1)(q-1)}{(q^x - 1)[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

oder für singulodistante Radien, d. h. wenn $x = 1$,

$$a = \frac{(r q - r')(p-1)}{(q-p)p^{m-1} - q + 1}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $q = p$, so erhält man natürlich dieselben Werthe, wie oben in §. 6.

Macht man die Bestimmung des Parameters a auf ähnliche Weise von zwei $x$todistanten *Diametern* D und D' abhängig, so wird zunächst

$$R - A = \frac{D q^x - D'}{2(q^x - 1)},$$

woraus sich dann ergiebt:

$$a = \frac{(D q^x - D')(p-1)(q-1)}{2(q^x - 1)[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

oder, für singulodistante Diameter:

$$a = \frac{(D q - D')(p-1)}{2[(q-p)p^{m-1} - q + 1]},$$

welche beide Ausdrücke für $q = p$ auf die in §. 6. stehenden Werthe zurückkommen. So lange $q > p$ ist, wird der Nenner dieses Ausdruckes in der Regel einen positiven Werth haben; dagegen muss für $q < p$ derselbe Nenner, und folglich auch der Factor $Dq - D'$ des Zählers, einen *negativen* Werth erhalten. Hierdurch wird also die in §. 6. aufgestellte Behauptung gerechtfertigt, dass ein *negativer* Werth von $D' - qD$ auf eine exosthene Diplospirale und darauf schliessen lässt, dass die gemessenen Diameter einer *äusseren* Spi-

rale angehören, welche noch eine innere umschliesst. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich auch für den aus zwei *Radien* r' und r bestimmten Werth von a.

Ich habe diese Werthe von a angeführt, einestheils um zu zeigen, dass sie für $q = p$ wirklich in die oben gefundenen Werthe übergehen, anderntheils um sie bei der Berechnung von p^{m-1} zu Grunde zu legen.

Weil nämlich diese ganze Bestimmung von a die Kenntniss der Grösse p^{m-1} oder m erfordert, welche doch eigentlich gar nicht vorausgesetzt werden kann, so müssen wir immer danach trachten, den Werth von a lediglich aus den Verhältnissen der *inneren* Spirale nach Anleitung von §. 6., und ganz unabhängig von der äusseren Spirale zu ermitteln.

§. 16.

Gränzpunkt der äusseren und inneren Spirale. Ein sehr wichtiges Element der Diplospirale ist derjenige Punkt, in welchem die innere Spirale zu Ende geht, und die äussere Spirale ihren Anfang nimmt*). Dieser Punkt wird durch den Radius R oder auch durch den Umlaufswinkel $v = (m-1)2\pi$ bestimmt. Nun ist $m-1$ immer nur als Exponent von p gegeben; folglich handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Grösse p^{m-1}. Da wir voraussetzen, dass die beiden Windungsquotienten p und q, und der Parameter a bereits gefunden worden sind, so werden wir durch die in §. 15. stehenden Werthe von a in den Stand gesetzt, die Grösse p^{m-1} entweder aus zwei Radien, oder auch aus zwei Diametern von bekannter Angulardistanz zu berechnen.

Aus dem, durch zwei $x$todistante *Radien* r und r' der äusseren Spirale bestimmten Werthe von a folgt nämlich:

$$p^{m-1} = \frac{(q-1)[(rq - r')(p-1) + a(q^x-1)]}{a(q-p)(q^x-1)},$$

was für zwei semissodistante Radien

$$= \frac{(q^{1/2}+1)[(rq^{1/2}-r')(p-1) + a(q^{1/2}-1)]}{a(q-p)},$$

und für zwei singulodistante Radien

$$= \frac{(rq-r')(p-1) + a(q-1)}{a(q-p)}$$

wird. Ebenso folgt aus dem durch zwei $x$todistante *Diameter* D und D' bestimmten Werthe von a:

$$p^{m-1} = \frac{(q-1)[(Dq^x - D')(p-1) + 2a(q^x-1)]}{2a(q-p)(q^x-1)} = M,$$

was für zwei semissodistante Diameter

$$= \frac{(q^{1/2}+1)[(Dq^{1/2}-D')(p-1) + 2a(q^{1/2}-1)]}{2a(q-p)},$$

und für zwei singulodistante Diameter

*) Es ist möglich, dass es für je zwei auf einander folgende Windungsquotienten einen *nothwendig* bestimmten Punkt giebt, wo die innere Spirale zu Ende geht; doch ist es mir bis jetzt nicht gelungen, weder die Existenz noch die Bedingung eines solchen Verhältnisses aufzufinden.

$$= \frac{(Dq - D')(p-1) + 2a(q-1)}{2a(q-p)}$$

wird. Hat man so die Grösse p^{m-1} berechnet, so ist es leicht, den Umlaufswinkel $(m-1)2\pi$ zu finden. Aus $p^{m-1} = M$ folgt nämlich

$$m - 1 = \frac{\log M}{\log p},$$

und daher endlich

$$v = (m-1)2\pi = \frac{2\pi \log M}{\log p},$$

wodurch der Gränzpunkt beider Spiralen gefunden ist.

§. 17.

Tangentialwinkel der äusseren Spirale. Aus der Gleichung

$$r = R + A(q^n - 1)$$

folgt durch Differentiirung:

$$dr = Aq^n \log q\, dn$$

nun war aber $n = \frac{w-v}{2\pi}$, in welchem Ausdrucke v constant vorausgesetzt wird. Folglich ergiebt sich

$$2\pi\, dr = A q^n \log q\, dw$$

und die Tangente des Tangentialwinkels ψ

$$\tang \psi = \frac{r\,dw}{dr} = \frac{2\pi[R + A(q^n - 1)]}{A q^n \log q}.$$

Setzt man in diesem Werthe $q = p$, so ist die äussere Spirale nur die, bis zu dem Umlaufswinkel $(m-1+n)2\pi$ verlängerte Fortsetzung der inneren Spirale, und dann wird

$$\tang \psi = \frac{2\pi(p^{m+n} - 1)}{p^{m+n} \log p} = \tang \varphi \text{ in §. 8.}$$

Setzt man $n = 0$, so wird

$$\tang \psi = \frac{2\pi R}{A \log q} = \frac{2\pi(p^m - 1)(q-1)}{q \log q\,(p-1)p^{m-1}},$$

mit welchem Tangentialwinkel die äussere Spirale beginnt.

Setzt man endlich $n = \infty$, so erhält man

$$\tang \psi = \frac{2\pi}{\log q},$$

oder den Gränzwinkel, welchem sich die äussere Spirale immer mehr nähert, ohne ihn doch jemals zu erreichen.

§. 18.

Schlussbemerkung. Indem ich hiermit die theoretischen Betrachtungen über die Diplospirale abbreche, bemerke ich nochmals, dass ich denselben nur einen hypothetischen Werth zuschreiben kann, weil es mir bis jetzt noch nicht gelungen ist, darüber Gewissheit zu erlangen, ob die ihnen zu Grunde liegende Ansicht über die Verknüpfung beider Spiralen der Natur völlig angemessen ist.

Sollte nicht sie, sondern die zweite der in §. 10. angedeuteten Ansichten das wahre Verhältniss ausdrücken, so würde sich die Gleichung der äusseren Spirale zunächst in folgender Form herausstellen:

$$r = a \left[\frac{p^{z} p^{m-1} - 1}{p - 1} + \frac{q^{z} p^{m-1} (q^{n} - 1)}{q - 1} \right],$$

worin n die Anzahl von *ganzen* Peripherien und z den *Ueberschuss* über solche bedeutet, welche der Umlaufswinkel $w = v + (n + z) 2\pi$ vom Anfangspunkte der äusseren Spirale an zurückgelegt hat*).

Noch glaube ich Folgendes erwähnen zu müssen. In den meisten Fällen vollendet wohl jede der beiden Spiralen, aus welchen die Diplospirale besteht, *mehre* Windungen, so dass man aus den singulodistanten Windungsabständen nach §. 12. die Quotienten p und q bestimmen kann. Es wäre jedoch möglich, dass es Diplospiralen (und besonders auch Triplospiralen, überhaupt Pleospiralen) gibt, in denen sich der Windungsquotient von einer Windung zur andern verändert**), ja es könnten sogar Fälle vorkommen, bei welchen sich innerhalb einer und derselben Windung successiv verschiedene Quotienten geltend machen. In allen derartigen Fällen ist die so einfache und sichere Methode, den Windungsquotienten aus *singulo*distanten Abständen zu bestimmen, gar nicht mehr anwendbar; vielmehr muss man dann zur Messung *nahe* liegender Windungsabstände seine Zuflucht nehmen, also quadrantodistante, ja vielleicht octantodistante, oder irgend andere aequidistante Abstände messen. Je näher sich aber die zu messenden Abstände liegen, um so genauer müssen die Messungen angestellt werden, und um so mehr muss man darauf bedacht sein, ein möglichst regelmässig gestaltetes Exemplar zur Messung auszuwählen

Uebrigens würden dergleichen Messungen *nahe* liegender (aequidistanter) Windungsabstände in der Uebergangsregion zweier auf einander folgender Spiralen, das sicherste Prüfungsmittel abgeben, *welche* von den beiden Vorstellungsweisen über das Verhältniss dieser Spiralen die wahre ist. Die zweite Vorstellungsweise würde allein zu der Folgerung berechtigen, dass die $x$todistanten Windungsabstände in *allen* Regionen *unmittelbar* auf die Kenntniss des Windungsquotienten in der $x$ten Potenz gelangen lassen.

---

*) Ungeachtet dieser verschiedenen Gleichung folgen doch Resultate, welche zum Theil mit denen aus der Gleichung des §. 11. abgeleiteten Resultaten sehr viel Uebereinstimmung zeigen.

**) Sollte nicht auch Nautilus Pompilius hierher gehören? —

II.

NACHWEISUNG DER CONCHOSPIRALE IN DER NATUR.

1) *Gasteropoden.*

§. 19.

Allgemeine Bemerkungen. Die meisten Gasteropoden scheinen ihre Windungen nach dem Gesetze der Conchospirale zu bilden, indem die Windungsnaht von dem Anfangspunkte der Windungsaxe aus in der Fläche eines Spiralcylinders herabsteigt, dessen Horizontalprojection oder Querschnitt eine Conchospirale ist.

Der Descensionswinkel der Windungsnaht (oder der Suturalwinkel, wie ihn Alcide d' Orbigny nennt) ist in den meisten Geschlechtern *constant;* in einigen Geschlechtern jedoch veränderlich. Wir wollen uns an gegenwärtigem Orte nur mit dem ersteren Falle beschäftigen, dessen Bedingung auf die Folgerung führt, dass die Windungsnaht in der developpirten Cylinderfläche eine *gerade Linie* bildet *).

Sehr häufig kommen bei den Gasteropoden Diplospiralen und wohl auch Triplospiralen vor, was sich gewöhnlich in der Totalform des Windungskegels sehr leicht zu erkennen gibt. Es ist nämlich eine bekannte Thatsache, dass dieser Windungskegel zwar in einigen Species von Anfang bis Ende als ein einziger und völlig *gerad*liniger Kegel ausgebildet ist (z. B. Trochus Conulus u. a.); dass er dagegen in vielen Species nach unten steiler abfällt als nach oben, während wiederum in anderen Species das Gegentheil statt findet **). Dieses oft recht auffallende Gestaltungsverhältniss des Windungskegels steht nun mit dem Charakter der ihm zu Grunde liegenden Spirale im genauesten Zusammenhange. Fällt der Windungskegel in seiner ganzen Länge unter *demselben* Winkel ab, so hat die Conchylie eine *einfache* Spirale; erscheint dagegen der Kegel nach unten entweder *flacher* oder *steiler* abfallend als nach oben (also concav oder convex), so ist *wenigstens* eine *Diplo*spirale, und zwar im ersteren Falle eine exosthene, im anderen Falle eine entosthene Diplospirale angezeigt. In allen solchen Fällen besteht der Windungskegel eigentlich aus zweien oder mehren Kegeln, indem ein oberer Kegel auf dem schräg abgestumpften Ende eines unteren Kegels aufgesetzt ist.

Bei den sehr lang gestreckten und spitz kegelförmigen Conchylien waltet die eine Spirale oft sehr vor, indem sie den grössten Theil des Windungskegels beherrscht. Man gibt sich dann wohl leicht der Vermuthung hin, dass nur *eine* Spirale vorhanden sei, wird aber doch nicht selten an der Spitze des Kegels eine zweite Spirale entdecken, und sich somit von dem Vorhandensein einer Diplospirale überzeugen.

---

*) Einige Beobachtungen lassen mich vermuthen, dass die Windungsnaht in den Conchylien mit veränderlichem, und zwar beständig zunehmenden Descensionswinkel dem Gesetze der Logistik oder logarithmischen Linie folge.

**) Vergl. Alcide d'Orbigny im Bulletin de la soc. géol. T. XIII. p. 202.

§. 20.

Beobachtungsmethoden. Was nun die zur Ermittelung der nöthigen Beobachtungs-Elemente geeigneten Methoden betrifft, so sind solche etwas verschieden, je nachdem man es mit *stumpf* kegelförmigen Conchylien (z. B. mit Solarium, Helix, Ampullaria, Natica) oder mit *spitz* kegelförmigen Conchylien (z. B. mit Turritella, Terebra, Cerithium) zu thun hat.

Conchylien mit stumpfem und breitem Windungskegel legt man mit möglichst verticaler Axe auf die Scheibe des Conchyliometers*), bringt darauf das Fadenkreuz des Mikroskopes so genau als möglich über den Mittelpunkt der Horizontalprojection des Windungskegels, und misst endlich in der Richtung eines grössten Durchmessers eine vollständige Reihe von Windungsabständen, wie solche durch die Windungsnaht bestimmt werden, wobei man auch die Lage des Mittelpunktes bestimmen kann, wenn er deutlich zu erkennen ist. Man erhält auf solche Weise, zugleich mit diesen singulodistanten Windungsabständen, eine Reihe von singulodistanten Diametern, auch, wenn der Mittelpunkt bestimmbar ist, zwei Reihen singulodistanter Radien, und kann aus diesen Elementen die Spiralen berechnen. — Geben die Quotienten der singulodistanten Windungsabstände durchgängig nur *einen* Werth, so ist die Spirale eine *einfache;* lassen sie in der Hauptsache *zwei* Werthe erkennen, so ist eine *Diplospirale* angezeigt. Im letzteren Falle werden es die Werthe der Windungsquotienten bestätigen, was schon die genaue Betrachtung des Windungskegels vermuthen lässt, dass nämlich entweder die äussere oder die innere Spirale nach einem grösseren Quotienten gewunden ist, je nachdem der Windungskegel concav oder convex erscheint. — Bei *dieser* Messungsmethode wird also die *Horizontalprojection* des Spiralcylinders, oder die ihm zu Grunde liegende Spirale *unmittelbar* gemessen.

Bei den sehr spitz kegelförmigen Conchylien lässt sich diese Methode nicht füglich anwenden, weil die Umläufe der Windungsnaht in der Horizontalprojection zu nahe an einander treten, und oft durch den vorspringenden Rücken der Windungen, oder durch die Leisten und Knoten der Schale verdeckt werden. Solche Conchylien legt man dergestalt auf die Scheibe des Conchyliometers, dass eine Falllinie oder Generatrix des Kegels möglichst horizontal und parallel dem Rande des Millimeter-Maassstabes zu liegen kommt. Hierauf stellt man das Mikroskop so ein, dass der eine Faden des Fadenkreuzes diese Falllinie des Windungskegels deckt, und misst nun der Länge nach über die Conchylie weg die ganze Reihe der singulodistanten Windungsabstände, wodurch die Windungsquotienten gefunden werden. — Um die gleichfalls erforderliche Reihe von singulodistanten *Radien* zu finden, braucht man nur zugleich die *Spitze* des Kegels zu bestimmen, und ihren Abstand von den einzelnen gemessenen Windungspunkten aufzusuchen. Durch alle diese Messungen erhält man natürlich nur die eine Seite einer Verticalprojection der Windungsnaht.

---

*) Eine Masse von weichem Wachs oder Thon bietet die beste Unterlage und das beste Befestigungsmittel der Conchylien dar.

Da man endlich auch die *Amplitude* des Windungskegels*) in seinen verschiedenen Regionen, oder doch wenigstens an seiner Spitze kennen muss, wenn man die Verticalprojection auf die Horizontalprojection reduciren und den Descensionswinkel der Windungsnaht berechnen will, so wird man auch hierzu gelangen, indem man die Conchylie mit ihrer Axe horizontal legt, und erst den *einen* seitlichen Rand der Kegelspitze unter den Faden des Mikroskopes bringt, dann aber die Conchyliometerscheibe so lange dreht, bis auch der *zweite* Rand von dem Faden gedeckt wird. Der Winkel, um welchen die Scheibe gedreht werden musste, gibt die Amplitude des Windungskegels.

Bei allen diesen conchyliometrischen Messungen ist es nun gar sehr zu berücksichtigen, dass man aus ihnen in vielen Fällen nur auf ungefähre Näherungswerthe der Windungsquotienten gelangen wird, in welchen man jedoch diejenigen Zahlen leicht zu erkennen vermag, welche eigentlich die Form beherrschen. Denn dass in organischen Gebilden häufig *individuelle Anomalieen* vorkommen werden, dies lässt sich wohl a priori erwarten, ohne dass man deshalb berechtigt wäre, eine *specifische Gesetzmässigkeit* zu *bezweifeln*. Nur wird man diese letztere um so leichter und bestimmter zu erkennen vermögen, je regelmässiger gebildete Individuen man der Untersuchung unterwirft.

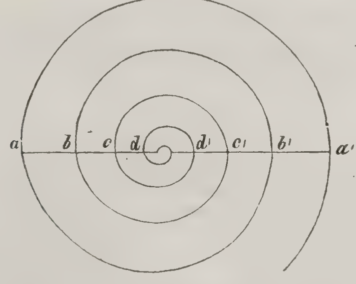
A) *Gasteropoden mit sehr stumpfem Windungskegel.*

§. 21.

Helix nemoralis. Ich will nun einige Beispiele anführen, durch welche der Beweis geliefert werden wird, dass es wirklich die *Concho*spirale ist, welche theils als einfache, theils als zusammengesetzte Spirale die Windungen vieler Gasteropoden bestimmt. Zuvörderst mögen einige Beispiele an solchen Formen erläutert werden, welche einen sehr stumpfen Windungskegel besitzen.

Helix nemoralis. Ein sehr regelmässig gestaltetes Exemplar gab mir folgende Beobachtungs-Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser;	im kleinen Halbmesser.
$a'b' = 2{,}75$ mm.	$ab = 2{,}25$
$b'c' = 1{,}85$	$bc = 1{,}45$
$c'd' = 1{,}25$	$cd = 0{,}95.$



*) Dieser Winkel ist es, welchen Alcide d'Orbigny nicht ganz passend den Spiralwinkel (angle spiral) nennt, und dessen grosse Beständigkeit in allen Individuen einer und derselben Species er hervorhebt.

Diameter	Differenzen derselben
$aa' = 12{,}10$	
$bb' = 7{,}10$	$D' - D = 5{,}00$
$cc' = 3{,}80$	$= 3{,}30$
$dd' = 1{,}60$	$= 2{,}20$

Da der Mittelpunkt ziemlich gut erkannt werden konnte, so bestimmte ich auch beide Reihen von singulodistanten Radien, und fand

im grösseren Halbmesser	im kleineren Halbmesser
$r' = 6{,}75$	$r = 5{,}35$
$= 4{,}00$	$= 3{,}10$
$= 2{,}15$	$= 1{,}65$
$= 0{,}90$	$= 0{,}70.$

Dividirt man je zwei singulodistante Windungsabstände, so erhält man ganz unzweifelhaft den Windungsquotienten

$$p = \tfrac{3}{2},$$

indem die einzelnen Werthe so wenig von dieser Zahl abweichen, dass man solchen unbedingt als den Normalwerth betrachten kann *).

Dagegen überzeugt man sich leicht, dass weder die singulodistanten Radien noch die singulodistanten Diameter eine geometrische Progression bilden, dass also die logarithmische Spirale auf keine Weise angezeigt ist.

Bestimmt man aber nach §. 5. den Windungsquotienten p aus den Differenzen der singulodistanten Diameter oder Radien, so erhält man abermals $p = \frac{3}{2}$. Hieraus folgt denn, dass Helix nemoralis nach einer *Conchospirale* vom Windungsquotienten $\frac{3}{2}$ gewunden ist.

Weil nur eine *einfache* Spirale vorliegt, so können wir den Parameter a nach der Formel (§. 6.)

$$a = \tfrac{1}{2}(D' - pD) = r' - pr$$

berechnen; wir erhalten so:

aus aa' und bb', $a = 0{,}72$ mm.
- bb' - cc', $= 0{,}70$
- cc' - dd', $= 0{,}70$

die Radien geben sechs verschiedene Werthe, welche zwischen 0,60 und 0,80 mm. schwanken, und auf den Mittelwerth 0,71 führen. Wir sind daher zu der Folgerung berechtigt, dass das gemessene Exemplar von Helix nemoralis seine erste Windung mit dem Parameter 0,71 mm. begonnen habe.

Ein anderes, minder regelmässig gestaltetes Exemplar gab die singulodistanten Windungsabstände:

---

*) Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ergiebt sich aus Folgendem. Legt man den *grössten* Windungsabstand 2,75 zu Grunde, und berechnet aus ihm die übrigen nach $p = \frac{3}{2}$, so erhält man

$a'b' = 2{,}750$	$ab = 2{,}245$
$b'c' = 1{,}833$	$bc = 1{,}497$
$c'd' = 1{,}222$	$cd = 0{,}968$

welche Werthe von den beobachteten so wenig abweichen, als nur gefördert werden kann. Es beweist diess, dass bei der Messung in gegenwärtigem Falle sehr nahe alle Bedingungen erfüllt waren, weil ausserdem zwischen den Windungsabständen der einen und der andern Hälfte keine so völlige Uebereinstimmung stattfinden würde.

im grösseren Halbmesser	im kleineren Halbmesser
$a'b' = 3{,}25$	$ab = 2{,}20$
$b'c' = 2{,}05$	$bc = 1{,}45$
$c'd' = 1{,}25$	$cd = 0{,}90$

und die zugehörigen Diameter

	Differenzen
$aa' = 12{,}60$	$D'-D = 5{,}45$
$bb' = 7{,}15$	$= 3{,}50$
$cc' = 3{,}65$	$= 2{,}15$
$dd' = 1{,}50$	

Hier scheint in der That eine entosthene Diplospirale angezeigt zu sein, deren innere Windung nach $p = \frac{5}{3}$, die äussere Windung nach $q = \frac{3}{2}$ gebildet ist.

§. 22.

Solarium perspectivum. In der Horizontalprojection gemessen erhielt ich folgende Beobachtungs-Elemente, welchen ich zur Vergleichung die aus dem gefundenen Werthe von p berechneten Grössen beigefügt habe*).

---

*) Es sind diess die aus dem grössten Windungsabstande eines jeden Halbmessers für sich folgenden Werthe; berechnet man dagegen aus 4,65 die Abstände im kleineren Halbmesser, so erhält man 3,80 statt 3,60, 2,53 statt 2,45 u. s. w., also lauter etwas grössere Werthe als die gemessenen; was vermuthen lässt, dass bei der Messung nicht alle Bedingungen erfüllt waren. In dieser Hinsicht ist es nöthig, hier auf eine eigenthümliche Fehlerquelle aufmerksam zu machen, deren Einfluss nur selten ganz zu vermeiden ist. Dieselbe entspringt aus der Abweichung von der senkrechten Lage, welche die Axe der Conchylie sehr leicht erhalten wird, wenn man sie in ihrer Wachs- oder Thon-Unterlage auf der Scheibe des Conchyliometers aufstellt. Man kann selten dafür einstehen, dass nicht eine Abweichung von einigen Graden statt finde; ja, bei solchen Conchylien, wo die Spindel sehr ausgeschweift und das untere Ende der Axe nicht scharf markirt ist, da kann die Abweichung derselben wohl bis 10^0 steigen. Durch diesen Umstand werden aber für die Messungs-Resultate ganz eigenthümliche Verhältnisse herbeigeführt. Setzen wir nämlich die Amplitude des Windungskegels $= \alpha$, und die Abweichung seiner Axe von der verticalen Stellung oder (was hier dasselbe ist) von der optischen Axe des Mikroskopes in der Verticalebene der Messung, $= \delta$, so wird irgend ein Windungsabstand h in der Horizontalprojection, statt mit seinem wirklichen Werthe, entweder mit dem grösseren Werthe:

$$H' = \frac{h \sin(\frac{1}{2}\alpha + \delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = h\gamma',$$

oder mit dem kleineren Werthe:

$$H = \frac{h \sin(\frac{1}{2}\alpha - \delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = h\gamma$$

erscheinen müssen. Der ihm gegenüberliegende nächste semissodistante Windungsabstand h' dagegen wird im ersteren Falle mit dem Werthe $h'\gamma$, im andern Falle mit dem Werthe $h'\gamma'$ beobachtet werden. Ueberhaupt werden alle Windungsabstände des *einen* Halbmessers *grösser*, und alle Windungsabstände des *anderen* Halbmessers *kleiner* beobachtet werden, als sie wirklich sind, indem jene mit dem Factor γ', diese mit dem Factor γ behaftet sind. Dadurch wird nun zwar *innerhalb jedes einzelnen* Halbmessers das *Verhältniss* der Windungsabstände *gar nicht* gestört werden, wohl aber wird das Verhältniss je zweier *semisso*distanter Windungsabstände *unrichtig* ausfallen müssen, denn statt auf das Verhältniss $h:h' = 1:\sqrt{p}$, führt uns die Beobachtung entweder auf das Verhältniss $h\gamma':h'\gamma = 1:x$, oder auf das Verhältniss $h\gamma:h'\gamma' = 1:y$, so dass der Quotient der *gemessenen* semissodistanten Windungsabstände entweder mit $\frac{\gamma'}{\gamma}$ oder mit $\frac{\gamma}{\gamma'}$ multiplicirt werden müsste, um den wahren Werth von $\sqrt{p}$ zu geben. Wie bedeutend übrigens dieser Fehler, und wie gross daher die scheinbare Discordanz der semissodi-

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	gemessen	berechnet	im kleinen Halbmesser	gemessen	berechnet
$a'b' =$	4,65	4,65	$ab =$	3,60	3,60
$b'c' =$	3,25	3,10	$bc =$	2,45	2,40
$c'd' =$	2,05	2,06	$cd =$	1,60	1,60
$d'e' =$	1,30	1,38	$de =$	1,05	1,06
$e'f' =$	0,90	0,92	$ef =$	0,75	0,71
$f'g' =$	0,60	0,61	$fg =$	0,50	0,47

Diese Windungsabstände führen offenbar auf den Werth $p = \frac{3}{2}$, indem nur der eine Abstand $b'c'$ eine etwas grössere Abweichung zeigt, weshalb an seiner Stelle eine locale Störung im Wachsthum der Conchylie statt gefunden haben mag.

Die zugleich mit gemessenen *Diameter* wurden mit nachstehenden Werthen gefunden:

Diameter	Differenz $D'-D$ gemessen	berechnet
$aa' =$ 23,80		
$bb' =$ 15,55	8,25	8,25
$cc' =$ 9,85	5,70	5,50
$dd' =$ 6,20	3,65	3,66
$ee' =$ 3,85	2,35	2,44
$ff' =$ 2,20	1,65	1,63
$gg' =$ 1,10	1,10	1,09

Man sieht hieraus, dass die Diameter *keine* geometrische Progression bilden, dass also die Windungen *nicht* durch die logarithmische Spirale bestimmt sein können. Suchen wir dagegen nach §. 5. die Quotienten der Diameter-Differenzen, so erhalten wir abermals sehr nahe den Werth $p = \frac{3}{2}$; wie wenig die Beobachtung dieser Folgerung widerspricht, zeigen die nach diesem Werthe aus der ersten Differenz 8,25 berechneten folgenden Differenzen.

Berechnet man endlich aus den Diametern nach der Formel $a = \frac{1}{2}(D' - pD)$ die Werthe des Parameters a, so erhält man im Mittel

$$2a = 0,555 \text{ mm.}$$

mit den Extremen 0,78 und 0,425 mm.

Ein anderes Exemplar gab gleichfalls sehr übereinstimmend $p = \frac{3}{2}$, aber für a einen etwas grösseren Werth; nämlich im Minimo $2a = 0,775$ mm.

---

stanten Windungsabstände werden könne, diess zeigen folgende Beispiele. Ist $\alpha = 90^0$ und $\delta = 5^0$, so wird $\gamma' = 1,083$ und $\gamma = 0,909$; ist aber $\alpha = 90^0$ und $\delta = 10^0$, so wird $\gamma' = 1,161$ und $\gamma = 0,813$. Man sieht hieraus, wie sorgfältig man darauf Bedacht nehmen muss, die Axe der Conchylie möglichst vertical zu stellen, sobald die Spirale in der Horizontalprojection gemessen werden soll. Aus einer solchen Abweichung der Axe erklären sich also die in den §§. 23. und 24. für Natica glaucina und Natica aperta ersichtlichen Discordanzen zwischen den Windungsabständen *beider* Halbmesser, während doch die Abstände jedes *einzelnen* Halbmessers ihr wahres Verhältniss behaupten. Dasselbe gilt für die weit geringeren Abweichungen, welche bei Solarium perspectivum statt finden, während bei Helix nemoralis zufällig die Axe fast genau senkrecht gestanden haben mag.

§. 23.

Natica glaucina. An einem sehr regelmässig gebildeten Exemplare dieser Species fand ich folgende Elemente:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	beobachtet	berechnet	im kleinen Halbmesser	beobachtet	berechnet
$a'b'$ =	4,25	4,25	ab =	2,75	2,75
$b'c'$ =	1,40	1,41	bc =	0,95	0,92
$c'd'$ =	0,45	0,47	cd =	0,35	0,31
$d'e'$ =	0,25	0,23	de =	?	0,16

Diameter	Differenz $D' - D$ beobachtet	berechnet
aa' = 10,80	7,00	7,00
bb' = 3,80	2,35	2,33
cc' = 1,45	0,80	0,78
dd' = 0,65		

Die Windungsabstände führen fast ganz genau auf den Quotienten 3; es lässt jedoch schon das Verhältniss $c'd' : d'e'$ vermuthen, dass wir es nicht mit einer einfachen Spirale, sondern mit einer Diplospirale zu thun haben, deren äussere Windungen also nach dem Quotienten $q = 3$ gewunden sind, während die innersten Windungen wahrscheinlich nach $p = 2$ gewunden sein dürften*). Indessen scheint die innere Spirale sehr bald in die äussere Spirale überzugehen, welcher daher auch die meisten Windungen angehören.

Die gemessenen Durchmesser beziehen sich alle auf die äussere Spirale, weshalb die Quotienten ihrer Differenzen wiederum sehr genau auf den Werth $q = 3$ gelangen lassen. Versuchen wir es aber, den Parameter a nach der, nur für die einfache Spirale giltigen Formel $a = \frac{1}{2}(D' - qD)$ zu berechnen, so erhalten wir lauter negative Werthe; zum Beweise, dass wir es wirklich mit einer exosthenen Diplospirale zu thun haben (§. 6. und 15.).

Leider gestatteten die inneren Windungen wegen ihrer Kleinheit keine genaue Messung mit dem mir zu Gebote stehenden Instrumente, weshalb denn auch der eigentliche Werth von a nicht bestimmt werden konnte**).

---

*) Ich kann nicht umhin zu bemerken, dass die nach $q = 3$ aus dem grössten Windungsabstande berechneten Windungsabstände des kleinen Halbmessers mit auffallend kleineren Werthen gefunden werden, als es die Beobachtung ergab; nämlich

$$ab = 2,455$$
$$bc = 0,818$$
$$cd = 0,273$$

was, bei der nahen Uebereinstimmung der auf jeder Seite gefundenen Windungsabstände unter sich, allerdings befremden muss, aber daraus zu erklären ist, dass die Axe der Conchylie bei der Messung schief stand. Eine andere Messung nach einer anderen Richtung gab

$a'b' = 4,0$	$ab = 2,4$
$b'c' = 1,3$	$bc = 0,8$
$c'd = 0,4$	$cd = 0,3$

mit einer sehr guten Uebereinstimmung der beiderseitigen Windungsabstände.

**) Der Nonius meines Instruments giebt die Zehntheile eines Millimeters an, und lassen sich also die Messungen bequem bis auf 0,05 mm. genau anstellen; viel weiter

§. 24.

Natica aperta Lam. Aus der Pariser Tertiärformation; die Messung wurde in der Horizontalprojection angestellt, und ergab:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	beobachtet	berechnet	im kleinen Halbmesser	beobachtet	berechnet
$a'b'$ =	4,10	4,100	ab =	2,45	2,450
$b'c'$ =	2,05	2,050	bc =	1,20	1,225
$c'd'$ =	1,05	1,025	cd =	0,60	0,612
$d'e'$ =	0,55	0,512	de =	0,30	0,306
$e'f'$ =	0,30		ef =	?	

Diameter		Differenz $D'-D$ beobachtet	berechnet
aa' =	13,35	6,55	6,550
bb' =	6,80	3,25	3,275
cc' =	3,55	1,65	1,637
dd' =	1,90	0,85	0,819
ee' =	1,05		

Die Windungsabstände führen sehr übereinstimmend auf den Werth $q = 2$; derselbe folgt aus den Differenzen der Diameter, während diese selbst keine geometrische Progression bilden*). Dass jedoch die innersten Windungen nach einem *anderen* Quotienten gewunden sein, und daher auch hier wiederum *zwei* Spiralen vorliegen müssen, dies ergibt sich daraus, weil der Ausdruck $\frac{1}{2}(D' - qD)$ lauter negative Werthe erhält.

Die Kleinheit der innersten Windungen gestattete keine genaue Messung derselben mit meinem Conchyliometer, weshalb ich auf die Bestimmung von p und a Verzicht leisten muss. Doch ist jedenfalls $p < q$, und wahrscheinlich $= \frac{5}{3}$ oder $\frac{3}{2}$.

Messungen an Natica Sigaretina gaben sehr genau den Windungsquotienten 2, jedoch ebenfalls mit negativem Werthe von $D' - qD$, woraus sich ergibt, dass auch hier die innerste Windung nach einem kleineren Quotienten gewunden sein muss.

B) *Gasteropoden mit spitzem Windungskegel.*

§. 25.

Turritella terebellata und imbricataria. Die sehr spitzen oder thurmförmigen Windungskegel sind meist durch *kleinere* Werthe der Windungsquotienten ausgezeichnet, wie folgende Beispiele lehren.

---

kann ich ohnediess nicht gehen, weil die Fäden des Fadenkreuzes etwas stark sind. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass in vielen Fällen für die Messungen der *innersten* Windungen *grössere* Grade der Genauigkeit erfordert werden.

*) Bei aller Uebereinstimmung, welche die Windungsabstände innerhalb der einzelnen Halbmesser mit dem Gesetze $q = 2$ zeigen, ist doch die Abweichung ihrer, aus einander *gegenseitig* abzuleitenden Werthe nicht unbedeutend; die Axe der Conchylie muss also bei der Messung eine starke Abweichung von der vertikalen Lage gehabt haben.

Turritella terebellata von Paris. Diese sehr lang gestreckte Turritella gab in einer Falllinie des Windungskegels gemessen von unten nach oben folgende Reihe von Windungsabständen:

beobachtet	berechnet	nach
9,8	9,91	$\frac{7}{6}$
8,5	8,50	-
7,2	7,27	-
6,3	6,24	-
5,4	5,35	-
4,7	4,59	-
4,0	3,93	-
3,3	3,37	-
3,0	2,89	-
2,4	2,47	-
2,1	2,12	-
1,8	1,82	-
1,5	1,50	$\frac{6}{5}$
1,2	1,20	$\frac{5}{4}$

Die Spitze des Windungskegels war an dem mir zu Gebote stehenden Exemplare abgebrochen. Man sieht jedoch aus diesen Beobachtungen, dass die Windungsabstände anfangs nach $p = \frac{5}{4}$ ausgebildet sind, von welcher inneren Spirale nur noch die letzte Windung erhalten war; dann folgt eine Uebergangswindung, für welche sich zufällig der Werth $\frac{6}{5}$ herausstellt, und weiterhin ist die ganze Schale durch zwölf Windungen nach $q = \frac{7}{6}$ gebildet.

Die berechneten Werthe der letzten zwölf Windungsabstände sind aus der Summe der gemessenen Abstände unter Zugrundlegung von $q = \frac{7}{6}$ gefunden worden.

Turritella imbricataria von Paris; 10 Windungsabstände von unten nach oben gaben:

beobachtet	berechnet	nach
6,45	6,385	$\frac{6}{5}$
5,45	5,321	-
4,50	4,434	-
3,70	3,695	-
3,05	3,079	-
2,55	2,566	Uebergang
2,00	2,000	$\frac{7}{6}$
1,70	1,714	-
1,40	1,469	-
1,20	1,259	-

Also liegt auch dieser Species eine Diplospirale zu Grunde, welche zwar anfangs nach $\frac{7}{6}$, dann aber grösstentheils nach $\frac{6}{5}$ gewunden ist. Jede dieser beiden Turritellen liefert uns also ein Beispiel von einer Diplospirale, jedoch die erstere von einer entosthenen, die andere von einer exosthenen Diplospirale

§. 26.

Turritella carinata. Diese Species aus der Subapenninen-Formation gab mir in einem gut erhaltenen Exemplare folgende Reihe von Windungsabständen und Radien:

Windungsabstände beobachtet	Windungsabstände berechnet nach $\frac{5}{4}$	Radien	Differenz $r' - \frac{5}{4} r$
1,00	1,00	2,00	
			0,70
1,25	1,25	3,20	
			0,80
1,60	1,56	4,80	
			0,80
2,00	1,95	6,80	
			0,75
2,45	2,44	9,25	
			0,74
3,05	3,05	12,30	
			0,63
3,70	3,81	16,00	
			0,80
4,80	4,76	20,80	

Diese Windungsabstände führen offenbar auf den Quotienten $p = \frac{5}{4}$, indem nur der vorletzte Abstand einen verschiedenen Werth andeuten könnte, welcher vielleicht der Uebergangswindung zu einem anderen Quotienten angehört, da ich an einem grösseren Exemplare weiterhin den Quotienten $q = \frac{8}{7}$ gefunden habe.

Die Reihe der Radien scheint zwar in den vier Gliedern von 6,80 bis 16,00 eine geometrische Progression nach $\frac{4}{3}$ zu bilden, was jedoch nur zufällig und durchaus nicht gesetzlich sein kann, wie die übrigen Radien lehren. Wenn wir dagegen nach der Formel $a = r' - pr$ (§. 6.) den Parameter a, oder vielmehr denjenigen Theil der Falllinie des Windungskegels bestimmen, welcher dem Parameter a entspricht, so erhalten wir ziemlich nahe liegende Werthe, als deren Mittelwerth sich

$$f = 0{,}75 \text{ mm.}$$

herausstellt. Wäre nun auch die Amplitude α des Windungskegels bekannt, so würde sich a nach der Formel

$$a = f \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

berechnen lassen.

§. 27.

Cerithium lignitarum, aus Mähren. Diese Species scheint nach denen, an drei Exemplaren angestellten Messungen triplospiral zu sein, was übrigens gewiss mit sehr vielen thurmförmigen Conchylien der Fall ist. Ich fand nämlich zuvörderst an einem kleineren Exemplare nahe von der Spitze weg

die Windungsabstände beobachtet	berechnet	nach
0,70	0,71	$\frac{7}{5}$
1,00	1,00	-
1,40	1,40	-
1,95	1,96	-
2,55	2,61	$\frac{4}{3}$
3,60	3,48	-
4,75	4,64	-

Zwei grössere, aber an ihrer Spitze abgescheuerte und deshalb dort nicht messbare Exemplare gaben mir dagegen folgende Windungsabstände:

das eine Ex.			das andere Ex.		
beobachtet	berechnet	nach	beobachtet	berechnet	nach
2,40	2,31	$\frac{4}{3}$	2,20	2,17	$\frac{4}{3}$
3,10	3,08	-	2,85	2,89	-
4,10	4,10	-	3,85	3,85	-
4,75	4,78	$\frac{7}{6}$	4,90	4,90	$\frac{7}{6}$
5,65	5,58	-	5,70	5,72	-
			6,70	6,67	-

Hieraus geht wohl hervor, dass Cerithium lignitarum seinen Windungskegel successiv nach *drei* verschiedenen Spiralen bildet, deren Quotienten sich bestimmen:

$$\text{für die innerste Spirale } p = \tfrac{7}{5}$$
$$\text{für die mittlere Spirale } q = \tfrac{4}{3}$$
$$\text{für die äusserste Spirale } s = \tfrac{7}{6}.$$

Da nun $\frac{7}{5} > \frac{4}{3}$, und $\frac{4}{3} > \frac{7}{6}$, so ist es eine *ento*sthene Triplospirale, welche das Gestaltungsgesetz dieser Conchylie bestimmt; hieraus erklärt sich auch die convexe Form des Windungskegels.

§. 28.

Pleurotomaria conoidea, aus der Juraformation von Bayeux. Ein ziemlich vollständig erhaltenes Exemplar gab mir folgende Elemente:

Windungsabstände		
beobachtet	berechnet	nach
1,20	1,20	$\frac{4}{3}$
1,60	1,60	-
2,10	2,13	-
2,80	2,84	-
3,50	3,50	$\frac{7}{5}$
4,90	4,90	-
6,90	6,86	-

Radien	$r' - pr$
2,0	
3,2	0,53
4,8	0,53
6,9	0,50
9,7	0,50
13,2	
18,1	−0,38
25,0	−0,34

Es unterliegt hiernach keinem Zweifel, dass der Windungskegel nach zwei verschiedenen Spiralen gebildet ist, für welche sich $p = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{7}{5}$ bestimmt. Da nun $q > p$, so ist es eine *exo*sthene Diplospirale, welche dieser Conchylie zu Grunde liegt; was auch vollkommen mit der allgemeinen Form des Windungskegels übereinstimmt, welcher concav ist, oder unten flacher abfällt als oben. Der Uebergang zwischen den Windungsabständen 2,80 und 3,50 giebt (wohl nur zufällig) genau den Quotienten $\frac{5}{4}$.

Von denen in der Falllinie des Kegels gemessenen Radien der Windungspunkte beziehen sich die fünf ersten auf die *innere* Spirale, und wir erhalten aus ihnen nach der Formel $r' - pr$ die obenstehenden sehr übereinstimmenden und positiven Werthe, deren Mittelwerth

$$f = 0{,}515 \text{ mm}.$$

Wäre uns also auch die Amplitude α des Windungskegels an seiner Spitze bekannt, so würde $a = f \sin \frac{1}{2} \alpha$ gefunden werden.

Ganz andere Resultate ergeben sich, wenn wir bei der Bildung der Differenz $r' - qr$ die drei folgenden Radien benutzen, welche sich auf die *äussere* Spirale beziehen; zuvörderst erhalten wir *negative* Werthe, was nach §. 15. der Fall sein muss, weil $q > p$ ist; ferner erhalten wir zwar unter einander übereinstimmende, aber von den vorher gefundenen sehr abweichende Werthe, was erklärlich ist, weil ja die Differenz $qr - r'$ noch mit einem sehr complicirten Factor multiplicirt werden muss, um den wahren Werth von a zu geben. Ich glaube nicht, dass man bei organischen Gebilden eine grössere Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erwarten kann.

2) *Cephalopoden.*

§. 29.

Allgemeine Bemerkungen. Bekanntlich sind die spiralförmig gewundenen Schalen der Cephalopoden grösstentheils in einer Ebene dergestalt aufgewunden, dass die inneren Windungen durch die äusseren mehr oder weniger verdeckt werden; ja, nicht selten umschliesst die letzte Windung alle übrigen so vollständig, dass von diesen fast gar nichts zu sehen ist. Deswegen ist man bei den meisten Species von Nautilus, Ammonites, Goniatites, Bellerophon u. s. w. genöthigt, die Schale auf eine zweckmässige Weise durchschneiden und anschleifen zu lassen, bevor man das Gesetz ihrer Windung studiren kann.

Es ist nun besonders der Windungs*rücken*, dessen Lage das nächste und sicherste Anhalten bei der Untersuchung dieser Schalgehäuse darbietet. Die Rückenlinie ist ja in den Ammoniten und Goniatiten durch den Sipho, und ausserdem oft durch einen Kiel, durch eine Rinne oder durch sonstige Merkmale ausgezeichnet, welche ihr vorzugsweise die Aufmerksamkeit zuwenden müssen; überdies erscheint sie als die einzige symmetrische Halbirungslinie und zugleich als diejenige Linie der Schale, in welcher sich die Windungen mit den grössten Dimensionen herausstellen. Daher werden wir an gegenwärtigem Orte die *Rückenspirale* zum ausschliesslichen Gegenstande unserer Untersuchungen machen. Die bei den Gasteropoden so wichtige Nahtspirale hat zwar auch bei vielen Cephalopoden ihre Bedeutung, gewährt aber doch ein weit weniger sicheres Anhalten als die Rückenspirale, und wird nur einen untergeordneten Werth haben, wenn die Windungen sehr stark umschliessend und folglich die Dimensionen der Windungsnaht sehr klein sind.

Die Schnitte, durch welche die Architektur der Cephalopodenschalen aufgeschlossen werden kann, müssen so genau als möglich central sein, was allerdings seine Schwierigkeit hat, und wohl in den meisten Fällen nur näherungsweise zu erreichen ist, weil der Mittelpunkt der Schale entweder in den Windungen versteckt, oder auch bei den versteinerten Cephalopoden theils durch Gesteinsmasse verdeckt, theils ausgebrochen zu sein pflegt. Uebrigens aber ist der Schnitt entweder *parallel* der Windungsebene, oder *rechtwinkelig* auf dieselbe anzulegen, entweder als *Längsschnitt* oder als *Querschnitt* auszuführen.

Bei solchen Cephalopodenschalen, welche nur mit wenigen Windungen vollendet sind (wie z. B. bei Nautilus Pompilius), dürften die Längsschnitte, bei solchen dagegen, welche eine grössere Anzahl von Windungen besitzen (wie z. B. bei den meisten Ammoniten), dürften die Querschnitte vorzuziehen sein. Diese Querschnitte gewähren in der That eine so vollständige Einsicht in die Architektur der Ammoniten und anderer Cephalopoden, dass die Herstellung derselben allen denen nicht genug empfohlen werden kann, welche sich mit einer Untersuchung ihrer Formen beschäftigen wollen.

Noch giebt es eine Methode, um auch an *ganzen*, d. h. *nicht* durchschnittenen Exemplaren zur Kenntniss wenigstens desjenigen Gesetzes zu gelangen, welches die äusserste Windung beherrscht. Sie besteht darin, dass man die letzten drei quadrantodistanten Diameter misst, was allemal dann bewerkstelligt werden kann, wenn das Ende der letzten Windung *quer* (d. h. in radialer Richtung) abgebrochen ist; eine Bedingung, welche sich leicht erfüllen lässt, wenn sie nicht schon durch den natürlichen Abbruch erfüllt sein sollte.

Dass übrigens bei solchen Ammoniten, deren Rücken gerippt und undulirt, oder mit einem gekörnten oder gefalteten Kiele versehen ist, die Messungen mehr oder weniger unsicher werden müssen, dies bedarf zwar keiner Erwähnung, wohl aber in vorkommenden Fällen einer sorgfältigen Berücksichtigung. Ist dann der Sipho in allen Windungen sichtbar, so würde es wohl am zweckmässigsten sein, die Messungen unmittelbar auf ihn zu beziehen.

§. 30.

Messungsmethoden. Auch hier kommt es zunächst darauf an, aus gemessenen aequidistanten Windungsabständen die Windungsquotienten p, q, s u. s. w. zu finden, welche in den verschiedenen Regionen der Schale das Gesetz ihrer Windung bestimmen.

Bei solchen Cephalopoden, welche überhaupt nach sehr *wenigen* Windungen die *Gränze* ihres Wachsthums erreichen, und bei denen im Allgemeinen die *Längs*schnitte vorzuziehen sind, verfährt man nun so, dass man, nachdem das Fadenkreuz des Mikroskopes in Bezug auf die Scheibe des Conchyliometers centrirt worden ist, die Schnittfläche der Conchylie horizontal und möglichst centrisch auf die Scheibe auflegt, und nun durch alle Windungen hindurch die quadrantodistanten oder auch octantodistanten Windungsabstände misst, indem man nach jeder Messung die Scheibe um 90° oder 45° dreht. Auf diese Weise werden zugleich die zugehörigen Diameter erhalten, und also alle diejenigen Beobachtungs-Elemente gewonnen, deren man zur vollständigen Berechnung der Form bedarf.

Bei denjenigen Cephalopoden dagegen, welche eine grössere Anzahl von Windungen besitzen und zweckmässiger in ihren *Quer*schnitten studirt werden, stellt man die Conchylie dergestalt auf die Scheibe des Conchyliometers, dass ihre Schnittfläche horizontal, und ihr grösster Durchmesser oder die Axe des Schnittes (in welcher alle Durchschnittspunkte der Rückenspirale und des Sipho enthalten sind) dem Millimetermaassstabe parallel zu liegen kommt. Man überzeugt sich am besten davon, dass diese Lage erreicht worden ist, wenn man das Mikro-

skop über die Schnittfläche hinführt und zusieht, ob der eine Faden des Fadenkreuzes alle Durchschnittspunkte der Rückenlinie und des Sipho deckt. Hierauf misst man die sämmtlichen singulodistanten Windungsabstände der Rückenspirale, wie solche in der Axe des Querschnittes hinter einander liegen, sowohl im grösseren als im kleineren Halbmesser dieses Querschnittes, und erhält so zugleich eine Anzahl von singulodistanten und semissodistanten Diametern, also überhaupt alle zur Berechnung erforderlichen Beobachtungs-Elemente.

§. 31.

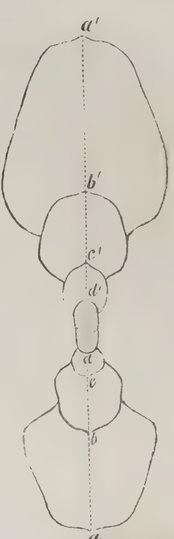
Formänderung der Schale bei verschiedenen Windungsquotienten. Den Cephalopodenschalen scheint gewöhnlich eine Diplospirale, ja nicht selten eine Triplospirale zu Grunde zu liegen. In den Querschnitten derselben geben sich die verschiedenen einzelnen Spiralen oft durch eine mehr oder weniger auffallende Aenderung der Form zu erkennen, welche in der Dorsalregion der Schale am deutlichsten hervortritt, und es bisweilen auf den ersten Blick erkennen lässt, dass man es mit einer diplospiralen Schale zu thun hat. So erscheint z. B. im Querschnitte der Rücken der inneren Windungen oft sehr flach gewölbt, während der Rücken der äusseren Windungen einen scharfen Winkel bildet; oder die inneren Windungen sind fast halbkreisförmig gebogen, während die äusseren entweder platt oder hoch elliptisch gewölbt erscheinen; auch ist wohl nach aussen ein Kiel vorhanden, von welchem die innersten Windungen keine Spur erkennen lassen; u. s. w. Man wird nun gewöhnlich finden, dass diesen verschiedenen Formen verschiedene Windungsquotienten entsprechen, und dass in derjenigen Region des Querschnittes, wo sich die Formänderung deutlich zu erkennen giebt, der Uebergang aus dem einen Gesetze in das andere statt findet. Dass diese Formänderung des Rückens, oder überhaupt des Querschnittes der einzelnen Windungen, mehr oder weniger eine allgemeine Formverschiedenheit der ganzen Schale in den verschiedenen Stadien ihres Wachsthums zur Folge haben müsse, versteht sich von selbst; auch braucht es wohl kaum erwähnt zu werden, dass sie nicht plötzlich eintritt, sondern dass sich die eine Form allmälig aus der anderen herausbildet.

Ich wende mich nun zur Betrachtung einiger Beispiele, um den Beweis zu liefern, dass wahrscheinlich die meisten Cephalopoden den Gesetzen der Conchospirale unterworfen sind, und dass auch bei ihnen die zusammengesetzten Spiralen zu den sehr gewöhnlichen Erscheinungen gehören*).

§. 32.

Ammonites Murchisonae von Aalen. Dickrippige Varietät, mit breitem Rücken, weiter Mündung und tiefem Nabel (ähnlich Zieten, Taf 6., Fig. 2.). Der Querschnitt entblöste drei vollständige Windungen, der innere Theil war ausgebrochen. Eine Messung gab folgende Beobachtungs-Elemente:

*) Alle im Folgenden angeführte Messungen wurden an *Quer*schnitten angestellt.



Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 20{,}50$	$ab = 14{,}2$
$b'c' = 10{,}00$	$bc = 7{,}1$
$c'd' = 5{,}05$	$cd = 3{,}5$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 67{,}20$	
$bb' = 32{,}50$	34,70
$cc' = 15{,}40$	17,10
$dd' = 6{,}85$	8,55

Die Windungsabstände führen unmittelbar auf den Windungsquotienten $p = 2$; dasselbe Resultat folgt aus den Differenzen der Diameter *). Bestimmt man a nach der Formel

$$a = \tfrac{1}{2}(D' - pD),$$

so erhält man zwei Mal den Werth 0,85 und ein Mal den Werth 1,1, also im Mittel 0,92 mm. Demnach ist das gemessene Exemplar wahrscheinlich monospiral, beginnt mit dem Parameter 0,92 und ist nach dem Quotienten 2 gewunden. Die Quotienten der Diameter sind 2,07, 2,11 und 2,25; folglich bilden die Diameter keine geometrische Progression, womit zugleich die Unzulässigkeit der logarithmischen Spirale erwiesen ist.

A. Murchisonae von Aalen; *andere* Varietät, scheibenförmig, mit scharfem Rücken und schmaler Mundöffnung; der Querschnitt des gemessenen Exemplares zeigte ebenfalls nur drei Windungen, weil die innersten Windungen ausgebrochen waren**).

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 23{,}00$	$ab = 16{,}45$
$b'c' = 10{,}20$	$bc = 7{,}00$
$c'd' = 5{,}05$	$cd = 3{,}50$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 71{,}85$	
$bb' = 32{,}40$	39,45
$cc' = 15{,}20$	17,20
$dd' = 6{,}65$	8,55

*) Die beiderseitigen Windungsabstände stimmen recht gut, denn es wird

$$ab = a'b' : \sqrt{2} = 14{,}5.$$

**) Daher konnte der Querdurchschnitt nur sehr ungefähr central sein, was auch die geringere Uebereinstimmung der gemessenen Werthe erklärt. Desungeachtet stimmen die *beider*seitigen Windungsabstände recht wohl zusammen.

Die beiden kleineren Windungsabstände geben $p = 2$, die beiden grösseren Abstände $q = \frac{9}{4}$, welchen Werthen die aus den Differenzen der Diameter abgeleiteten Quotienten sehr wohl entsprechen. Die Quotienten der Diameter dagegen sind

$$\frac{cc'}{dd'} = 2{,}28\,;\ \frac{bb'}{cc'} = 2{,}13\,;\ \frac{aa'}{bb'} = 2{,}22\,;$$

also nicht wohl vereinbar mit der Annahme einer logarithmischen Spirale. Folglich liegt dieser Varietät eine exosthene Diplospirale zu Grund, in welcher die inneren Windungen nach 2, die äusseren Windungen nach $\frac{9}{4}$ gewunden sind; ein Resultat, welches seine Bestätigung findet, wenn wir die Differenz $D' - p\,D$ bestimmen; es folgt nämlich:

$$cc' - 2\,dd' = 1{,}9 \text{ mm.}$$
$$bb' - 2\,cc' = 2{,}0$$
$$aa' - \tfrac{9}{4}\,bb' = -1{,}05.$$

Während also die Diameter der *inneren* Spirale für $\frac{1}{2}(D' - p\,D)$ den positiven Mittelwerth 0,97 mm. geben, welcher dem für die vorige Varietät gefundenen Werthe von a sehr nahe kommt, so folgt aus den Diametern der äusseren Spirale ein negativer und ganz verschiedener Werth, wie dies ja nach §. 15. deshalb der Fall sein muss, weil wir es hier mit einer exosthenen Diplospirale zu thun haben.

§. 33.

Ammonites Murchisonae (?) von Moskau. Ein kleines, sehr schönes, farbenspielendes Exemplar. Der Querschnitt wurde mit Oel bestrichen und im Sonnenlichte gemessen, um die innersten Windungen deutlich beobachten zu können; ich erhielt so folgende Elemente:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 6{,}20$	$ab = 4{,}40$
$b'c' = 3{,}10$	$bc = 2{,}15$
$c'd' = 1{,}55$	$cd = 1{,}10$
$d'e' = 0{,}80$	$de = 0{,}60$
$e'f' = 0{,}40$	$ef = 0{,}30$
$f'g' = 0{,}25$	$fg = 0{,}20$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 21{,}55$	
$bb' = 10{,}95$	10,60
$cc' = 5{,}70$	5,25
$dd' = 3{,}05$	2,65
$ee' = 1{,}65$	1,40
$ff' = 0{,}95$	0,70
$gg' = 0{,}50$	0,45

Aus den Windungsabständen *) folgt mit grosser Bestimmtheit, dass die äusseren Windungen weit hinein nach $q = 2$ gebildet sind, wogegen die innersten Windungen, von $e'f'$ an, auf den Quotienten $p = \frac{3}{2}$ führen; ein Resultat, welches durch die Differenzen der Diameter vollkommen bestätigt wird. Dieser Ammonit hat daher eine exosthene Diplospirale; auch können wir im Voraus erwarten, dass die Differenz $D' - qD$ für die äusseren Diameter negativ ausfallen, und dass der Werth von a, unmittelbar durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(D' - pD)$, nur aus den innersten Windungen mit einiger Sicherheit zu bestimmen sein werde. In der That finden wir:

$$aa' - 2bb' = -0{,}35 \text{ mm.}$$
$$bb' - 2cc' = -0{,}45$$
$$cc' - 2dd' = -0{,}40$$
$$dd' - 2ee' = -0{,}25$$
$$ee' - \tfrac{3}{2}ff' = 0{,}225$$
$$ff' - \tfrac{3}{2}gg' = 0{,}200$$

womit denn die vorstehenden Folgerungen ihre völlige Bestätigung finden. Dieser Ammonit der Russischen Juraformation unterscheidet sich also von Ammonites Murchisonae der Deutschen Juraformation wesentlich dadurch, dass er seine Windungen mit dem Quotienten $\frac{3}{2}$ und mit einem weit kleineren Parameter beginnt.

§. 34.

Ammonites opalinus und A. Reineccii. Ammonites opalinus scheint triplospiral zu sein, wie folgende Messungen lehren:

Windungsabstände im grossen Halbmesser	Windungsabstände im kleinen Halbmesser
$a'b' = 7{,}7$	$ab = 4{,}70$
$b'c' = 3{,}2$	$bc = 1{,}85$
$c'd' = 1{,}0$	$cd = 0{,}65$
$d'e' = 0{,}5$	$de = 0{,}35$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 20{,}50$	
	12,40
$bb' = 8{,}10$	
	5,05
$cc' = 3{,}05$	
	1,65
$dd' = 1{,}40$	
	0,85
$ee' = 0{,}55$	

Sowohl die Windungsabstände**) als auch die Diameterdifferenzen führen darauf, dass sich nach einander die drei Quotienten $p = 2$, $q = 3$ und $s = \frac{5}{2}$ geltend machen. Die drei kleinsten Diameter geben für a die beiden Werthe 0,15 mm. und 0,125 mm., also den Mittelwerth 0,137 mm.

*) Die *beider*seitigen Windungsabstände zeigen unter einander eine recht gute Uebereinstimmung, denn es wird $ab = a'b' : \sqrt{2} = 4{,}38$.

**) Die beiderseitigen Windungsabstände stimmen recht wohl zusammen; denn es ist $a'b' : \sqrt{\tfrac{5}{2}} = 4{,}87$, $b'c' : \sqrt{3} = 1{,}847$ und $c'd' : \sqrt{2} = 0{,}707$.

Ammonites Reineccii. Auch dieser Species liegt eine zusammengesetzte Spirale zu Grunde, wie aus nachstehenden Beobachtungen hervorgeht:

Windungsabstände im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 12{,}7$	$ab = 9{,}05$
$b'c' = 6{,}9$	$bc = 4{,}50$
$c'd' = 2{,}9$	$cd = 1{,}75$
$d'e' = 1{,}1$	$de = 0{,}65$
Diameter	$D' - D$
$aa' = 40{,}70$	
$bb' = 18{,}95$	21,75
$cc' = 7{,}55$	11,40
$dd' = 2{,}90$	4,65
$ee' = 1{,}15$	1,75

Die Spirale ist also in ihrem inneren Theile nach $p = \frac{8}{3}$, in ihrem äusseren Theile nach $q = 2$ gebildet, während in der Uebergangsregion die Zahl $\frac{7}{3}$ zu walten scheint. Der etwas undulirte Kiel macht die Messungen mehr oder weniger unsicher. Desungeachtet giebt $a'b' : \sqrt{2}$ für ab den Werth 8,98, und $c'd' : \sqrt{\frac{8}{3}}$ für cd den Werth 1,776.

§. 35.

Ammonites elegans. Von dieser Species wurden zwei Exemplare gemessen, ein grösseres von 32,3 mm. und ein kleineres von 15,2 mm. Durchmesser. Das erstere gab folgende Elemente:

Windungsabstände im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 11{,}30$	$ab = 7{,}60$
$b'c' = 4{,}95$	$bc = 3{,}00$
$c'd' = 1{,}95$	$cd = 1{,}20$
$d'e' = 0{,}80$	$de = 0{,}50$
Diameter	$D' - D$
$aa' = 32{,}30$	
$bb' = 13{,}40$	18,90
$cc' = 5{,}45$	7,95
$dd' = 2{,}30$	3,15
$ee' = 1{,}00$	1,30

Die meisten der Windungsabstände führen auf den Quotienten $q = \frac{5}{2}$, nur der grösste Abstand 11,30 scheint den etwas kleineren Werth $\frac{7}{3}$ zu fordern. Mit diesen beiden Resultaten stimmen auch die aus den Diametern abgeleiteten Werthe sehr wohl überein; es scheint also in der That, dass die Mehrzahl der gemessenen Windungen nach $\frac{5}{2}$ gebildet ist, während die letzte Windung den Uebergang in einen kleineren Quotienten vermittelt.

Aber auch die nach $\frac{5}{2}$ gewundene Spirale ist noch nicht die innerste der ganzen Schale, wie sich daraus schliessen lässt, dass die Differenz $D' - qD$

negativ wird, wenn wir sie aus den vier kleineren Diametern zu bestimmen versuchen; wir erhalten nämlich

$$bb' - \tfrac{5}{2}cc' = -0{,}225$$
$$cc' - \tfrac{5}{2}dd' = -0{,}300$$
$$dd' - \tfrac{5}{2}ee' = -0{,}200.$$

Es müssen also die innersten, *nicht* gemessenen Windungen nach einer kleineren Zahl als $\frac{5}{2}$ gewunden sein; auch vermuthe ich nach einer approximativen Messung, dass der innere Quotient $q = 2$ sein mag.

Das kleinere Exemplar gab mir folgende Resultate:

Windungsabstände *)

im grossen Halbmesser	gemessen	berechnet	im kleinen Halbmesser	gemessen	berechnet
$a'b' =$	5,55	5,55	$ab =$	3,55	3,55
$b'c' =$	2,20	2,22	$bc =$	1,40	1,42
$c'd' =$	0,90	0,88	$cd =$	0,55	0,56
$d'e' =$	0,35	0,35	$de =$	0,20	0,22

Diameter		$D' - D$ gemessen	$D' - D$ berechnet
$aa' =$	15,20	9,10	9,10
$bb' =$	6,10	3,60	3,64
$cc' =$	2,50	1,45	1,46
$dd' =$	1,05	0,55	0,58
$ee' =$	0,50		

Auch hier führen die Windungsabstände eben so wie die Diameter auf $q = \frac{5}{2}$, und abermals bestätigt es sich, dass die innersten *nicht* gemessenen Windungen nach einem kleineren Quotienten gebildet sein müssen, weil die Differenz $D' - qD$ lauter negative Werthe giebt.

Demzufolge ist Ammonites elegans ein diplospiraler, ja vielleicht ein triplospiraler Ammonit, dessen drei successive Quotienten den Zahlen 2, $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{3}$ entsprechen.

§. 36.

Ammonites Amaltheus. Von dieser Species wurden drei Exemplare verschiedener Varietäten gemessen, deren eines jedoch in seiner Bildung gestört gewesen zu sein scheint. Auch muss ich noch bemerken, dass für diese, wie für jede Species mit gefaltetem oder gekerbtem Kiele, nur approximative Messungs-Resultate zu erwarten sind, weil die Spirale durch die Undulationen des Kieles selbst undulirt wird, und man niemals wissen kann, ob der gemessene Punkt einem Wellenthale oder einem Wellenberge angehört.

Das kleinste Exemplar von 28,7 mm. Durchmesser mit stark hervortretenden Sichelfalten zeigte die äusseren Windungen mit scharfem, die inneren Windungen mit ganz rundem Rücken und gab folgende Elemente:

---

*) Berechnen wir ab aus $a'b'$, so erhalten wir $ab = 3{,}51$, also sehr übereinstimmend.

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 11,05$	$ab = 6,7$
$b'c' = 3,65$	$bc = 2,3$
$c'd' = 1,70$	$cd = 1,2$
$d'e' = 0,80$	
Diameter	$D' - D$
$aa' = 28,70$	17,75
$bb' = 10,95$	5,95
$cc' = 5,00$	2,90
$dd' = 2,10$	

Zwar sind diese Messungen wegen der ungefähr 0,2 bis 0,3 mm. betragenden Höhe der Undulationen des Kieles etwas unsicher; sie führen aber desungeachtet auf das Resultat, dass dieser Ammonit eine diplospirale Schale hat, deren Windungen nach innen dem Quotienten $p = 2$, nach aussen dem Quotienten $q = 3$ folgen. Dass diese Diplospirale exosthen sei, folgt übrigens auch aus der Differenz $aa' - 3bb'$, welche einen negativen Werth erhält, während die Differenzen

$$bb' - 2cc' = 0,95$$
$$cc' - 2dd' = 0,80$$

mit positiven und hinreichend übereinstimmenden Werthen gefunden werden.

Ein zweites, 53,3 mm. grosses Exemplar zeigte die äusserste Windung sehr hoch, schmal und scharfkantig, die nächste Windung immer noch scharf, doch beinahe rechtwinkelig, die inneren Windungen halbkreisförmig; die Sichelfalten waren kaum sichtbar. Die Messung führte auf folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 21,80$	$ab = 13,15$
$b'c' = 7,40$	$bc = 4,25$
$c'd' = 2,45$	$cd = 1,40$
$d'e' = 0,90$	$de = 0,60$
$e'f' = 0,50$?	
Diameter	$D' - D$
$aa' = 53,30$	34,95
$bb' = 18,35$	11,65
$cc' = 6,70$	3,85
$dd' = 2,85$	1,50
$ee' = 1,35$	

Die meisten dieser Windungsabstände und Diameter führen abermals auf den Quotienten $q = 3$; die innersten Windungsabstände verweisen jedoch auf eine kleinere Zahl p, welche höchst wahrscheinlich $= 2$ ist.

Das dritte Exemplar gab insofern abweichende Resultate, als die Messungen zwar nach Innen sehr bestimmt auf $p = 2$ führten, dann aber einerseits die Werthe $\frac{8}{3}$ und $\frac{12}{5}$, anderseits die Werthe $\frac{7}{3}$ und $\frac{8}{3}$ bestimmen liessen, so dass von *einer* äusseren Windung zur anderen ein Wechsel der Quotienten statt zu finden scheint.

§. 37.

Ammonites Jason, A. tumidus und A. hecticus. Ein Exemplar von Ammonites Jason führte auf das Resultat, dass auch diese Species nach einer Diplospirale gewunden ist; zugleich ergab sich im Querschnitte, dass die inneren Windungen noch sehr flach gewölbt und frei von der Rückenrinne sind, welche die äusseren hoch gewölbten Windungen charakterisirt. Die Messung lieferte folgende Elemente:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 6{,}85$	$ab = 4{,}60$
$b'c' = 2{,}80$	$bc = 1{,}80$
$c'd' = 1{,}25$	$cd = 0{,}95$
$d'e' = 0{,}65$	$de = 0{,}45$
$e'f' = 0{,}35$	

Diameter	$D' - D$
$aa' = 20{,}45$	
$bb' = 9{,}00$	11,45
$cc' = 4{,}35$	4,65
$dd' = 2{,}15$	2,20
$ee' = 1{,}05$	1,10.

Sowohl die Windungsabstände als die Diameter verweisen darauf, dass die inneren Windungen nach $p = 2$, die äusseren Windungen nach $q = \frac{5}{2}$ gewunden sind, obwohl dieser letztere Quotient nur *eine* Windung zu beherrschen scheint, da der grösste Windungsabstand 6,85 wieder eine Verminderung seines Werthes vermuthen lässt. Die Spirale ist also entweder eine exosthene Diplospirale, oder vielleicht gar eine Triplospirale.

Ammonites tumidus. Ein in der Mitte ausgebrochenes Exemplar dieser Species liess beiderseits nur zwei Windungsabstände beobachten; die Messungen ergaben:

Windungsabstände

im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 9{,}5$	$ab = 6{,}5$
$b'c' = 4{,}3$	$bc = 2{,}9$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 29{,}4$	
$bb' = 13{,}4$	16,0
$cc' = 6{,}2$	7,2

Hieraus folgt, dass die gemessenen Windungen nach dem Quotienten $q = \frac{9}{4}$ gebildet sind*); weil jedoch die Differenz $D' - qD$ die beiden negativen Werthe $-0{,}55$ und $-0{,}75$ erhält, so müssen die inneren Windungen nach einem kleineren Quotienten p gebildet sein.

*) Der Windungsabstand $a'b'$ ist wohl etwas zu klein gefunden worden. Ueberhaupt muss ich bemerken, dass bei solchen Exemplaren, deren Mitte ausgebrochen ist, die Querschnitte sehr leicht *bedeutend* excentrisch werden können, weil jedes sichere Anhalten bei ihrer Herstellung fehlt, und sie daher nur ganz zufällig centrisch gerathen können.

Ammonites hecticus. Von den sehr verschieden geformten kleinen Ammoniten, welche gewöhnlich unter diesem Namen in den Sammlungen liegen, wählte ich zwei aus, deren einer einen runden hoch gewölbten, der andere einen schmalen und scharfen Rücken hatte: da sie beide in der Mitte ausgebrochen waren, so liessen sich an jedem derselben beiderseits nur zwei Windungsabstände messen, aus welchen für den ersten $p = 2$, für den anderen $p = \frac{12}{5}$ berechnet wurde.

§. 38.

Ammonites communis. Ein kleines, fein geripptes Exemplar gab nachstehende Beobachtungs-Elemente, welche in den äusseren Windungen wegen der Rippen um $\pm$ 0,1 mm. unsicher sein dürften.

Windungsabstände im grossen Halbmesser	Windungsabstände im kleinen Halbmesser
$a'b' = 7{,}4$	$ab = 6{,}2$
$b'c' = 4{,}9$	$bc = 3{,}6$
$c'd' = 2{,}8$	$cd = 2{,}0$
$d'e' = 1{,}4$	$de = 1{,}0$
$e'f' = 0{,}7$	$ef = 0{,}5$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 31{,}4$	
$bb' = 17{,}8$	13,6
$cc' = 9{,}3$	8,5
$dd' = 4{,}5$	4,8
$ee' = 2{,}1$	2,4
$ff' = 0{,}9$	1,2

Die inneren Windungsabstände führen ganz entschieden auf $p = 2$, die äusseren Abstände dagegen auf $q = \frac{7}{4}$, und die beiden Abstände $a'b'$ und $b'c'$ sogar auf $s = \frac{3}{2}$. Da nun diese Resultate durch die Differenzen der Diameter vollkommen bestätigt werden, so sind wir zu der Folgerung berechtigt, dass Ammonites communis nach einer entosthenen Triplospirale gewunden sei, indem der Windungsquotient aus 2 durch $\frac{7}{4}$ in $\frac{3}{2}$ überspringt*).

Die Zahl 2 scheint aber wirklich das Gesetz der *innersten* Windungen zu bestimmen, denn die vier kleinsten Diameter führen nach der Formel $a = \frac{1}{2}(D' - pD)$ sehr übereinstimmend auf den Werth

$$a = 0{,}15 \text{ mm.}$$

Ein fast doppelt so grosses Exemplar als das vorhergehende, bei welchem wegen der stärkeren Rippen und tieferen Furchen des Rückens die Messungen der äusseren Windungspunkte noch unsicherer sein mussten, gab im Allgemeinen doch recht wohl übereinstimmende Resultate.

---

*) In der That wird auch $a'b' : \sqrt{\frac{3}{2}} = ab = 6{,}043$, also recht übereinstimmend mit der Beobachtung.

§. 39.

Ammonites costatus. Ein aus einem grösseren Exemplare herausgesprengter centraler Theil von 14,3 mm. Durchmesser gab folgende Elemente:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 4{,}7$	$ab = 3{,}2$
$b'c' = 2{,}3$	$bc = 1{,}6$
$c'd' = 0{,}9$	$cd = 0{,}6$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 14{,}3$	
$bb' = 6{,}4$	7,9
$cc' = 2{,}5$	3,9
$dd' = 1{,}0$	1,5

Diese Messungen lehren, dass die innersten Windungen nach $p = \frac{5}{2}$ gebildet sind, während die darauf folgende Windung die Zahl $q = 2$ zu fordern scheint.

Bei grösseren Exemplaren müssen wegen des gekerbten Kieles die Messungen der äusseren Windungen mehr oder weniger unsicher werden; desungeachtet aber erhalten wir immer noch recht übereinstimmende Resultate, wie nachstehende Messungen an einem 45,7 mm. grossen Exemplare zeigen:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 12{,}30$	$ab = 10{,}1$
$b'c' = 7{,}90$	$bc = 5{,}2$
$c'd' = 3{,}25$	$cd = 2{,}1$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 45{,}70$	
$bb' = 23{,}30$	22,40
$cc' = 10{,}20$	13,10
$dd' = 4{,}85$	5,35

Hier lassen die Windungsabstände, eben so wie die Diameter, auf das Resultat gelangen, dass die inneren Windungen nach $\frac{5}{2}$ gewunden sind, während die äusserste nach $\frac{3}{2}$ gebildet ist, und die Uebergangsregion aus dem einen Gesetze in das andere durch 2 charakterisirt wird.

Wesentlich dasselbe Ergebniss in Betreff der äusseren Windungen liefern folgende, an einem 65,2 mm. grossen (jedoch etwas verdrückten) Exemplare angestellten Messungen:

Windungsabstände	
im grossen Halbmesser	im kleinen Halbmesser
$a'b' = 17{,}5$	$ab = 14{,}40$
$b'c' = 11{,}5$	$bc = 7{,}50$
$c'd' = 4{,}8$	$cd = 3{,}15$
$d'e' = 2{,}2$	$de = 1{,}35$

Diameter	$D' - D$
$aa' = 65{,}20$	
	31,90
$bb' = 33{,}30$	
	19,00
$cc' = 14{,}30$	
	7,95
$dd' = 6{,}35$	
	3,55
$ee' = 2{,}80$	

Die inneren Windungsabstände geben allerdings $p = \frac{7}{3}$, die äusseren Abstände aber lassen durch 2 auf $\frac{3}{2}$ gelangen.

Es ist also höchst wahrscheinlich, dass in Ammonites costatus die Windungen nach innen durch $\frac{5}{2}$ oder $\frac{7}{3}$, nach aussen durch $\frac{3}{2}$, überhaupt aber durch eine zusammengesetzte *ento*sthene Spirale bestimmt werden, von welcher jedoch zu vermuthen ist, dass sie ganz im Innern noch einen andern Quotienten als $\frac{5}{2}$ oder $\frac{7}{3}$ geben werde, weil die Differenzen $D' - pD$ negativ ausfallen.

Ob aber überhaupt bei Ammoniten mit gekerbtem, geripptem, gefaltetem, und undulirtem Rücken ganz sichere Bestimmungen zu erlangen sein werden, dies ist sehr in Frage zu stellen.

Indem ich hiermit diese Abhandlung beschliesse, bin ich mir recht wohl bewusst, dass sie nur als ein *Versuch* zur Lösung des mir gestellten Problemes betrachtet werden darf. Ich kann daher den Wunsch nicht unterdrücken, dass Andere, denen Zeit und Verhältnisse ein weiteres und tieferes Eingehen in die Sache gestatten, meine Resultate einer Prüfung unterwerfen, die Theorie berichtigen und vervollkommnen, die Beobachtungen wiederholen und vervielfältigen, und dadurch den Weg zu einer gründlichen Bearbeitung eines Gebietes der Morphologie bahnen mögen, in welchem ich nur einige vorläufige Orientirungslinien abzustecken versucht habe.

ELEKTRISCHE VERSUCHE,

VON

F. REICH.



I.

ÜBER DIE ELEKTRICITÄTSENTWICKELUNG BEI DER VERDAMPFUNG.

Die Frage nach der Ursache der Luftelektricität, einschliesslich der der Wolken und namentlich der Gewitterwolken, musste immer als ein höchst wichtiger und interessanter Gegenstand der Naturforschung erscheinen. Volta und mit ihm Saussure beantworteten sie durch die auf Experimente gegründete Annahme, dass das Wasser bei seiner Verdampfung Elektricität errege, die negative zurücklassend und die positive mit seinen Dämpfen fortführend, so dass sie, in den Dämpfen gebunden, bei deren Condensation wieder frei werde. Die befriedigende Erklärung der Luft- und Gewitterelektricität, die sich hierauf gründet, trug gewiss nicht wenig dazu bei, dieser Annahme ziemlich allgemeinen Eingang zu verschaffen; allein immer blieben die Versuche im Kleinen, durch welche die Elektricitätsentwickelung bei der Wasserverdampfung nachgewiesen werden sollte, ziemlich unsicher und gelangen oft nicht. Durch die Untersuchungen von Pouillet wurde die Ursache dieser Unsicherheit scheinbar aufgefunden und dahin bestimmt, dass reines Wasser bei seiner Verdampfung keine Elektricität entwickele, dass aber das zurückbleibende Wasser und das Gefäss immer negativ elektrisch erscheine, wenn das Wasser Salze oder Säuren, dagegen positiv, wenn es Alkalien (mit Ausnahme des Ammoniaks) aufgelöst enthielt, — und es war daher der Grund der Elektricitätsentwickelung beim Verdampfen in der Trennung der Dämpfe von der in dem Wasser aufgelösten Substanz zu suchen. — Da nun alles natürlich vorkommende, namentlich aber das zur Bildung der Feuchtigkeit in der Atmosphäre vorzugsweise beitragende Meerwasser Salze aufgelöst enthält, so war es begreiflich, dass die in der Luft enthaltenen Wasserdämpfe die positive Elektricität mit sich fortführten, und bei ihrer Condensation zu deren Hervortreten Veranlassung gaben.

Die Untersuchungen Pouillet's erstrecken sich auch auf andere, bei chemischen Processen, namentlich bei der Verbrennung und der Vegetation auftretende Elektricitätsentwickelungen; im Folgenden werde ich aber hierauf weiter keine Rücksicht nehmen, sondern lediglich den Verdampfungsprocess im Auge behalten.

Durch die in England gemachte Entdeckung, dass hochgespannte Wasserdämpfe bei ihrem Entweichen Elektricität von sehr hoher Spannung hervorzurufen vermögen, dass auch hierbei in den gewöhnlichen Fällen die entweichenden Dämpfe positiv, das zurückbleibende Wasser nebst dem Dampfgefässe negativ elektrisch werden, musste anfänglich die Ansicht von der Elektricitätsentwickelung durch Verdampfung eine entscheidende Bestätigung zu erhalten scheinen. Bald aber zeigten Armstrong und vorzüglich durch treffliche Untersuchungen Faraday, dass an diesen hohen Graden von Elektricität die Verdampfung selbst keinen Antheil habe, sondern dass die *Reibung* der mit dem Dampfe fortgerissenen Wassertheilchen die Ursache der entwickelten Elektricität sei.

Mehrfache Versuche, die ich über die Elektricitätsentwickelung beim Verdampfen von Wasser unter dem einfachen Atmosphärendrucke anstellte, haben mich zu einem ähnlichen Resultate geführt, nach welchem diese Elektricität ebenfalls nur in der Reibung ihren Grund hat, die Verdampfung aber nicht ihre Ursache ist, und zwar weder für sich allein, noch auch durch die dabei stattfindende Trennung der Dämpfe von den im Wasser aufgelösten Substanzen. — Merkwürdig ist dabei, dass schon Volta (meteorologische Briefe) sehr schwankend war, ob er diese Elektricität auf Kosten der Verdampfung, oder auf die der Reibung (der Wassertheilchen mit der Luft) setzen sollte, — und dass er sich eigentlich nur für Ersteres entschied, weil bei der Bildung von Nebeln in der Luft positive Elektricität frei werde. Da das aber das Phänomen ist, dessen Erklärung man aus den Versuchen im Zimmer erst erklären will, so kann es bei der Deutung von diesen kein Stimmrecht haben.

Die Thatsachen, welche ich für meine Ansicht anzuführen habe, lassen sich unter drei Rubriken bringen.

1) *Die Erscheinungen bei der Elektricitätsentwickelung durch Verdampfung in offenen Gefässen.*

Die von Pouillet angeführten Versuche habe ich, so weit ich sie wiederholte, vollkommen bestätigt gefunden. Lässt man in einen reinen, mit einem empfindlichen Elektroskop verbundenen und isolirten Platintiegel, den man vorher erhitzt, dann aber von der Wärmequelle, die ausserdem die Elektricität ableiten würde, entfernt hat, reines Wasser eintropfen und verdampfen, so erhält man keine Elektricität, weder ohne, noch mit Condensator. Tropft man eine Kochsalzlösung in den heissen Tiegel, so erhält man anfänglich, so lange der Tropfen wegen zu grosser Hitze des Tiegels kugelförmig umhertreibt, ebenfalls keine, oder nur sehr geringe Spuren von Elektricität; sobald aber bei hinlänglicher Abkühlung des Tiegels die Flüssigkeit aufkocht, das Salz sich absetzt und umherspritzt, so ladet sich das Elektroskop negativ, und zwar bei einem grossen Tiegel ziemlich stark.

Schon diese plötzliche Entwickelung bei der heftigen Dampfbildung ist auffallend; noch mehr ist es aber der Umstand, dass der Condensator hiebei von sehr unbedeutendem Nutzen ist. Läge die Quelle der Elektricitätsentwickelung in der Verdampfung, so sollte der Condensator eine grössere Menge an-

sammeln, allein das ist nicht der Fall, und während der Tropfen ruhig im heissen Tiegel allmählig verdampft, giebt der Condensator so wenig Zeichen von Elektricität, als das Elektroskop ohne ihn. Beim Aufkochen und Umherspritzen bekommt man wohl zuweilen mit Hilfe des Condensators etwas mehr Elektricität als ohne ihn, — das ist jedoch viel unbedeutender und unbestimmter, als es sein müsste, wenn die Dampfbildung die Ursache wäre, von welcher sich erwarten liesse, dass sie viel, aber schwach gespannte Elektricität entwickeln würde. Ist aber, wie ich glaube, nur die Reibung der umher gespritzten Wassertheilchen an den heissen Tiegelwänden die Ursache der Elektricität, so ist begreiflich, dass sie mit merklicher Spannung, aber in so geringer Menge auftreten werde, dass der Condensator ohne grossen Nutzen zu ihrer Ansammlung ist. — Das reine Wasser, wenn es zu kochen anfängt, findet die Tiegelwände überall schon so weit abgekühlt, dass es dieselben netzt und nun keine Elektricität erregt. Eine Salzauflösung aber kommt, vorzüglich wenn sich Salz ausscheidet, viel eher ins Kochen, die umhergeworfenen Wassertheilchen treffen die Tiegelwände noch heiss genug, um an ihnen fortzugleiten, ohne sie zu netzen, und dann reiben sie sich an ihnen und entwickeln Elektricität.

Damit ist sehr wohl im Einklange, dass ein grosser Tiegel das Phänomen besser zeigt als ein kleiner; jener hält sich heisser, und es ist an den höheren Wänden leichter eine Begegnung der Wassertröpfchen mit den Wänden möglich als bei einem kleinen Tiegel oder wohl gar einer flachen Schale, die am wenigsten geeignet ist, das Phänomen zu zeigen.

Damit stimmt es gut, dass der Versuch bald besser, bald weniger gut gelingt; denn es hängt vom Zufall ab, ob gerade viele Wassertheilchen die Tiegelwände treffen, dann aber herausgeworfen werden, ohne wieder in den Tiegel zurückzufallen, was beides nothwendig ist, wenn sie positive Elektricität mit sich fortnehmen sollen.

Dass man beim Eintropfen des Wassers zuweilen schon Spuren von Elektricität erhält, ist leicht erklärlich, weil dabei leicht einzelne Theilchen zurückspritzen können; und auch dass man, wiewohl selten, ehe das eigentliche Aufkochen beginnt, geringe Elektricität wahrnehmen kann, kommt daher, dass, wenn das Wasser Salz enthält, einzelne Theilchen zuweilen schon früher verspritzen.

Man erhält aber viel stärkere Elektricität, wenn man den Tiegel mit irgend einer Substanz mehr oder weniger füllt, mit dieser erhitzt, und dann nach Beseitigung der Lampe Wasser ausspritzt. — Ich habe in einem grossen und in einem kleinen mit dem Elektroskop vermittelst eines Glühringes mit Platindrähten verbundenen Platintiegel mit Säure ausgekochten und sorgfältig ausgesüssten Quarzsand; gröbliche, reine und ebenfalls durch kochende Chlorwasserstoffsäure und dann hinlängliches Wasser gereinigte Porzellanstückchen; Stückchen von fasrigem Rotheisenstein und von Magneteisenstein, sowie stark angerostete Eisenfeilspäne zum Glühen gebracht, isolirt, und dann mit destillirtem Wasser, welches in dem leeren Tiegel keine Spur von Elektricität entwickelte, bespritzt, — und immer sehr leicht die Goldblättchen des Elektroskops zum Anschlagen bringen können.

Endlich habe ich in den Platintiegel Platindraht, zusammengerollt und in einzelnen Stückchen, gelegt, mit Königswasser gekocht und dann durch mehrmaliges Kochen in reinem Wasser vollständig gereinigt, dann mit dem Elektroskop in Verbindung erhitzt, und destillirtes Wasser aufgespritzt. Sogleich divergirten die Goldblättchen sehr stark mit negativer Elektricität.

Jeder, der diese einfachen Versuche wiederholt, wird überrascht von der starken Wirkung sein. — Nimmt man anstatt des Wasses Kochsalzlösung, so ist der Erfolg nicht anders, wenigstens lässt sich bei der Unmöglichkeit, dabei Messungen anzustellen, kein Unterschied wahrnehmen.

Nur bei dem Platindrahte war die Wirkung, wenn auch immer noch sehr stark, doch schwächer als bei den anderen Substanzen; ich schreibe dieses jedoch nur dem Umstande zu, dass der Draht, von dem ich nur eine beschränkte Menge zur Disposition hatte, weniger dicht im Tiegel lag und daher, während die Lampe ausgelöscht, und der Deckel beseitigt wurde, sich mehr abkühlte als die anderen Körper, auch der Reibung der verspritzenden Wassertheilchen weniger Oberfläche darbot.

Nimmt man Kaliauflösung, so erhält man positive Elektricität, wogegen bei reinem Wasser und Kochsalzlösung sie immer negativ ist, — was weiter nichts sagen will, als dass die Reibung hier das Wasser negativ, dort positiv macht. Es wäre auch wohl möglich, Substanzen zu finden, die mit reinem Wasser positiv würden, was mir aber nicht gelungen ist.

Ich habe versucht, Terpenthinöl zu prüfen, welches Faraday zu so entscheidenden Versuchen benutzte, allein theils entzündete es sich auf den zu heissen Porzellanstückchen, theils kam es nicht ins Verspritzen und gab niemals Elektricität.

Da aber bei diesen so leicht anzustellenden und wegen der Stärke und Unfehlbarkeit der Wirkung unzweideutigen Versuchen, Wasser mit Substanzen, auf die es gar keine chemische Einwirkung ausübt, bei seinem lebhaften Verkochen Elektricität entwickelt, so kann die Erklärung von Pouillet nicht richtig sein, während er selbst die frühere Annahme, dass durch den Act der Dampfbildung allein Elektricität entwickelt werde, so gut widerlegt hat.

Einige andere Versuche, meist Wiederholungen von den von Volta und Saussure angestellten, mögen nur kurz erwähnt werden. In einem dicken und tiefen gusseisernen Tiegel, der inwendig sehr glatt polirt war, gab destillirtes Wasser beim Aufkochen und Verspritzen starke negative Elektricität; — dagegen wurde ein Tiegel von Schmiedeeisen positiv, wobei jedoch zu erinnern ist, dass in demselben Kali geschmolzen worden war, und nach Pouillet es selbst bei Platintiegeln schwer ist, sie ganz von Kali zu reinigen. — Ein rothglühendes Eisen, in ein isolirtes blechernes Gefäss mit Wasser geworfen, elektrisirte dasselbe theils nicht, theils negativ, letzteres besonders deutlich und bis zum Anschlagen der Goldblättchen, wenn das aufkochende Wasser zum Theil herausgeworfen werden konnte.

2) *Die sogenannte freiwillige Verdampfung, d. h. die Verdampfung bei Temperaturen unter dem Siedepunkte, entwickelt keine Elektricität.*

Volta will zwar Elektricität erhalten haben, wenn Wasser in isolirten Gefässen bei 60 und 70° R. verdampfte, allein Saussure sind solche Versuche nie geglückt, (Voyages dans les Alpes 8°. T. 3. pag. 346) und mir haben sie ebenfalls keine Elektricität gegeben. Unter andern wurde ein Tuch, mit Brunnenwasser und ein ander Mal mit Kochsalzlösung getränkt, isolirt in der Nähe des Ofens aufgehängt, und mit dem Condensator verbunden. Ich konnte keine Spur von Ladung erhalten, obwohl die Isolirung vollkommen gut war, und eben so die leitende Verbindung des Tuches mit dem Elektroskope, denn dieses, absichtlich geladen, behielt seine Spannung lange bei, verlor sie aber augenblicklich bei einer ableitenden Berührung des Tuches. Eben so vergeblich wurde ein Tiegel mit nassem Sande erhitzt, er rauchte lange Zeit stark, ohne Spuren von Elektricität mit oder ohne Condensator zu geben.

3) *Durch Verdichtung von Dampf zu Wasser wird keine Elektricität entwickelt.*

Von Bennet (Volta's meteorologische Briefe, 4ter Brief Seite 141 der deutschen Uebersetzung) und von Grotthuss (Gehlen's Journal für Chemie Bd. 9. S. 221) sind Versuche beschrieben, nach welchen Wasser, welches sich aus seinen Dämpfen an kalten Körpern niederschlug, diese positiv elektrisirt habe.

Auch Volta (meteorol. Briefe, 4ter Brief S. 142 in der Anmerkung) beschreibt einen ähnlichen Versuch, der aber ziemlich umständlich anzustellen, und auch wohl schwer von allem Irrthum frei zu erhalten sein dürfte.

Saussure (Voyages dans les Alpes T. 3. p. 348) und andere Beobachter haben dagegen dergleichen nicht auffinden können.

Ich habe darüber mehrere Versuche angestellt, aber immer negative Resultate erhalten.

Zuerst wurde ein Kessel von verzinntem Eisenblech mit kaltem Wasser gefüllt, isolirt aufgehängt und mit einem Elektroskop, das beliebig mit einem Condensator versehen werden konnte, verbunden. — Darunter stellte ich eine Schale mit warmen Wasser, so dass die aufsteigenden Dämpfe in Menge sich an dem Kessel niederschlugen und seine ganze Oberfläche mit Feuchtigkeit überzogen. Dabei blieb die Isolirung hinlänglich gut, wenn man auch die Schale mit heissem Wasser dem Kessel bis auf 6 Zoll näherte. Das Wasser war theils gewöhnliches, doch ziemlich reines Brunnenwasser, theils enthielt es Kochsalz bis zur Sättigung aufgelöst. Das Elektroskop wurde bald ohne, bald mit Condensator angewendet. — In keinem Falle zeigte sich der Kessel elektrisch. —

Ferner wurde ein Kolben mit einem ziemlich weiten Glasrohre luftdicht durch einen Kork verbunden, und das zweimal rechtwinklicht gebogene Rohr in das Wasser eines Glasgefässes getaucht, so dass, wenn man in dem Kolben eine Flüssigkeit zum Kochen brachte, die Dämpfe sich in jenem Wasser ver-

dichteten. — Das Rohr war in der Mitte seines horizontalen Theiles etwas aufwärts gebogen, um es hier erhitzen zu können, ohne ein Zerspringen befürchten zu müssen. Das Wasser in dem Kolben wurde mittelst eines durch den Kork gesteckten Drahtes mit dem Erdboden, das Abkühlwasser durch einen Draht mit dem Elektroskop in Verbindung gebracht. — Ehe das Wasser im Kolben zum Kochen gebracht war, zeigte sich das Elektroskop und das damit in Verbindung stehende Abkühlwasser vollkommen isolirt. — Wenn man aber den Kolben bis zum Sieden seines Inhaltes erhitzte, so war die Isolirung gänzlich aufgehoben, das Elektroskop war durch eine genäherte Siegellackstange nicht mehr bleibend zur Divergenz zu bringen. Die Wasserdämpfe, oder vielleicht eher noch die dadurch inwendig feuchte Glasröhre leitete daher vollkommen. Wenn man die Mitte der Röhre durch eine Lampe oder auch durch Kohlenfeuer erhitzte, blieb die Ableitung gleich vollkommen, so lange das Feuer gegenwärtig war; — wenn man aber dieses beseitigte, zeigte sich das Elektroskop auf einige Zeit, so lange nämlich das Glasrohr noch über 100°C. warm blieb, hinlänglich isolirt, um eine empfangene Ladung einige Zeit zu behalten, — wenn man während dessen nicht zu heftig im Kolben kochen liess. — Diese allerdings nur kurze Zeit wurde benutzt, um zu untersuchen, ob die in dem Wasser sich niederschlagenden Dämpfe Elektricität entwickelten; aber weder ohne noch mit Condensator, weder mit reinem Wasser noch mit Kochsalzlösung in dem Kolben konnte ich eine Spur von Elektricität erhalten.

Vorzüglich um die Pouilletsche Ansicht zu prüfen, wurden endlich in einem Platintiegel Stückchen von Chlorcalcium oder Kochsalz, oder mit Kochsalz getränkter trockner Sand gethan, und dieser Tiegel isolirt mit einem empfindlichen Elektroskop verbunden. In einer metallenen Retorte wurde Wasser ins Kochen gebracht, und durch ein ziemlich enges metallisches Rohr liess ich die Dämpfe aus einiger Entfernung in den Tiegel strömen. Dabei wurde die Isolirung des Elektroskops zwar etwas vermindert, es behielt jedoch schwache Grade von Spannung lange Zeit bei, und der Condensator hielt sich recht gut geladen. — Aber in keinem Falle konnte ich, weder ohne noch mit Condensator, Elektricität beobachten, obwohl die in dem Tiegel befindlichen Substanzen nicht unbeträchtlich Wasser aufnahmen. — Nun sollte man aber wohl meinen: wenn durch die Trennung der Dämpfe von dem in dem Wasser aufgelösten Salze Elektricität entwickelt wird, so muss dieses bei der Vereinigung der Dämpfe mit dem Salze auch der Fall sein, die Dämpfe müssten das Salz in den entgegengesetzt elektrischen Zustand versetzen. Diess geschieht aber nicht.

Aus diesem Allen glaube ich zum Schluss zwar die Behauptung nicht wagen zu können, dass bei der Dampfbildung oder bei dem Niederschlage des Dampfes keine Elektricität frei werde, um so weniger, als ich nicht im Stande wäre für die Elektricität der Luft und der Wolken eine andere Ursache anzugeben; — allein ich glaube folgern zu können, dass die bisherigen Versuche die Elektricitätserregung durch Dampfbildung aus reinem, oder aus, andere Substanzen in Auflösung enthaltendem, Wasser nachzuweisen nicht vermögen.

II.

Über die Wirkung der Luft bei der Anziehung und Abstossung elektrischer Körper.

Man hat mit Coulomb und Biot gewöhnlich angenommen, und viele Physiker dürften noch immer annehmen, die unmittelbare Ursache, weshalb gleichnamig elektrische Körper sich abstossen, ungleichartig elektrische sich anziehen, liege darin, dass an der Oberfläche zweier einander genäherten isolirten Leiter die Elektricität an den einander zugewendeten Seiten mit anderer Spannung auftritt als an den abgewendeten, und daher die Luft auf derjenigen Seite, wo sich die grössere elektrische Spannung befindet, den Körper weniger stark drücke als auf der andern, indem ein grösserer Theil ihres Druckes dort von der ihr entgegenwirkenden Elektricität aufgehoben wird; — also der Körper, ist seine Beweglichkeit gross genug, von der Luft nach der Seite hin getrieben wird, wo die grössere elektrische Spannung vorhanden ist. Dieser Ansicht zufolge ist zwar die abstossende oder anziehende Kraft, die man den gleichnamigen oder ungleichnamigen Theilchen der Elektricität beilegt, die Grundursache des Phänomens, die Bewegung von Körpern wird aber erst durch die Luft, oder vielmehr durch den Druck vermittelt, den die sich auszubreiten strebenden elektrischen Theilchen auf die sie von der Oberfläche der Leiter zurückhaltende Luft ausüben. Damit stehen unsere übrigen Vorstellungen von dem Verhalten der Elektricität zu Leitern in so innigem Zusammenhange, dass eine Aenderung auch in diesen nothwendig erscheint, wenn man die Mitwirkung der Luft bei der Bewegung der Körper durch Elektricität nicht zugeben will. Man hat aber Versuche angeführt, die von Riess in Dove's Repertorium Bd. 2. S. 13. sich zusammengestellt finden, nach welchen diese Mitwirkung der Luft bei den elektrischen Anziehungen und Abstossungen als nicht vorhanden sich ergeben soll, und die im Allgemeinen darin bestehen, dass

1) im luftverdünnten Raume die Abstossung zweier elektrischer Körper eben so statt findet, wie bei dem gewöhnlichen Atmosphärendrucke, und

2) selbst im absoluten Vacuo Abstossung wahrgenommen wird.

Da hiermit die Erklärung eines Grundphänomens als unrichtig sich ergeben soll, ohne dass eine genügendere bis jetzt an ihre Stelle gesetzt worden ist, — so dürfte es Entschuldigung finden, wenn in Folgendem durch höchst einfache Betrachtungen, die allerdings jeder Physiker selbst anstellen kann, mancher vielleicht angestellt hat, zu zeigen gesucht wird, dass die angedeuteten Versuche nicht hinreichen, die Unwesentlichkeit des Vorhandenseins umgebender Luft bei den durch die Elektricität bewirkten Bewegungen festzustellen.

Man braucht nämlich nur die Grösse des Druckes, den in irgend einem gegebenen Falle einer elektrischen Wirkung zu Hervorbringung derselben erforderlich ist, in Quecksilberhöhen zu berechnen, um sich zu überzeugen, dass derselbe so ausserordentlich klein ist, dass immer noch genug Spannung in dem umgebenden Medium zugegeben werden muss, um die beobachtete Wirkung hervorzubringen.

Kennt man die Grösse der Kraft, mit welcher sich zwei Leiter anziehen oder abstossen, in Milligrammen, $= p$, ferner die Grösse des Querschnittes in Quadratmillimetern desjenigen Leiters, der bewegt wurde, normal auf die Richtung der Kraft, $= a$, und nimmt man an, was allerdings nicht ganz richtig ist, jedoch hier, wo es nur auf eine ohngefähre Schätzung ankommt, erlaubt sein dürfte, dass die Elektricität auf derjenigen Seite des Leiters, nach welcher hin er sich bewegen will, gleichförmig an der Oberfläche vertheilt sei, so ist die Quecksilberhöhe, deren Druck auf dieselbe Oberfläche dem von der Elektricität ausgeübten Drucke gleich kommt,

$$h = \frac{p}{13{,}597 \,.\, a} \text{ Millimeter.}$$

Die stärksten Wirkungen, von denen ich Messungen gefunden habe, sind die von Deimann und van Troostwyck (Beschreibung einer Elektrisirmaschine — nach Gehler's Wörterbuche, neu bearb., Band 3. S. 675), die für eine Kugel von 4 Zoll Durchmesser Abstossungen bis zur Grösse von 235 Gran, und Anziehungen bis 530 Gran angeben, was dem Drucke einer Quecksilbersäule von 0,12 und 0,27 Millimeter entspricht.

Geringer sind schon die von Riess (Dove's Repertorium Bd. 2. S. 39) gemessenen Abstossungen bis 4 Gran bei einer Kugel von 7,5 Linien Durchmesser, was so viel ist als der Druck von 0,085 Millimeter Quecksilberhöhe.

Simon (Gilb. Ann. Bd. 28. S. 208) fand an seiner Waage verschiedene, auf Kugeln von 0,4 Zoll Durchmesser wirkende Abstossungen, deren grösste 0,186 Gran betrug, oder dem Drucke einer Quecksilberhöhe von 0,01 mm gleichkommt.

Harris (nach Dove's Repertorium Band 2. S. 5) giebt für Scheiben von 2 Zoll Durchmesser Anziehungen von höchstens 4 Gran, dem Drucke von 0,0034 mm entsprechend.

Egen (Pogg. Ann. Band 5. S. 199 und 281) maass Abstossungen, die ohngefähr einem Drucke von 0,00005 bis 0,0022 mm Quecksilberhöhe gleichkommen.

Wenn die Korkkugel des Elektroskops auf dem ersten Conductor meiner Elektrisirmaschine bis 90° steigt, so entspricht die Kraft, welche sie in dieser Lage zu erhalten vermag, dem Drucke einer Quecksilbersäule von 0,066 mm auf ihre untere Fläche.

Um möglichst starke Abstossungen zu erhalten und zu messen, construirte ich eine sehr unempfindliche Drehwaage, indem ich an einen nur kurzen Metalldraht einen Glasstab horizontal aufhing, und denselben an seinen Enden mit Messingkugeln von 18,2 mm Durchmesser versah. Durch Schwingungsversuche mit Zusatzgewichten, die auf den Glasstab in zwei verschiedenen Entfernungen aufgehängt wurden, bestimmte ich das Trägheitsmoment der Waage, und fand dadurch, dass zu einer Drehung des Armes um 1° eine auf den Mittelpunkt der Kugeln drückende Kraft von 3,378 Milligramm, oder auf Eine Kugel der einseitige Druck einer Quecksilbersäule von 0,00304 mm Höhe erforderlich war. Indem die eine Kugel in Berührung mit einem elektrisirten Leiter gebracht, und dann der Aufhängepunkt des Drahtes so stark gedreht wurde, dass die elektrische abstossende Kraft eben keine Drehung des Armes mehr bewirken konnte,

liess sich die Grösse dieser Kraft leicht messen. — War der Apparat in dem Zimmer frei aufgestellt, und die eine Kugel der Drehwaage mit dem ersten Conductor der Elektrisirmaschine in Berührung gebracht, so konnte ich, wenn die Maschine gut wirkte, den Draht um 200° drehen, ehe bei fortgesetztem Drehen der Scheibe die kleine Kugel aufhörte, sich theilweise von der grossen zu entfernen. Dieses giebt eine abstossende Kraft auf die kleine Kugel, welche durch den einseitigen Druck einer Quecksilbersäule von 0,608^{mm} Höhe ausgedrückt ist, die grösste abstossende elektrische Kraft, welche mir gemessen vorgekommen ist. Wenn auch kräftigere Maschinen als die mir zu Gebote stehende noch grössere Intensitäten hervorbringen, so werden diese doch immer noch unterhalb der Grenze bleiben, bis zu welcher gutwirkende Luftpumpen die Luft zu verdünnen vermögen. Dabei ist aber wesentlich noch zu berücksichtigen, dass man unter einer Glocke niemals Spannungen von solcher Grösse hervorbringen kann. Denn als ich meine Drehwaage unter eine geräumige Glocke brachte, unter welcher ein Gefäss mit concentrirter Schwefelsäure stand, und wo die eine Kugel der Drehwaage mit einem oben abgerundeten, mit der Maschine isolirt verbundenen Cylinder in Berührung gebracht wurde, konnte ich keine grössere Kraft, als welche 24° Drehung oder 0,073^{mm} Quecksilberhöhe entspricht, hervorbringen; — und als ich die Luft unter der Glocke bis auf 2 Linien Quecksilberhöhe auspumpte, vermochte ich kaum eine merkliche Abstossung vorübergehend zu bewirken, sie war aber mit dieser unempfindlichen Drehwaage nicht mehr messbar.

Man sieht daher, dass, selbst wenn sehr unempfindliche Elektroskope noch Abstossung in der Guerickeschen Leere zeigten, diess kein Einwurf gegen die Annahme sein kann, dass der Luftdruck diese Wirkung hervorbringe; — die in solchen Fällen angewendeten Elektroskope sind aber wohl immer viel empfindlicher gewesen, und wie verschwindend klein der zu Bewegung derselben nöthige Druck gegen den von der noch vorhandenen Luft ausgeübten sei, sieht man aus obiger Berechnung der von Egen gemessenen Abstossungen.

Um dieses noch weiter zu begründen, habe ich die Kraft geschätzt, die der Schwerkraft bei einem Goldblattelektrometer das Gleichgewicht hält. Ein Goldblättchen von 48^{mm} Länge und 5^{mm} Breite wiegt 0,6 Milligrammen. Divergiren zwei solche Geldblättchen am untern Ende um 10^{mm}, und nimmt man an, dass die Elektricität nur im unteren Viertel der Blättchen, aber gleichförmig verbreitet wäre, eine sehr ohngefähre Annahme, die aber hier gestattet sein mag, — so finde ich die Kraft, welche die Goldblättchen auseinander hält, durch den Druck einer Quecksilbersäule von 0,000058^{mm} ausgedrückt. Und dieses entspricht bei Weitem nicht den schwächsten noch zu beobachtenden Abstossungen.

Es ist also wohl einleuchtend, dass die Versuche in der Guerickeschen Leere durchaus nichts gegen die Annahme der Wirkung des Luftdrucks bei elektrischen Anziehungen und Abstossungen beweisen können; allein selbst die Versuche in der Torricellischen Leere, die Davy (Gilb. Ann. Bd. 72. S. 366) mit so vieler Mühe anstellte, sind dazu nicht hinreichend, denn wer wollte dafür bürgen, dass in einer solchen Leere nicht Luftresiduen oder Dämpfe existiren, die weniger als $\frac{1}{10000}$ Millimeter Spannung haben?

Wir sind daher, glaube ich, in dieser Hinsicht nicht weiter gelangt als Cavallo, der (vollst. Abhandl. der theoret. und prakt. Lehre von der Elektricität, aus dem Engl., 4te Aufl. Leipzig 1797. Band 2. S. 36) seine Erzählung von fremden und eigenen Versuchen über das Verhalten der Elektricität im luftverdünnten Raume mit den Worten schliesst: «Aus diesen Versuchen erhellet, erstlich, dass man bei dem höchsten Grade der Verdünnung, den man durch die beste Luftpumpe hervorbringen kann, und der etwa Tausend beträgt, noch elektrisches Licht und elektrisches Anziehen, wenn auch sehr schwach, wahrnehmen kann; zweitens, dass das elektrische Anziehen und Zurückstossen abnimmt, je mehr die Luft verdünnt wird, sich auch eben so die Stärke des Lichts allmälig verringert. Daher sollte man wohl nach der Analogie schliessen können, dass Anziehung und Licht bei völliger Abwesenheit der Luft aufhören müssen.»

Wenn die Ansicht richtig ist, dass die an der Oberfläche von Leitern angehäufte freie Elektricität einen Theil des Luftdruckes auf den Körper aufhebt, — so muss das Quecksilber in einem vollkommen ausgekochten Barometer sinken, wenn man es elektrisirt. Schon Changeux und van Marum (Gilb. Ann. Band 1. S. 117) haben darüber Versuche, aber mit so unentschiedenem und widersprechendem Erfolge angestellt, dass daraus nichts gefolgert werden kann. Aehnliche Versuche mit ähnlichen Resultaten führten mich darauf, die Grösse zu berechnen, die man in der Veränderung des Barometerstandes zu erwarten habe, und indem ich dadurch mich überzeugte, dass diese Grösse viel zu klein sei, um auf gewöhnliche Art beobachtet werden zu können, war diess zugleich die Veranlassung zu obigen Betrachtungen. Ich construirte nachher ein Bernoullisches Barometer mit horizontalem unteren Schenkel von viel geringerer Weite als der obere, und fand wirklich, dass beim Elektrisiren des Quecksilbers, wenn die Röhre neu und sorgfältig ausgekocht war, dasselbe in dem horizontalen Schenkel nach vorn lief, bei Wegnahme der Ladung aber wieder zurückging. Da jedoch keine constanten, namentlich auch keine messbaren Resultate erlangt wurden, woran die Schuld an der Wirkung der Capillarität und auch wohl daran lag, dass die geringste Menge Luft, die in die Torricellische Röhre drang, alle Wirkung vernichtete, so enthalte ich mich einer weiteren Angabe über die Einrichtung des Apparates und die Ergebnisse der angestellten Versuche.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN,

VON

WILHELM WEBER.



Die elektrischen Flüssigkeiten, wenn sie in den ponderabeln Körpern *bewegt* werden, verursachen Wechselwirkungen der *Molecüle dieser ponderabeln Körper,* von welchen alle galvanischen und elektrodynamischen Erscheinungen herrühren. Diese von den *Bewegungen* der elektrischen Flüssigkeiten abhängenden Wechselwirkungen *ponderabeler* Körper sind in *zwei* Klassen zu theilen, deren Unterscheidung für die genauere Erforschung der Gesetze wesentlich ist, nämlich: 1) in solche Wechselwirkungen, welche jene Molecüle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand unmessbar klein ist, und die man mit dem Namen der galvanischen oder elektrodynamischen *Molecularkräfte* bezeichnen kann, weil sie im Innern der Körper statt finden, durch welche der galvanische Strom hindurch geht, und 2) in solche Wechselwirkungen, welche jene Molecüle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand messbar ist, und die man mit dem Namen der *aus der Ferne* (im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Abstände) wirkenden galvanischen oder elektro-dynamischen Kräfte bezeichnen kann. Diese letztern Kräfte wirken auch zwischen den Molecülen, die zwei verschiedenen Körpern angehören, z. B. zwei Leitungsdrähten. Man sieht leicht ein, dass zur vollständigen Erforschung der Gesetze der *ersten* Klasse von Wechselwirkungen eine genauere Kenntniss der *Molecularverhältnisse* im Innern ponderabler Körper nöthig ist, als man gegenwärtig besitzt, und dass man ohnedem nicht hoffen könne, die Untersuchung dieser Klasse von Wechselwirkungen durch Aufstellung vollständiger und allgemeiner Gesetze zum völligen Abschluss zu bringen. Anders verhält es sich dagegen mit der *zweiten* Klasse von galvanischen oder elektrodynamischen Wechselwirkungen, deren Gesetze an den Kräften erforscht werden können, welche zwei ponderable Körper, durch welche die elektrischen Flüssigkeiten sich bewegen, bei *abgemessener gegenseitiger Lage und Entfernung* auf einander ausüben, ohne dass es dabei nothwendig wäre, die inneren *Molecularverhältnisse* dieser ponderabeln Körper als bekannt voraus zu setzen.

Von diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen, welche von Galvani und Ampère entdeckt worden sind, muss vor der Hand noch eine *dritte* Klasse ganz geschieden werden, nämlich die von Oersted entdeckte, der *electromagnetischen* Wechselwirkungen, welche zwischen den Molecülen zweier *ponderabler* Körper in messbaren Abständen von einander statt finden, wenn in dem einen die elektrischen Flüssigkeiten bewegt, in dem andern dagegen

die magnetischen Flüssigkeiten geschieden sind. Diese Unterscheidung der *elektromagnetischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen ist für die Aufstellung der Gesetze so lange nothwendig, als die von Ampère gegebene Vorstellung vom Wesen des Magnetismus die ältere und gewöhnlichere Vorstellung von der wirklichen Existenz magnetischer Flüssigkeiten nicht vollständig verdrängt hat. Ampère selbst drückt sich über den wesentlichen Unterschied, welcher zwischen diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen zu machen sei, auf folgende Weise aus:

«Als Hr. Oersted,» sagt er S. 285 seiner Abhandlung*) «die Wirkung entdeckt hatte, welche der Leitungsdraht auf einen Magnet ausübt, konnte man in der That zu der Vermuthung sich bewogen finden, dass auch eine Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte unter einander existiren möge; aber es war dies keine nothwendige Folge der Entdeckung jenes berühmten Physikers: denn ein weicher Eisenstab wirkt auch auf eine Magnetnadel, ohne dass jedoch irgend eine Wechselwirkung zwischen zwei weichen Eisenstäben statt fände. Konnte man nicht, so lange man blos die Thatsache der Ablenkung der Magnetnadel durch den Leitungsdraht kannte, annehmen, dass der elektrische Strom diesem Leitungsdrahte blos die Eigenschaft ertheilte, von der Magnetnadel auf ähnliche Art influencirt zu werden, wie das weiche Eisen von selbiger Nadel, was dazu hinreichte, dass er auf sie wirkte, ohne dass dadurch irgend eine Wirkung zwischen zwei Leitungsdrähten, wenn sie dem Einflusse magnetischer Körper entzogen wären, resultirte? Blos die Erfahrung konnte die Frage entscheiden: ich machte sie im Monat September 1820, und die Wechselwirkung Voltaischer Leiter war bewiesen.»

Ampère führt diese Unterscheidung in seiner Abhandlung consequent durch, indem er für nothwendig erklärt, dass die Gesetze der von ihm und von Oersted entdeckten Wechselwirkungen jede für sich besonders und vollständig aus der Erfahrung abgeleitet werden. Nachdem er von den Schwierigkeiten gesprochen, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte genau zu beobachten, sagt er a. a. O. S. 183: «Es ist wahr, dass man auf keine solchen Hindernisse trifft, wenn man die Wirkung eines Leitungsdrathes auf einen Magnet misst; aber dieses Mittel lässt sich nicht anwenden, wenn es sich um Bestimmung der Kräfte handelt, welche zwei Voltaische Leiter auf einander ausüben. In der That leuchtet ein, dass, wenn die Wirkung eines Leitungsdrathes auf einen Magnet von einer andern Ursache herrührte, als der, welche bei zwei Leitungsdrähten statt findet, die über die erstere gemachten Erfahrungen in Beziehung auf die letztere gar nichts beweisen würden.»

Es leuchtet hieraus ein, dass, wenn auch in neuerer Zeit sehr viele schöne Untersuchungen in weiterer Verfolgung von Oersted's Entdeckung gemacht worden sind, doch hiermit noch nichts unmittelbar zur weitern Verfolgung von Ampère's Entdeckung geschehen sei, und dass es hierzu eigener und besonderer Untersuchungen bedarf, an denen es bis jetzt noch sehr gemangelt hat.

---

*) Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France. Année 1823.

Ampère's klassische Arbeit bezieht sich selbst nur zum kleineren Theile auf die Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander, während der grössere Theil derselben der Entwickelung und Anwendung seiner darauf begründeten Vorstellung vom Magnetismus gewidmet ist. Auch hat er selbst durch seine Arbeit die Untersuchung der Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander keineswegs als vollendet und abgeschlossen betrachtet, weder in experimenteller, noch in theoretischer Hinsicht, sondern hat auf dasjenige, was in beiden Beziehungen noch zu thun übrig bleibe, mehrfach aufmerksam gemacht.

Er giebt S. 181 der angeführten Abhandlung an, dass man auf zwei verschiedenen Wegen zu Werke gehen könne, um die Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander *aus der Erfahrung* abzuleiten, von denen er nur den einen verfolgen könne, und giebt die Gründe an, die ihn abgehalten haben, auch den andern Weg einzuschlagen, wovon der wesentlichste im Mangel genauer *Messinstrumente* besteht, die frei seien, von unbestimmbaren fremdartigen Einflüssen.

«Es giebt» sagt er a. a. O. S. 182 f., «ausserdem noch einen weit entscheidenderen Grund, nämlich die grenzenlosen Schwierigkeiten der Versuche, wenn man sich z. B. vorsetzen wollte, diese Kräfte durch die Zahl der Schwingungen eines ihrem Einflusse unterworfenen Körpers zu *messen*. Diese Schwierigkeiten rühren daher, dass, wenn man einen festen Leiter auf einen beweglichen Theil der Voltaischen Kette wirken lässt, diejenigen Theile des Apparates, welche nothwendig sind, um ihn mit der Säule in Verbindung zu setzen, auf diesen beweglichen Theil zugleich mit dem festen Leiter wirken und so die Resultate der Versuche stören.»

Eben so hat Ampère auch mehrfach darauf aufmerksam gemacht, was in *theoretischer* Hinsicht noch zu thun übrig bleibe. Z. B. sagt er, nachdem er gezeigt hat, dass es unmöglich sei, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander aus einer bestimmten Vertheilung ruhender Elektricität in den Leitungsdrähten zu erklären, S. 299:

«Wenn man dagegen annimmt, dass die elektrischen Theilchen in den Leitungsdrähten, durch Einfluss der Säule in Bewegung gesetzt, fortwährend ihre Stelle wechseln, indem sie sich in jedem Augenblicke zu neutraler Flüssigkeit vereinigen, sich wieder trennen und sogleich wieder mit andern Theilchen der Flüssigkeit der entgegengesetzten Art vereinigen, so liegt *kein Widerspruch* darin, anzunehmen, dass aus den Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen, welche jedes Theilchen ausübt, eine Kraft zwischen zwei Elementen der Leitungsdrähte sich ergeben könne, welche nicht allein von ihrem Abstande abhänge, sondern auch von den Richtungen der beiden Elemente, nach welchen die elektrischen Theilchen sich bewegen, sich mit Molecülen der entgegengesetzten Art vereinigen und sich im folgenden Augenblicke trennen, um sich wieder mit andern zu vereinigen. Gerade von diesem Abstande und von diesen Richtungen, und zwar ausschliesslich von denselben, hängt aber die Kraft ab, welche sich dann entwickelt und von der die in dieser Abhandlung auseinander gesetzten Versuche und Rechnungen mir den Werth gegeben haben.»

«Wenn es *möglich* wäre,» fährt Ampère S. 301. fort, «indem man von dieser Betrachtung ausginge, nachzuweisen, dass die Wechselwirkung zweier Elemente in der That der Formel proportional wäre, durch die ich sie dargestellt habe, so würde diese Erklärung des Fundamentalfactums der ganzen Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen offenbar jeder andern vorgezogen werden müssen; sie würde aber Untersuchungen fordern, mit denen ich mich zu beschäftigen keine Zeit gehabt habe, eben so wenig, wie mit den noch schwierigeren Untersuchungen, denen man sich unterziehen müsste, um zu erkennen, ob die entgegengesetzte Erklärung, wonach man die elektrodynamischen Erscheinungen den von den elektrischen Strömen dem Aether mitgetheilten Bewegungen zuschreibt, zu der nämlichen Formel führen könne.»

Weder Ampère hat nun aber diese Untersuchungen weiter fortgesetzt, noch sind bisher von Andern darüber weitere Untersuchungen, weder von experimenteller, noch theoretischer Seite veröffentlicht worden, und die Wissenschaft hat auf diesem Gebiete seit Ampère stille gestanden, mit Ausnahme der durch Faraday's Entdeckung hinzugekommenen Inductionserscheinungen galvanischer Ströme in einem Leitungsdrahte, in dessen Nähe ein galvanischer Strom verstärkt, geschwächt, oder versetzt wird. Diese Vernachlässigung der Elektrodynamik seit Ampère ist nicht als Folge davon zu betrachten, dass man der von Ampère entdeckten Fundamentalerscheinung weniger Wichtigkeit, als den von Galvani und Oersted entdeckten, beigelegt hätte, sondern sie ist die Folge von der Scheu vor den grossen Schwierigkeiten der Versuche, welche mit den bisherigen Mitteln und Wegen sehr schwer auszuführen und keiner so mannichfaltigen und scharfen Bestimmungen fähig waren, wie die elektromagnetischen. Diese Schwierigkeiten für die Zukunft zu beseitigen, ist der Zweck der hier vorzulegenden Arbeit, in der ich mich hauptsächlich auf die Betrachtung der rein galvanischen und elektrodynamischen Wechselwirkungen *in die Ferne* beschränken werde.

Ampère hat seine mathematische Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen in der Ueberschrift seiner Abhandlung als *einzig aus der Erfahrung abgeleitet* bezeichnet, und man findet in der Abhandlung selbst die sinnreiche einfache Methode ausführlich entwickelt, welche er zu diesem Zwecke angewandt hat. Man findet darin die von ihm gewählten Versuche und ihre Bedeutung für die Theorie ausführlich erörtert und die Instrumente zu ihrer Ausführung genau und vollständig beschrieben; doch fehlt es an einer genauen Beschreibung der Versuche selbst. Bei solchen Fundamentalversuchen genügt es aber nicht, den Zweck derselben anzugeben und die Instrumente zu beschreiben, womit sie gemacht werden, und im Allgemeinen blos die Versicherung beizufügen, dass sie von dem erwarteten Erfolge begleitet gewesen seien, sondern es ist auch nöthig, in das Detail der Versuche selbst genauer einzugehen und anzugeben, wie oft jeder Versuch wiederholt, welche Abänderungen gemacht worden, und welchen Einfluss letztere gehabt haben, kurz, protocollmässig alle Data mitzutheilen, welche zur Begründung eines Urtheils über den Grad der Sicherheit oder Gewissheit des Resultates beitragen. Solche nähere Angaben über die Versuche hat Ampère nicht mitgetheilt, und es mangeln dieselben auch jetzt noch zur Vervollständigung eines directen thatsächlichen

Beweises der elektrodynamischen Fundamentalgesetze. Die Thatsache der Wechselwirkung der Leitungsdrähte im Allgemeinen ist zwar durch häufig wiederholte Versuche ausser Zweifel gesetzt; aber nur mit solchen Mitteln und unter solchen Umständen, wo an keine *quantitativen* Bestimmungen gedacht werden konnte, geschweige, dass diese Bestimmungen eine Schärfe erreicht hätten, welche nothwendig ist, um das Gesetz jener Erscheinungen als erfahrungsmässig bewiesen zu betrachten.

Nun hat zwar Ampère häufiger von dem *Ausbleiben* elektrodynamischer Wirkungen, welches er beobachtet hatte, eine ähnliche Anwendung gemacht, wie von Messungen, die das Resultat = 0 ergeben hätten, und hat durch diesen Kunstgriff mit grossem Scharfsinne und vieler Geschicklichkeit die nothwendigsten Grunddata und Prüfungsmittel für seine theoretischen Combinationen zu gewinnen gesucht, was in Ermangelung besserer Data nicht anders möglich war; solchen *negativen* Erfahrungen, wenn sie auch einstweilen die Stelle mangelnder *positiver* Messungsresultate vertreten müssen, kann aber keineswegs der ganze Werth und die volle Beweiskraft zugeschrieben werden, welche die letzteren besitzen, wenn sie nicht selbst mit solchen Hülfsmitteln und unter solchen Verhältnissen gewonnen worden sind, mit denen und unter welchen auch wahre Messungen sich ausführen lassen, was mit den von Ampère gebrauchten Instrumenten nicht möglich war.

Man betrachte z. B. den Versuch genauer, welchen Ampère als den dritten Fall des Gleichgewichts S. 194 ff. seiner Abhandlung beschreibt, wo ein metallischer Kreisbogen auf zwei metallischen mit Quecksilber gefüllten Rinnen liegt, wovon die eine den galvanischen Strom zuführt, die andere ihn ableitet, und wo ausserdem noch dieser Kreisbogen durch ein Charnier an einen Hebel befestigt ist, der ihn mit einer verticalen, zwischen Spitzen drehbaren Welle verbindet*). Ampère hat nun beobachtet, dass jener Kreisbogen,

---

*) Ampère giebt a. a. O. folgende Beschreibung seines Instruments: «Auf einem Gestell TT' (Fig. 1.) von der Form eines Tisches erheben sich zwei Säulen EF, $E'F'$, mit einander durch zwei Querstäbchen LL', FF' verbunden; eine Axe GH wird von diesen beiden Stäbchen in verticaler Lage gehalten. Ihre beiden Enden G und H sind zugespitzt und greifen in conische Vertiefungen ein, deren eine in dem unteren Querstäbchen LL', die andere am Ende einer Schraube KZ sich befindet, welche durch das obere Querstäbchen FF' hindurchgeht und zur Feststellung der Axe GH dient, ohne dieselbe zu klemmen. Mit dieser Axe ist bei C ein Arm QO fest verbunden, dessen Ende mit einem Charnier versehen ist, in welches die Mitte eines Kreisbogens AA' eingreift, welcher, aus einem Metalldrath gebildet, stets in horizontaler Lage bleibt und dessen Halbmesser dem Abstande des Punktes O von der Axe GH gleich ist. Dieser Kreisbogen wird durch ein Gegengewicht Q balancirt, um die Reibung der Axe GH in den conischen Vertiefungen, in welche sie eingreift, zu vermindern.

Unter dem Kreisbogen AA' befinden sich zwei mit Quecksilber gefüllte Rinnen M, M', so dass die über den Rändern hervorragende Quecksilberfläche den Bogen AA' in B und B' eben berührt. Diese beiden Rinnen communiciren durch metallische Leiter MN, $M'N'$ mit den mit Quecksilber gefüllten Schälchen P, P'. Das Schälchen P und der Leiter MN, der es mit der Rinne M verbindet, sind an einer verticalen Axe befestigt, welche so in dem Tische eingelassen ist, dass sie sich frei drehen kann. Durch das Schälchen P', womit der Leiter $M'N'$ verbunden ist, geht die nämliche Axe hindurch, um welche es sich unabhängig von dem anderen Schälchen drehen kann. Sie ist davon durch eine Glasröhre V isolirt, welche jene Axe umgiebt, und wird durch eine kleine Glasscheibe U von dem Leiter der Rinne M geschieden erhalten, so dass man mit den Leitern MN, $M'N'$ beliebige Winkel bilden kann.

Zwei andere Leiter JR, $J'R'$, am Tische befestigt, tauchen respective in die Schälchen P, P' und verbinden dieselben mit den im Tische angebrachten und mit Quecksilber

während ein galvanischer Strom durch ihn hindurchgeht, auf seinen Unterlagen nicht verschoben werde, wenn man einen geschlossenen Strom darauf wirken lasse, vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Kreisbogens in die Axe der verticalen Welle falle, an welche der Kreisbogen befestigt ist. Man sieht aber leicht ein, dass, um den Kreisbogen zu bewegen, eine 4fache Reibung überwunden werden müsse, nämlich die Reibung an den beiden Unterlagen, auf welchen der Kreisbogen Fig. 1. AA' bei B und B' aufliegt, und die Reibung in den beiden Spitzen G und H, in welchen die verticale Welle sich dreht. Man weiss ferner, dass die mit den stärksten galvanischen Strömen, die man darstellen kann, hervorgebrachten elektrodynamischen Kräfte auf einen einfachen Draht, wie der durchströmte Theil des Bogens BB' ist, so schwach sind, dass der Draht höchst beweglich sein müsse, um überhaupt eine wahrnehmbare Wirkung zu zeigen. Man würde hiernach zu erwarten geneigt sein,

---

gefüllten Vertiefungen R, R'. Dazwischen endlich befindet sich noch eine dritte ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Vertiefung S.

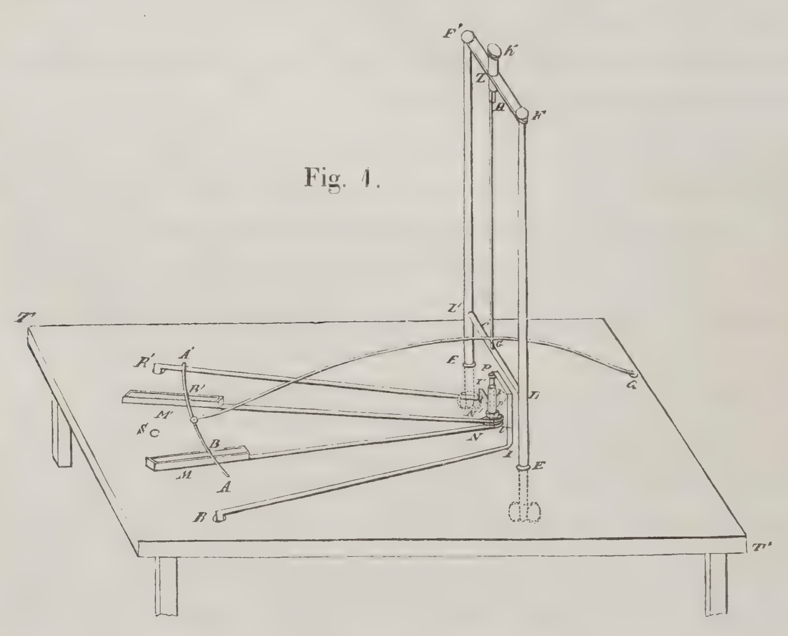


Fig. 1.

Die Art der Anwendung dieses Apparats ist folgende: Man taucht den einen Rheophor, z. B. den positiven, in die Vertiefung R, und den negativen in die Vertiefung S und verbindet letztere mit der Vertiefung R' durch einen beliebig gekrümmten Leiter. Der Strom geht durch den Leiter RJ zum Schälchen P, von da durch den Leiter NM zur Rinne M, durch den Leiter $M'N'$ zum Schälchen P', durch den Leiter $J'R'$ und endlich von der Vertiefung R' durch den krummlinigen Leiter zur Vertiefung S, in welche der negative Rheophor taucht.

Hiernach wird der Voltaische Kreislauf gebildet: 1) vom Kreisbogen BB' nebst den Leitern MN, $M'N'$; 2) von einem Kreislaufe, welcher aus den Theilen RJP, $P'J'R'$ des Apparats, aus dem krummlinigen Conductor, welcher von R' nach S geht, und aus der Säule selbst besteht. Der letztere Kreislauf wirkt wie ein geschlossener, weil er blos durch die Dicke der Glasplatte unterbrochen ist, welche die beiden Schälchen P und P' isolirt: es reicht daher hin, seine Wirkung auf den Kreisbogen BB' zu beobachten, um die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Kreisbogen bei den verschiedenen Stellungen, die man ihnen gegen einander geben kann, erfahrungsmässig zu constatiren.

dass jener Kreisbogen sich zwar in dem Falle nicht verschiebe, wo sein Mittelpunkt in der Drehungsaxe liege, dass aber auch im entgegengesetzten Falle, wo sein Mittelpunkt mit der Drehungsaxe nicht zusammenfällt, keine Verschiebung eintreten werde, weil nämlich die eben erwähnte 4fache Reibung einen viel zu grossen Widerstand entgegensetze. Ampère sagt nun jedoch a. a. O. S. 196: Lorsqu'au moyen de la charnière O on met l'arc dans une position telle que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets M, M' en vertu de l'action du courant curviligne fermé qui va de R' en S. Si au contraire son centre est dans l'axe, il reste immobile. Man vermisst hierbei, dass Ampère das offenbare Hinderniss jener vierfachen Reibung nicht erwähnt und nicht einmal ausdrücklich sagt, dass er die Bewegung des excentrischen Kreisbogens selbst gesehen und beobachtet habe. Abgesehen aber von dem Zweifel, der hieraus gegen die wirkliche Beobachtung des Factums etwa erhoben werden könnte, und vorausgesetzt, Ampère habe unter den beschriebenen Verhältnissen die Verschiebung des Kreisbogens selbst gesehen und sich auch versichert, dass dieselbe wirklich die Wirkung *elektrodynamischer* Kräfte gewesen, welche stark genug waren, um alle entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen; so ist damit noch keineswegs gesagt, bei welcher Excentricität des Kreisbogens diese Bewegung eingetreten sei und innerhalb welcher *Grenzen* sie *nicht* statt gefunden habe. Ohne Bestimmung solcher Grenzen kann aber diesem Versuche keine volle Beweiskraft zugeschrieben werden. Mir ist nicht bekannt geworden, ob dieser Versuch von andern Physikern seit jener Zeit mit Erfolg wiederholt und genauer beschrieben worden sei; doch lässt sich so viel wohl mit Sicherheit übersehen, dass auch im günstigsten Falle nur bei grossen Excentricitäten die Verschiebung statt gefunden, woraus sich aber nicht mit Sicherheit abnehmen lässt, dass die elektrodynamische Kraft genau senkrecht auf die Elemente des Kreisbogens wirke.

Ich habe durch diese Bemerkungen über Ampère's Versuche nur darthun wollen, dass die elektrodynamischen Gesetze in diesen ohne nähere Details mitgetheilten Versuchen keinen genügenden Beweis gefunden haben, und warum ich glaube, dass ein solcher Beweis auch durch Beobachtungen mit Ampère's Instrumenten nicht gegeben werden könne, sondern dass es dazu Beobachtungen mit genauen Messinstrumenten bedarf, an denen es bisher noch gebricht. Wenn man sich, trotz des Mangels eines directen thatsächlichen Beweises von der Richtigkeit der von Ampère aufgestellten Gesetze überzeugt hält, so beruht diese Ueberzeugung auf Gründen, die jenen directen Beweis keineswegs überflüssig machen. Elektrodynamische Messungen bleiben daher schon darum wünschenswerth, um diesen mangelnden directen Beweis zu liefern.

In der That erscheint es bei dem allgemeinen Bestreben, alle Naturerscheinungen nach Zahl und Maass zu bestimmen, und dadurch eine von der sinnlichen Anschauung oder blossen Schätzung unabhängige Grundlage für die Theorie zu gewinnen, wunderbar, dass in der Elektrodynamik gar kein Versuch dieser Art gemacht worden sei; mir ist aber weder von feinen, noch von groben Messungen der Wechselwirkung zweier Leitungsdräthe unter einander

irgend etwas bekannt geworden. Ich glaube um so mehr den ersten Versuch, den ich zu solchen Messungen gemacht habe, hier vorlegen zu dürfen. Dabei hoffe ich zu beweisen, dass diese elektrodynamischen Messungen noch in ganz andern Beziehungen Wichtigkeit und Bedeutung besitzen, als zum Beweise der elektrodynamischen Fundamentalgesetze, dadurch nämlich, dass sie die Quelle zu ganz neuen Untersuchungen werden, zu denen sie allein nur geeignet sind und die ohnedem gar nicht ausgeführt werden könnten.

1.

Beschreibung eines Instruments zur Messung der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte.

Die Instrumente, deren sich Ampère zu seinen elektrodynamischen Versuchen bedient hat, sind nicht von der Art, dass den damit gemachten Versuchen die Beweiskraft scharfer Messungen zugeschrieben werden kann. Der Grund davon liegt in der *Reibung*, die oft die ganze oder einen grossen Theil der zu beobachtenden elektrodynamischen Kraft annullirt und der Beobachtung entzieht. Es lässt sich mit jenen Instrumenten selbst unter günstigen Verhältnissen nicht mehr erreichen, als jene feindliche Reibung durch die schwachen elektrodynamischen Kräfte eben zu besiegen, während bei jeder schärferen Messung muss vorausgesetzt werden können, dass die Reibung im Vergleiche mit der zu messenden Kraft ein unmerklicher Bruchtheil sei.

Schon vor 12 Jahren habe ich zum Zweck der Ausschliessung der Reibung und der Ausführung wirklicher Messungen einen auf einem dünnen Holzrahmen aufgewundenen Draht, durch welchen ein galvanischer Strom geführt und welcher dann durch die elektrodynamische Anziehung und Abstossung eines Multiplicators in Bewegung gesetzt werden sollte, mit *bifilarer* Aufhängung an zwei feinen Metalldrähten versehen (ich werde diese bifilar aufgehangene Drathspirale künftig die *Bifilarrolle* nennen) und habe den einen dieser Aufhängungsdrähte zur Zuleitung und den andern zur Ableitung des galvanischen Stroms benutzt. Die ganze Bedeutung dieser Einrichtung zum Zweck der Messung habe ich aber erst später aus dem Bifilarmagnetometer von Gauss kennen gelernt, von dem ich sodann auch die Anwendung eines an der Bifilarrolle befestigten Spiegels entlehnt habe. Im Sommer 1837 habe ich darauf ein solches Instrument hergestellt und eine Reihe Versuche damit ausgeführt, die alle bewiesen, dass man die grösste Feinheit in der Beobachtung der elektrodynamischen Erscheinungen mit so schwachen Strömen erreichen könne, mit denen es vorher nie gelungen war, diese Erscheinungen hervorzubringen.

Das hier zunächst zu beschreibende Instrument ist von Herrn Inspector Meyerstein in Göttingen im Jahre 1841 verfertigt, doch habe ich erst in

Leipzig Gelegenheit gefunden, ihm eine für eine grössere Messungsreihe angemessene Aufstellung zu geben.

Es besteht dieses Instrument wesentlich aus 2 Theilen: aus der *Bifilarrolle* mit Spiegel und aus dem *Multiplicator*.

Die *Bifilarrolle*, welche Fig. 2. in verticalem Durchschnitte dargestellt ist, besteht aus zwei dünnen Messingscheiben aa und $a'a'$ von 66,8 Millimeter

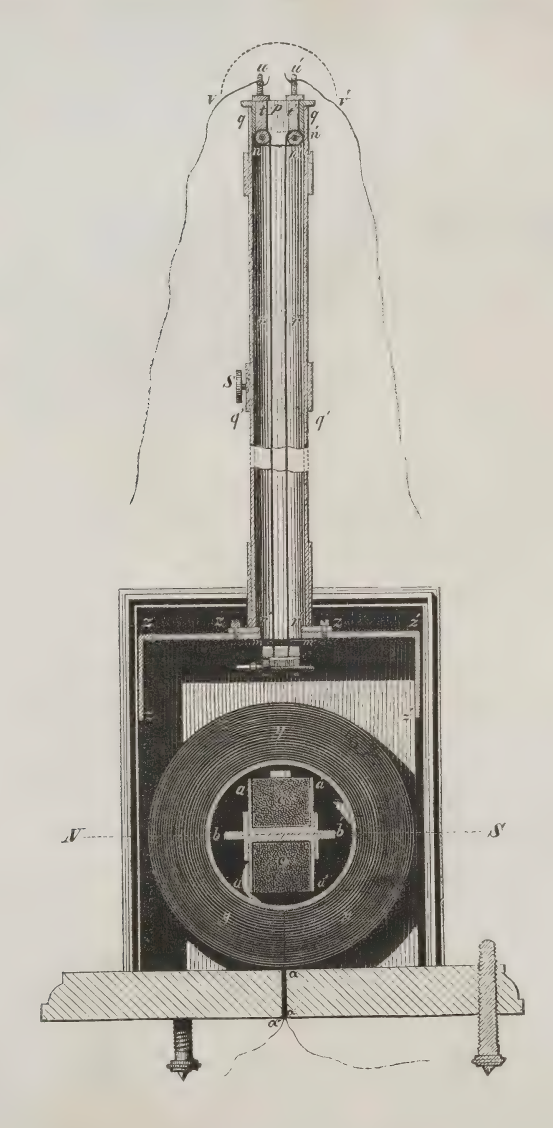
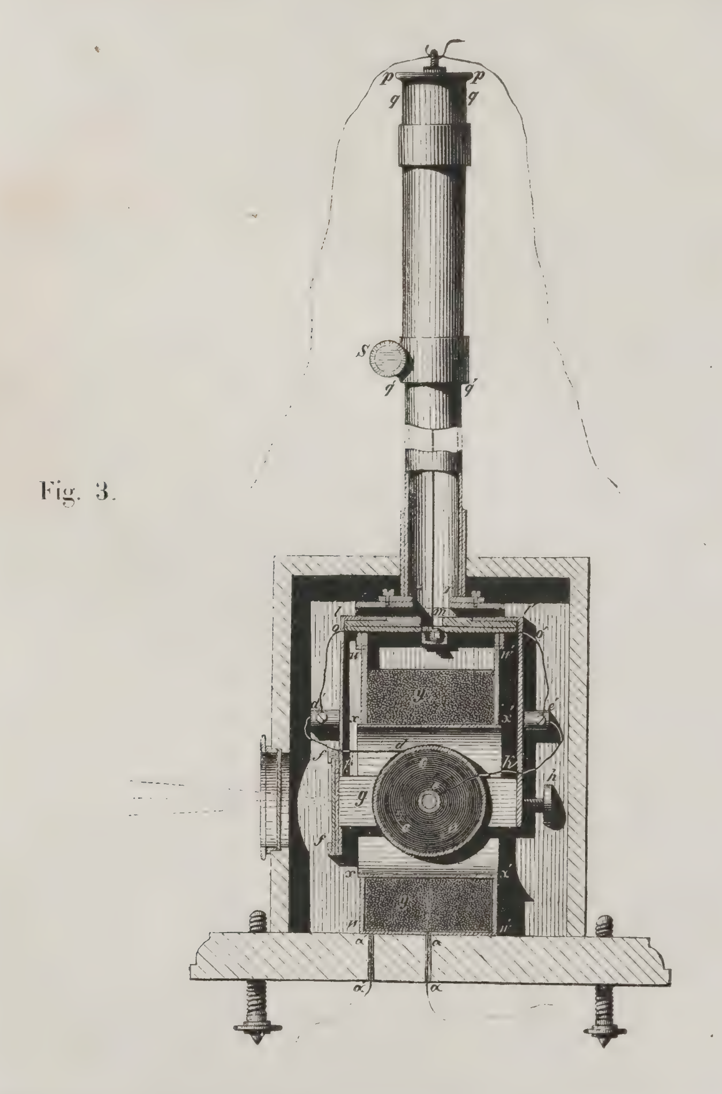


Fig. 2.

Durchmesser, welche von einer 3 Millimeter dicken messingenen Axe bb' in einem gegenseitigen Abstande von 30 Millimeter festgehalten werden. Auf jene Axe zwischen diesen Scheiben ist ein Kupferdraht cc von $\frac{4}{10}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 5000 Mal herumgewunden, und füllt den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz aus. Fig. 3.

stellt die nämliche Rolle in verticalem Durchschnitte senkrecht auf den vorigen dar. Das eine Drahtende ist dicht neben der messingenen Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung in der einen Scheibe bei *e* Fig. 3. nach aussen von *e* nach *e'* geführt; das andere Ende ist an der Peripherie des von den Drahtwindungen gebildeten Cylinders mit seidenen Fäden bei *d* festgebunden. An dieser Drahtrolle ist nun ein Planspiegel Fig. 3. *ff'* befestigt, welcher durch drei Schrauben auf einer kleinen Messingplatte festgehalten wird;

Fig. 3.



die Messingplatte ist mit zwei rechtwinklichten Fortsätzen *g*, *g'* versehen, von denen in Fig. 3. nur die hintere *g* sichtbar ist. Fig. 4., welche den horizontalen Durchschnitt giebt, zeigt beide Fortsätze in Verbindung mit der den Spiegel *ff'* tragenden Messingplatte. Diese beiden Fortsätze sind an ihren Enden auf den Aussenseiten der beiden Messingscheiben *aa* und *a'a'* angeschraubt.

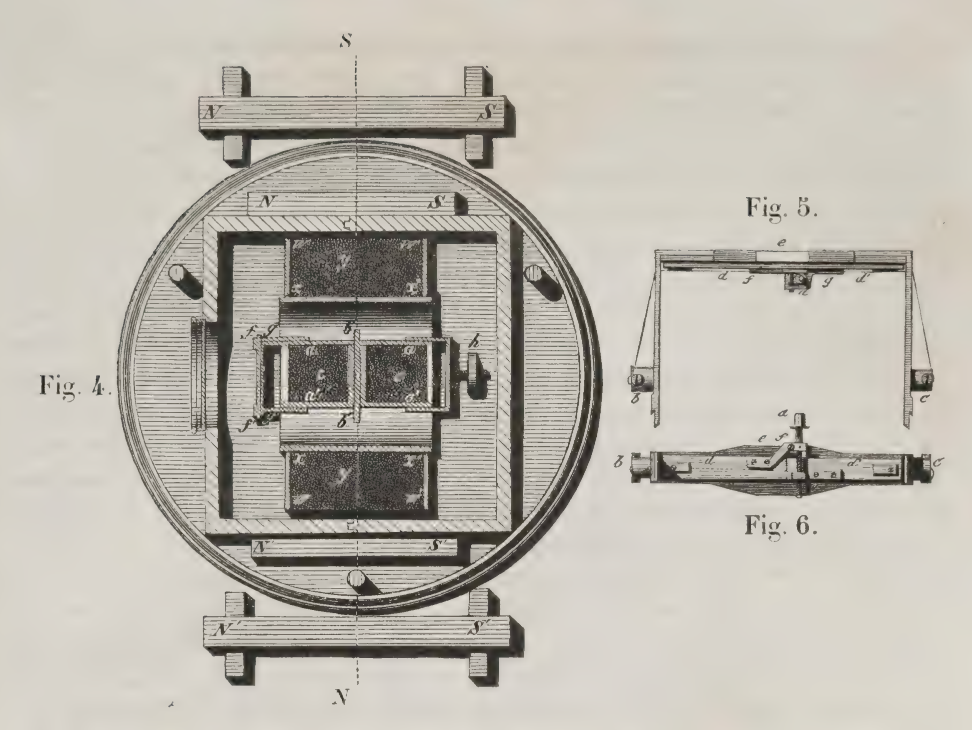


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Der Spiegel *ff* befindet sich in einer der Axe *bb'* der Drahtrolle parallelen Ebene nahe an der Peripherie der Rolle; ihm diametral gegenüber ist ein Gegengewicht *h* angebracht. Ich gebrauche jetzt einen von Oertling in Berlin geschliffenen quadratischen Planspiegel von 40 Millimeter Seitenlänge.

Die *bifilare Suspension* dieser Drahtrolle besteht aus drei Theilen: aus dem an der Rolle befestigten Halter, aus den beiden Aufhängungsdrähten und endlich aus dem unbeweglichen Träger, woran die Drähte hängen. Der *Halter* besteht aus einer messingenen Gabel oder einem Bügel Fig. 3. *ll'* mit zwei 100 Millimeter langen parallelen verticalen Armen *lk* und *l'k'* in 100 Millimeter Abstand. Die Enden der beiden Arme sind an der Messingplatte, welche den Spiegel trägt und diametral gegenüber an dem Halter des Gegengewichts bei *k* und *k'* festgeschraubt. Fig. 5. stellt diesen Halter besonders dar; bei *d* und *d'* gehen die beiden von *b* und *c* kommenden Drähte unter zwei durch die Schraube *a* stellbaren Elfenbeinplatten weg, und gehen durch zwei Kerben an den in der Mitte sich berührenden Elfenbeinplatten, durch die Oeffnung *e* senkrecht in die Höhe. Fig 6. giebt die Ansicht des Halters von unten; bei *f* und *g* ist die Verbindung der Schraube *a* mit den beiden Elfenbeinplatten *d* und *d'* dargestellt. Die durch den Schwerpunkt der Rolle gehende Verticale geht mitten zwischen beiden Kerben durch. An jedem Arme des Bügels befindet sich endlich bei *d'* und *e'* Fig. 3. eine durch Elfenbein isolirte Klemme zur Befestigung und Verbindung eines von den beiden Enden des mit Seide umsponnenen Drahtes der Rolle mit dem untern Ende eines der beiden nicht umsponnenen Aufhängungsdrähte. Der Aufhängungsdraht wird von dieser Klemme *d'* oder *e'* durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung *o* oder *o'* auf der unteren Seite des Bügels hin zu einer der beiden schon

erwähnten Kerben an den in der Mitte zusammen stossenden Elfenbeinplatten geleitet, von wo derselbe aufwärts zu den Messingröllchen bei n und n' Fig. 2. geht. Die beiden Aufhängungsdrähte sind von Kupfer, 1 Meter lang und $\frac{1}{6}$ Millimeter dick; ihr durch die Schraube a Fig. 6. zu regulirender Abstand beträgt gewöhnlich etwa 3 bis 4 Millimeter.

Der *Träger*, an welchem die beiden obern Enden der beiden Aufhängungsdrähte befestigt sind, besteht in einem starken Stück Elfenbein p (Fig. 2.), welches wie ein Deckel auf das obere Ende einer 30 Millimeter weiten Messingröhre qq' fest aufgepasst ist. Diese Messingröhre ist 150 Millimeter lang und lässt sich auf einer zweiten Messingröhre rr' auf- und abschieben, drehen und durch eine Klemmschraube s (Fig. 3.) feststellen. Diese beiden Röhren umgeben die beiden Aufhängungsdrähte ihrer ganzen Länge nach und schützen sie vor dem Einflusse der Luft. Auf der untern Seite des Elfenbeinstücks sind zwei schiebbare und mit Klemmschrauben u, u' am Elfenbein befestigte messingene Röllchen t, t' (Fig. 2.) von 10 Millimeter Durchmesser angebracht, über jedes dieser Röllchen ist ein Aufhängungsdraht geführt und endigt mit einem Oes. Die beiden Oese der beiden Drahtenden sind mit einem starken seidenen Faden zwischen t und t' zusammengebunden, ohne einander zu berühren. Durch diese beiden Röllchen und durch die Verbindung der beiden Drähte wird bewirkt, dass die beiden Aufhängungsdrähte stets gleiche Spannung haben. An jede der beiden Klemmen u, u', welche die beiden Röllchen an das Elfenbein befestigen, ist endlich ein übersponnener Kupferdraht befestigt, von denen der eine uv Fig. 2. zur Zuleitung, der andere $u'v'$ zur Ableitung des galvanischen Stroms dient.

Der *Multiplicator* endlich besteht aus zwei quadratischen Messingplatten ww und $w'w'$ (Fig. 3. 4.) von 140 Millimeter Seite mit einem kreisrunden Loche von 76 Millimeter Durchmesser. Diese beiden Messingplatten stehen parallel und vertical und werden durch eine messingene horizontale Röhre xx' von 76 Millimeter Durchmesser verbunden, durch welche sie in 70 Millimeter Abstand von einander erhalten werden. In dem Raume yy über dieser Röhre zwischen jenen beiden parallelen Platten ist der $\frac{7}{10}$ Millimeter dicke Multiplicatordrath ungefähr 3500 Mal aufgewunden. Die obere Seite des Multiplicators ist mit einem Messingdeckel $zzz'z'$ (Fig. 2.) verschlossen, welcher darauf festgeschraubt ist und in der Mitte der oberen Seite eine kreisförmige Oeffnung hat, über welcher die Messingröhre steht, von welcher die Aufhängungsdrähte umschlossen sind. An beiden Seiten dieses Deckels sind Ausschnitte angebracht, durch welche der Bügel der Bifilarrolle frei hindurch gehen und schwingen kann. Auch ist der Raum zwischen den obersten Windungen des Multiplicatordrahtes und dem Deckel weit genug, dass jener Bügel hinreichenden Raum für seine Bewegungen findet. Der Bügel wird zuerst ohne die Bifilarrolle durchgesteckt und an den Aufhängungsdrähten befestigt und dann erst wird er an die Bifilarrolle angeschraubt. Die vorstehenden untern Ränder der beiden Messingplatten am Multiplicator stehen auf einer hölzernen Platte auf, welche durch 3 Schrauben nivellirt werden kann. In dieser hölzernen Platte sind zwei Löcher $\alpha\alpha$ und $\alpha'\alpha'$ (Fig. 3.), durch welche die beiden Enden des Multiplicatordrahts nach aussen geleitet werden. Das ganze

Instrument, mit Ausnahme der Messingröhre, in welcher die Aufhängungsdrähte sich befinden, ist in einem Mahagonikästchen eingeschlossen, zum Schutz gegen den Einfluss der Luft. Dieses Mahagonikästchen hat keinen Boden, sondern wird mit den ebenen Rändern der Seitenwände auf die ebene Holzplatte gestellt, durch die es von unten verschlossen wird. Auf der oberen Seite ist eine runde Oeffnung angebracht, durch welche die schon erwähnte Messingröhre hindurchgeht. Eine zweite Oeffnung ist an der vorderen Seite des Kästchens angebracht und kann mit einem Planglase verschlossen werden. Durch sie fällt das Licht der Skale auf den Spiegel der *Bifilarrolle* und wird von dort nach dem Fernrohre zurück geworfen. Das ganze Kästchen ist vertical in zwei Hälften getheilt, welche einzeln weggenommen werden können. Von der Aufstellung des Fernrohres und der Skale gilt ganz dasselbe wie beim Magnetometer. Ich werde das hier beschriebene Instrument künftig mit dem Namen *Elektrodynamometer* oder kurz *Dynamometer* bezeichnen, weil seine nächste Bestimmung ist, die von Ampère entdeckten elektrodynamischen Kräfte zu messen.

Die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette ist dem Quadrat der Stromintensität proportional.

2.

Die *Intensität* eines constanten Stroms ist durch die *Menge* Elektricität bestimmt, welche während des *Zeitmaasses* (während einer Secunde) durch einen *Querschnitt* der Kette geht. Diese Bestimmung der Intensität des Stromes ist aber nicht geeignet, um darauf eine praktische Methode zur *Messung der Stromintensitäten* zu begründen; denn dazu wären zwei Messungen erforderlich, deren eine gar nicht, die andere nicht genau ausgeführt werden kann: eine bestimmte Elektricitätsmenge lässt sich nämlich unter den obwaltenden Verhältnissen nicht genau, und die Zeit, in welcher sie durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, gar nicht abmessen. Für die wirkliche Anwendung ist es daher nothwendig, eine andere Methode zur Messung der Stromintensitäten zu Hülfe zu nehmen. Eine solche dem Bedürfnisse ganz entsprechende Methode bietet sich in den *magnetischen Wirkungen* der Ströme dar und soll hier immer zum Grunde gelegt werden. Zwei Ströme, welche successive durch denselben Multiplicator geleitet auf den nämlichen unveränderlichen Magnet in gleicher Entfernung und Lage dieselbe Kraft ausüben, besitzen hiernach gleiche Intensität; üben sie verschiedene Kräfte aus, so verhalten sich ihre Intensitäten wie diese Kräfte, welche mit Hülfe der gewöhnlichen *Galvanometer* gemessen werden können.

Lässt man nun durch die nämliche Kette successive verschiedene Ströme gehen, deren Intensitäten dieser Messung gemäss sich verhalten wie 1 : 2 : 3 u. s. w., so sollen die elektrodynamischen Wechselwirkungen zweier Theile der Kette, durch welche diese verschiedenen Ströme gehen, sich der Reihe

nach wie die Quadrate jener Intensitäten, d. h. wie 1 : 4 : 9 u. s. w., verhalten. Die Richtigkeit dieses Satzes soll nun durch die folgenden elektrodynamischen Messungen bewiesen werden, die auch dann noch, wenn obiger Satz keines Beweises bedürfte, einiges Interessé insofern haben würden, als sie ein erstes Beispiel von der Schärfe gäben, welche man bei elektrodynamischen Messungen überhaupt zu erreichen vermag.

Das im vorigen Artikel beschriebene *Dynamometer* wurde auf einer steinernen Fensterbank, in deren nächster Umgebung kein Eisen und kein Magnet sich befand, so aufgestellt, dass die Ebene der festen Rolle oder des Multiplicators dem magnetischen Meridiane parallel, und die Ebene der Bifilarrolle ebenfalls vertical war, aber einen rechten Winkel mit der Ebene des Multiplicators bildete. Die Stellung des Multiplicators liess sich leicht berichtigen, indem man mit hinreichender Schärfe die verticale Stellung durch eine Dosenlibelle prüfen konnte, die auf den Deckel des Multiplicators gesetzt wurde, und darauf die Orientirung durch eine ebenfalls auf den Deckel des Multiplicators gestellte Boussole bewerkstelligte. Die Bifilarrolle stellte sich von selbst durch ihre Aufhängung vertical ein, dass aber die Ebene der Bifilarrolle einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian bildete, musste durch besondere Versuche geprüft werden.

Es ist nämlich ein Beweis von dem richtigen Stande der letzteren, wenn derselbe unverändert bleibt, auch wenn man einen beliebig starken positiven oder negativen Strom durch die Bifilarrolle allein gehen lässt, weil bei irgend einer merklichen Abweichung von jenem Stande der Erdmagnetismus diese Abweichung entweder vergrössern oder verkleinern müsste. Es lässt sich auf diesem Wege auch die Grösse der Abweichung bestimmen. Eine solche Prüfung ergab nun, dass der westliche Radius der Bifilarrolle um 14 Minuten nach Norden zu drehen gewesen wäre, um die Ebene der Bifilarrolle genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu stellen. Das Instrument bot keine geeigneten Mittel dar, diese kleine Correction mit Genauigkeit auszuführen, und abgesehen davon, dass eine so kleine Abweichung auf die Resultate nicht merklich einwirkt, würde die Beseitigung derselben von keinem bleibenden Nutzen gewesen sein, weil fortgesetzte Beobachtungen ergeben haben, dass die Aufhängung der Bifilarrolle am oberen Ende einer 1 Meter hohen frei stehenden Messingröhre keine Sicherheit gegen allmählig eintretende, auf einige Minuten steigende Drehungen der Bifilarrolle darbot. Nur die Aufhängung an einem isolirten festen steinernen Pfeiler würde vor solchen kleinen Abweichungen völlige Sicherheit gewähren können.

Der am westlichen Radius der Bifilarrolle befestigte Spiegel stand vertical und in der Verticalebene seiner horizontalen Normale war in ungefähr 6 Meter Entfernung ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr aufgestellt. Eine Skale, wie sie zu den Magnetometern gebraucht wird, war an dem festen Statife des Fernrohrs eben so, wie bei Magnetometern angebracht. Die Messung ergab den Horizontalabstand des Spiegels von der Skale:

$$= 6018{,}6 \text{ Skalentheile,}$$

woraus sich der Bogenwerth eines Skalentheils ergiebt:

$$= 17''136$$

Nach dieser Aufstellung des Dynamometers zur Messung der elektrodynamischen Wechselwirkung des Multiplicators und der Bifilarrolle, wenn durch dieselben ein galvanischer Strom geleitet wurde, bedurfte es nun noch zur vorliegenden Untersuchung einer *elektromagnetischen* Vorrichtung für die Intensitätsmessung des Stroms.

3.

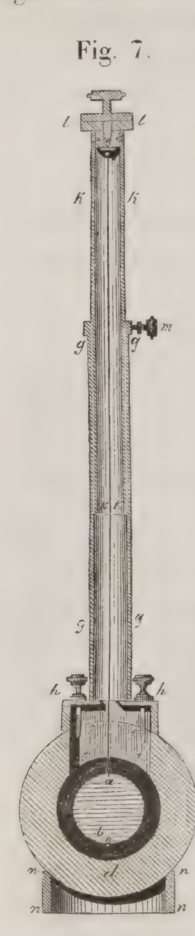
Beschreibung einer elektromagnetischen Vorrichtung zur Intensitätsmessung galvanischer Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet werden.

Die Intensitätsmessung der galvanischen Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet wurden, hätte leicht durch eine zu feinen Messungen eingerichtete sogenannte Sinus- oder Tangenten-Boussole bewerkstelligt werden können, wenn dieselbe in grösserer Entfernung von dem Dynamometer aufgestellt, und derselbe Strom, der durch letzteres ging, auch durch den Multiplicator jener Boussole geleitet worden wäre. Diese Ableitung des galvanischen Stroms kann entbehrt werden, wenn man ein kleines (transportables) Magnetometer im magnetischen Meridiane des Dynamometers in solcher Entfernung von dem letztern aufstellt, dass die feste Rolle des Dynamometers selbst eine noch auf feine Bruchtheile messbare Ablenkung des Magnetometers hervorbringt. Es wurde hierzu eine Entfernung von 583,5 Millimeter als angemessen ermittelt. Es leuchtet von selbst ein, dass bei einer so mässigen Entfernung die Anwendung eines grossen Magnetometers (mit 600 Millimeter langer Nadel) unangemessen gewesen wäre, da es im vorliegenden Falle von wesentlichem Nutzen war, die Vertheilung des Magnetismus im Magnetometer auf einen möglichst kleinen Raum zu beschränken. Dies findet bei dem kleinen oder transportabeln Magnetometer statt, welches ich in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838» beschrieben habe.

Ich habe jedoch dazu ein anderes Instrument eingerichtet, welches diesem Zwecke noch vollkommner entsprochen hat, und werde dasselbe hier beschreiben, weil es nicht allein oft mit Vortheil die Stelle des transportabeln Magnetometers ersetzen kann, sondern auch zu anderen Zwecken, insbesondere zu thermomagnetischen Messungen, ein oft genaueres Hülfsmittel, als die bisher angewendeten, darbietet. Es ist bekannt, welche Vortheile es gewährt, zu solchen Messungen statt der Boussole mit Zeiger und Gradbogen, eine mit Spiegel versehene Nadel mit Fernrohr und Skale zu gebrauchen. Nur findet die Anwendung des Spiegels bei kleinen Nadeln Bedenken, weil er eine träge Masse ist, welche von der Nadel mit fortgezogen werden muss, woraus folgt, dass, wenn eine kleine Nadel einen grössern Spiegel mit fortziehen muss, die beschleunigende Kraft sehr geschwächt wird, was der Schärfe der damit zu machenden Messungen eben so nachtheilig ist, wie wenn man eine schwach magnetisirte Nadel gebrauchte. Dieser Nachtheil lässt sich aber von Grund

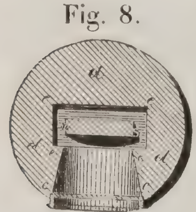
aus heben, wenn man einen *magnetischen Spiegel* anwendet, und diesen Spiegel selbst als Magnetnadel an einem Coconfaden aufhängt. Einen solchen Spiegel habe ich von Herrn Mechanikus Oertling in Berlin erhalten. Er besteht aus einer gehärteten runden Stahlplatte *ab* Fig. 7., 35 Millimeter im Durchmesser und 6 Millimeter dick. Diese Stahlplatte ist so vollkommen plan geschliffen, dass das Spiegelbild einer Skale durch ein Fernrohr von 10maliger Vergrösserung ganz hell und deutlich erscheint und nur wenig dem Bilde eines Glasspiegels nachgiebt. Am Rande dieser Kreisscheibe sind an zwei diametral gegenüber liegenden Punkten *a* und *b* kleine Schraubenmuttern eingeschnitten, in deren jede ein messingenes Häkchen eingeschraubt werden kann, an welchem der Spiegel mit einem Coconfaden aufgehangen wird. Nur eines von diesen Häkchen wird wirklich gebraucht, aber bald das eine, bald das andere, je nachdem die Stahlplatte die spiegelnde Oberfläche nach Osten oder Westen kehren soll Diese gehärtete Stahlplatte habe ich nun magnetisirt, indem ich zwei 25pfündige Magnetstäbe in gerader Linie hinter einander legte, aber so, dass zwischen den einander zugekehrten Süd- und Nordpolen der beiden Stäbe ein dem Durchmesser des Spiegels gleicher Zwischenraum blieb. In diesen Zwischenraum wurde der Spiegel gelegt, so, dass derjenige Durchmesser des Spiegels, welcher gegen die die beiden Häkchen *a*, *b* verbindende Linie senkrecht war, die beiden Magnete verband. Bei der Stärke der Magnete und der Kleinheit des Spiegels reichte dies hin, um dem Spiegel das Maximum von Magnetismus mitzutheilen, was er zu tragen vermochte.

Fig. 7.



Dieser magnetische Spiegel wurde an einem Coconfaden *ac* Fig. 7. aufgehangen und in Schwingung gesetzt. Der Schwingungsbogen nahm dabei nur sehr langsam ab, so, dass die Schwingungen noch nach $\frac{1}{4}$ Stunde beobachtet werden konnten, ohne dass er einen neuen Anstoss in der Zwischenzeit erhalten hätte. Seine Schwingungsdauer war aber zu klein, als dass man die Standbeobachtungen hierbei nach den für grössere Magnetometer gegebenen Regeln ausführen konnte, indem man Maximum und Minimum des Schwingungsbogens mehrmals hinter einander beobachtete. Zur genauen Beobachtung des mittleren Standes des Spiegels war es daher ein wesentliches Bedürfniss, die Schwingungen des Spiegels kräftig zu dämpfen und den Spiegel in möglichst kurzer Zeit in vollkommene Ruhe zu bringen, ohne dadurch auf den Stand selbst irgend einen Einfluss zu üben. Diesem wesentlichen Bedürfnisse beim Gebrauche eines solchen magnetischen Spiegels habe ich auf das vollkommenste dadurch Genüge geleistet, dass ich eine solide Kupferkugel *ddd* Fig. 8. von 90 Millimeter Durchmesser anfertigen liess. Von der einen Seite wurde in diese Kugel ein Loch *eeee* von 40 Millimeter Durchmesser, 70 Millimeter tief eingedreht, und die-

Fig. 8.



ses Loch konnte mit einem Planglase verschlossen werden. Dieses Loch war an seinem hinteren Ende für den magnetischen Spiegel etwas erweitert, und erweiterte sich auch nach aussen trichterförmig um dem Lichte zum Spiegel mehr Zugang zu geben. In dem hinteren erweiterten Raume *eeee* schwebt der magnetische Spiegel, den man Fig. 8. *ns* im horizontalen rectangulären Durchschnitte sieht. Zu diesem erweiterten Raume führte von oben herab eine 8 Millimeter breite, 40 Millimeter lange Spalte *ffff* Fig. 7., durch welche der an einem Coconfaden aufgehangene Spiegel zur Mitte der Kugel herunter gelassen werden konnte. Der Coconfaden war durch eine Messingröhre *gggg* geführt, deren unteres Ende mit Hülfe einer Messingplatte *hh*, welche die Mündung der Spalte *ff* an der Kugel bedeckte, auf der Kugel aufgeschraubt wurde. In dieser Messingröhre befand sich noch eine zweite Auszugsröhre *kkkk*, und letztere trug am oberen Ende einen drehbaren Torsionskreis *ll* mit einem Häkchen bei *c*, an welchem der Coconfaden angeknüpft wurde. Durch die Auszugsröhre konnte der Faden gehoben werden, bis der Spiegel im Centro der Kupferkugel frei schwebte. Alsdann wurde die Auszugsröhre durch eine Druckschraube *m* festgestellt Zur Aufstellung dieser Kupferkugel diente ein einfacher Messingring *nnnn* von 20 Millimeter Höhe, 70 Millimeter Durchmesser und 2 Millimeter Dicke, welcher auf das Postament gesetzt und in welchen die Kupferkugel hineingestellt wurde. Zur Nivellirung des Instrumentes wurde eine kleine Dosenlibelle auf den Torsionskreis gesetzt und darauf die Kupferkugel im Ringe so lange gedreht, bis die Libelle richtig einstand, was mit grosser Leichtigkeit und Genauigkeit sich ausführen liess. Durch ihr grosses Gewicht lag die Kupferkugel in dem Ringe so fest, dass nie eine Verrückung bemerkt worden ist.

Die Wirkung dieser starken Kupferkugel auf den schwingenden Spiegel besteht nun in einer *magnetoelektrischen* Dämpfung, vermöge welcher der vorhergehende Schwingungsbogen zum nachfolgenden wie 11 : 7 sich verhält (das *decrementum logarithmicum* war = 0,19697), so, dass nach 16 Schwingungen oder etwa 1 Minute (die Schwingungsdauer betrug nämlich bei dieser Dämpfung 3,78 Secunden), der Schwingungsbogen etwa nur $\frac{1}{1400}$ seiner ursprünglichen Grösse beträgt, also unmerklich geworden ist. Bei constanten Strömen reicht es daher in der Regel hin, 1 Minute nach Eintritt des Stromes verlaufen zu lassen, ehe man den abgelenkten Stand des Spiegels beobachtet.

Sollen solche Ablenkungsversuche nicht blos einen relativen, sondern absoluten Werth erhalten, so darf nach der von Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* gegebenen Vorschrift der ablenkende Magnet oder Strom höchstens auf einen Abstand genähert werden, welcher das 3- oder 4fache der Nadellänge beträgt, wofür in unserm Falle das 3- oder 4fache des Spiegeldurchmessers zu setzen ist, d. i. 105 bis 140 Millimeter, in welcher geringen Entfernung selbst sehr schwache Ströme eines Multiplicators hinreichen, um scharf messbare Ablenkungen des Spiegels hervorzubringen. Wenn nun schon 105 oder 140 Millimeter eine genügende Entfernung des Multiplicators sein würde, um den Messungen der Ablenkung einen absoluten Werth zu geben, so findet dies noch weit mehr bei einer Entfernung von 583,5 Millimeter statt, in welcher der Multiplicator vom Spiegel

bei unsern Versuchen sich befand. Die gegenseitige Stellung der beiden Instrumente, des Dynamometers und des Spiegelmagnetometers, ist Fig. 9. dargestellt, wo die punktirte Linie *NS* der magnetische Meridian ist, welcher durch beide Instrumente geht; *A* ist der horizontale Durchschnitt des Dynamometers, gleichwie Fig. 4.; *B* ist der horizontale Durchschnitt des Spiegelmagnetome-

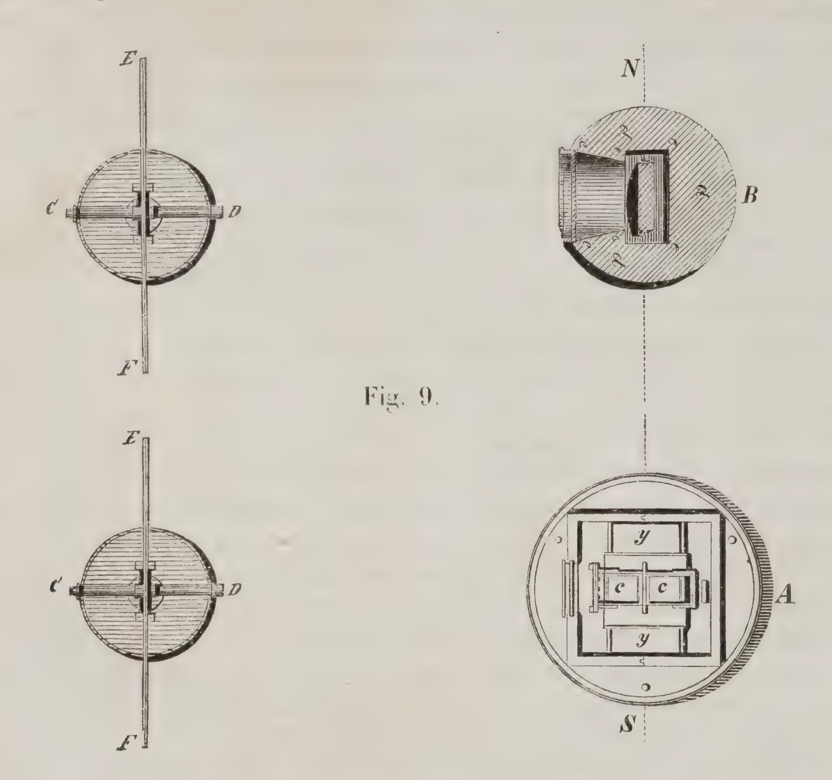


Fig. 9.

ters, ebenso wie Fig. 8., *CD* sind die auf die Spiegel beider Instrumente gerichteten Ablesungsfernröhre; *EF* sind die zugehörigen Skalen, deren Spiegelbild beobachtet wird. Ueber die Anwendung des Spiegelmagnetometers zu thermomagnetischen Beobachtungen, wozu noch einige besondere Vorrichtungen zu treffen sind, soll bei einer andern Gelegenheit gehandelt werden.

4.

Nach dieser Beschreibung der wesentlichen Einrichtungen, welche zur *elektromagnetischen* Messung der Intensität der Ströme und zur *elektrodynamischen* Messung der Wechselwirkung zweier Theile der Kette getroffen waren, wollen wir, ehe wir zur Beschreibung der Versuche selbst übergehen, noch eine Bemerkung über die Hervorbringung und Regulirung der Ströme vorausschicken, welche dabei benutzt wurden.

Es wurden dazu benutzt drei kleine Grove'sche Becher von Hrn. Mechanikus Kleinert in Berlin, die entweder alle 3, oder nur 2 säulenartig ver-

bunden, oder endlich einzeln in die Kette gebracht wurden. Trotz dem, dass diese Ströme durch eine sehr lange und dünne Drathkette geleitet wurden, welche die Bifilarrolle und den Multiplicator des Dynamometers bildeten, die sogar noch durch einen langen Hülfsdraht vergrössert wurde, so blieben doch diese Ströme selbst bei der grossen Schwächung, welche sie durch den grossen Widerstand einer solchen Kette erlitten, viel zu stark und lenkten das Dynamometer von seiner Gleichgewichtslage viel zu weit ab, als dass diese Ablenkung mit der 1 Meter langen Skale hätte gemessen werden können. Dagegen war die Intensität dieser Ströme im Multiplicator ganz geeignet, um eine scharf messbare Ablenkung des Spiegelmagnetometers hervorzubringen Es musste daher die Ablenkung der Bifilarrolle in einem constanten Verhältnisse verkleinert werden, ohne die Intensität des Stromes im Multiplicator des Dynamometers zu vermindern. Es konnte dies auf doppelte Weise geschehen, entweder dadurch, dass die Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle von einander mehr entfernt wurden, wodurch die Empfindlichkeit des Dynamometers in einem constanten Verhältnisse vermindert worden wäre, oder es konnte durch eine Theilung des Stromes bewirkt werden, dass von dem ganzen Strome, welcher durch den Multiplicator des Dynamometers ging, nur ein kleiner Bruchtheil durch die Bifilarrolle geführt wurde. Ich habe der letzteren Methode den Vorzug gegeben, um dem Dynamometer seine Empfindlichkeit zu erhalten, welche für andere Versuche nothwendig war. Durch einen kurzen und dicken Kupferdraht, welcher vv' Fig. 2. punktirt angedeutet ist, wurde dem Strome, ehe er in die Bifilarrolle eintrat, ein Steg oder eine Brücke gebauet, auf welcher er ausserhalb der Bifilarrolle direct zu dem aus der Bifilarrolle wieder zurück kehrenden Drahte geführt wurde. Eine genaue Vergleichung des Widerstandes dieses Verbindungsdrahtes mit dem der Bifilarrolle, hatte das Verhältniss

$$1 : 245,26$$

ergeben, woraus nach den Ohmschen Gesetzen folgt, dass die Stromintensität in der Bifilarrolle nach dieser Theilung zu der Stromintensität im Multiplicator des Dynamometers in dem constanten Verhältnisse von

$$1 : 246,26$$ *)

stand, wodurch also, ohne die Ablenkung des Spiegelmagnetometers durch den Multiplicator des Dynamometers zu vermindern, die Ablenkung des Dynamometers selbst 246,26 Mal verkleinert wurde. Diese 246,26 Mal verkleinerte Ablenkung des Dynamometers konnte dann an der Skale scharf gemessen werden, der Strom mochte von 3, 2 oder nur von 1 Grove'schen Becher ausgehen.

---

*) Denn bezeichet a die Intensität des ganzen ungetheilten Stroms, wie er durch den Multiplicator geht, b und c die Intensität der beiden Ströme, in welche jener sich theilt, von denen b durch die Bifilarrolle, c durch den Hülfsdrath vv' Fig. 2. geht, welcher Anfang und Ende der Bifilarrolle verknüpft; so ist $a = b + c$, und dem Ohmschen Gesetze gemäss verhalten sich die Intensitäten $b : c$ umgekehrt wie die gemessenen Widerstände, d. i.

$$b : c = 1 : 245,26;$$

folglich

$$b : a = b : b + c = 1 : 246,26.$$

Es sind auf solche Weise nun die in folgender Tafel enthaltenen Messungen gemacht worden.

Tafel correspondirender Stände des Spiegelmagnetometers und Dynamometers unter Einwirkung von Strömen von verschiedener Intensität.

Nr.	Zahl der Grove-schen Becher.	Beobachteter Stand des Magnetometers.	Beobachteter Stand des Dynamometers.
1.	3	388,17	650,88
2.	0	279,74	209,79
3.	3	388,30	650,66
4.	0	279,68	209,47
5.	3	388,37	650,07
6.	0	280,05	209,70
7.	3	388,73	649,84
8.	0	279,95	209,55
9.	3	388,35	649,78
10.	0	279,78	209,53
11.	3	388,30	649,71
Mittlere Ablenkung.	3 — 0	108,566	440,508
12.	0	279,54	209,25
13.	2	352,15	407,52
14.	0	280,00	208,99
15.	2	352,35	407,35
16.	0	280,00	208,82
17.	2	352,50	407,18
18.	0	280,15	208,87
19.	2	352,60	407,15
20.	0	280,17	208,92
21.	2	352,95	406,89
22.	0	280,40	208,80
Mittlere Ablenkung.	2 — 0	72,438	198,305
23	0	280,40	208,80
24.	1	316,77	259,68
25.	0	280,50	208,72
26.	1	216,93	259,53
27.	0	280,60	208,68
28.	1	316,90	259,50
29.	0	280,50	208,45
30.	1	316,85	259,38
31.	0	280,60	208,43
32.	1	316,90	259,35
33.	0	280,55	208,33
Mittlere Ablenkung.	1 — 0	36,332	50,915

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen: 1) Während aller dieser Versuche sind die Leitungsverhältnisse immer die nämlichen geblieben, so dass die Verhältnisse der Stromintensitäten in allen Theilen der Kette immer die nämlichen waren. 2) Die correspondirenden Beobachtungen am Magnetometer und Dynamometer sind immer von zwei verschiedenen Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig angestellt worden. Die Beobachter waren ausser mir Hr. Dr. Stähelin aus Basel, und mein Assistent Hr. Dietzel. 3) Jede einzelne in der Tafel verzeichnete Beobachtung des Dynamometers ist nicht eine einfache Ablesung, sondern es liegen jeder solchen Beobachtung 7 Ablesungen zum Grunde: es wurde nämlich bei der stattfindenden Schwingung abwechselnd der höchste und niedrigste Stand abgelesen und die 6 Mittel aus je zwei zunächst auf einander folgenden Ablesungen genommen; die aus zwei solchen zunächst auf einander folgenden Mitteln wiederum gezogenen 5 zweiten Mittel wurden als partielle Resultate betrachtet und der Mittelwerth von diesen 5 partiellen Resultaten in die Tafel eingetragen. 4) Zwischen je zwei Beobachtungen des abgelenkten Standes wurde die Kette gelöst, um den natürlichen Stand zu beobachten, wie derselbe ohne galvanische Einwirkung war, weil dieser Stand, wenn auch sehr langsam, sich doch merklich mit der Zeit änderte. Diese Lösung der Kette ist in der Columne, welche die Becherzahl angiebt, durch 0 angedeutet. 5) Die von 11 zu 11 Beobachtungen in der Tafel angegebenen Mittelwerthe der Ablenkung sind aus den 11 vorausgehenden Beobachtungen abgeleitet worden, indem die 10 Unterschiede aus je zwei auf einander folgenden Beobachtungen bei geschlossener und gelöster Kette, und aus je zwei solchen zunächst auf einander folgenden Unterschieden die 9 Mittel genommen wurden, von welchen, als partiellen Resultaten, das Generalmittel in der Tafel angegeben ist. 6) Was endlich das Magnetometer betrifft, so ist der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale während der in dieser Tafel enthaltenen Versuche zu bemerken, weil er später häufig geändert werden musste: er betrug 1251 Skalentheile. 7) Die 11 Beobachtungen, aus denen die mittleren Ablenkungen des Magnetometers und Dynamometers berechnet worden sind, geben einen Beweis von der Genauigkeit der Messung; denn man sieht, dass die 5 oder 6 Wiederholungen der bei geschlossener und bei gelöster Kette gemachten Versuche, welche sie enthalten, immer bis auf einen Bruch eines Skalentheiles übereinstimmen, wobei zu bemerken ist, dass auch diese kleinen Differenzen ihrem Hauptheile nach in wirklichen Veränderungen der Stromintensität, ferner beim Magnetometer in den während der Versuche eingetretenen Declinationsvariationen, und in einer beim Dynamometer merklichen, nicht vollkommen festen und unveränderlichen Aufstellung ihren Grund hatten.

Die Resultate aller dieser Versuche lassen sich kurz in den zusammengehörigen Mittelwerthen der Ablenkung des Magnetometers und Dynamometers durch den Strom von 3, 2 und 1 Grove'schen Becher übersehen, nämlich:

	Mittlere Ablenkung des Magnetometers	Mittlere Ablenkung des Dynamometers
für 3 Becher	108,566	440,508
- 2 -	72,438	198,305
- 1 -	36,332	50,915

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, welche das Maass der ablenkenden Kräfte geben, wobei noch ein kleiner Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen ist. Die hieraus hervorgehenden Correctionen sind:

0,14	0,47
0,04	0,05
0,00	0,00

woraus, wenn man diese Correctionen in Abrechnung bringt, nun folgende corrigirte Werthe sich ergeben, nämlich für die ablenkende Kraft

des Magnetometers	des Dynamometers
108,426	440,038
72,398	198,255
36,332	50,915

Nach dem oben zum Grunde gelegten *elektromagnetischen* Intensitätsmaasse der Ströme sind nun die Zahlen der *ersten* Columne den *Stromintensitäten* proportional, während die Zahlen der *zweiten* Columne die correspondirenden *elektrodynamischen Kräfte* geben, wonach also die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kräfte von den Stromintensitäten sich bestimmen lässt, was der Hauptzweck dieser Versuche war. Ehe dieses geschieht, möge aber noch bemerkt werden, dass es scheinen könne, als müsse aus den Zahlen der ersten Columne noch ein geringer fremdartiger Einfluss entfernt werden, welcher nämlich von der Einwirkung der *Bifilarrolle* auf das Magnetometer herrühre. Jene Zahlen konnten nämlich nur dann als ein Maass der Stromintensität gelten, wenn das Magnetometer immer von dem nämlichen, unverrückt gebliebenen Theile der Kette abgelenkt wurde. Dieser Theil der Kette war der unverrückt stehen bleibende Multiplicator des Dynamometers. In der That befand sich dieser Multiplicator in einer solchen Lage gegen das Magnetometer, in welcher er die grösste ablenkende Kraft ausübte, während die im Multiplicator schwebende Bifilarrolle ursprünglich in eine solche Lage gebracht war, wo sie, auch wenn ein starker Strom durch sie geleitet wurde, gar keine ablenkende Kraft ausüben konnte. Nun wurde aber bei obigen Versuchen die Bifilarrolle merklich abgelenkt oder gedreht und nach dieser Drehung musste sie eine ablenkende Kraft auf das Magnetometer ausüben, weshalb obige Zahlenwerthe einer Correction bedürften, um sie der alleinigen Einwirkung des Multiplicators entsprechend zu machen. Diese Correction ist aber nur sehr gering, weil die Intensität des durch die Bifilarrolle gehenden Stroms in Folge der oben erwähnten Theilung nur den 246,26sten Theil von der Stromintensität im Multiplicator betrug. Ich habe mich versichert, dass diese Correction auch in dem Falle, wo sie am grössten war, noch unter $\frac{1}{500}$ Skalentheil blieb und daher vernachlässigt werden durfte.

Multiplicirt man nun die Quadratwurzeln aus den für die elektrodynamische Wechselwirkung beobachteten Werthen, nämlich: $\sqrt{440,038}$, $\sqrt{198,255}$, $\sqrt{50,915}$, mit dem constanten Factor

5,15534,

so erhält man nahe die für die elektromagnetische Wirkung beobachteten Werthe, man erhält nämlich der Reihe nach:

108,144
72,589
36,786,

deren Vergleichung mit den beobachteten Werthen folgende Unterschiede giebt:

— 0,282
+ 0,191
+ 0,454.

Der grösste Unterschied, welcher zwischen diesen berechneten und den direct beobachteten Werthen der elektromagnetischen Kraft vorkommt, beträgt also noch keinen halben Skalentheil, wodurch der der Rechnung zum Grunde gelegte Satz als bewiesen betrachtet werden darf, *dass die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette dem Quadrate der elektromagnetischen Kraft, mithin dem Quadrate der Stromintensität proportional sei.*

Zugleich leuchtet auch aus diesen Versuchen ein, dass die angewandte Methode elektrodynamischer Messung eine fast gleiche Schärfe und Genauigkeit gestattet, wie die Methode magnetischer Messungen mit dem Magnetometer.

Beweis des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes aus Messungen.

5.

Nach diesen ersten Proben der mit dem beschriebenen elektrodynamischen Messinstrumente zu erreichenden Genauigkeit gehe ich sogleich zu einem System damit ausgeführter Messungen über, welches zu einer vollständigen Prüfung des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes geeignet ist.

Ampère giebt in seiner früher genannten Abhandlung S. 181 f. zwei Methoden an, wie die Gesetze der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Erfahrung abgeleitet werden könnten. «Die eine Weise,» sagt er, «besteht darin, zunächst mit der grössten Genauigkeit die Werthe der Wechselwirkung zweier Stücken von endlicher Grösse zu messen, indem man sie successive gegen einander in verschiedene Entfernungen und in verschiedene Lagen bringt; alsdann muss man eine Hypothese über den Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile machen, daraus den Werth der Wirkung schliessen, der für die Conductoren von endlicher Grösse, mit welchen man operirt hat, daraus hervorgehe, und die Hypothese so lange modificiren, bis die Resultate der Rechnung mit denen der Beobachtung übereinstimmen.».... «Die andere besteht darin, erfahrungsmässig festzustellen, dass ein beweglicher Leiter vollkommen im Gleichgewichte bleibe zwischen gleichen Kräften oder gleichen Drehungsmomenten, wenn diese Kräfte oder diese Momente von Theilen fester Leiter herrühren, deren Gestalt und Grösse auf irgend eine Weise verändert werden können, unter Bedingungen, welche die Erfahrung bestimmt, ohne dass das Gleichgewicht gestört werde, und daraus direct durch Rechnung zu

schliessen, welches der Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile sein müsse, damit das Gleichgewicht wirklich unabhängig von allen Aenderungen der Form oder der Grösse sei, welche mit jenen Bedingungen verträglich sind.»

Ampère hat der letzteren Methode den Vorzug gegeben aus Gründen, unter denen der einzige schon genügt, dass er nämlich die nach der ersteren Methode unentbehrlichen Messinstrumente nicht besass. Allerdings musste unter solchen Verhältnissen die zweite Methode vorgezogen werden, welche die Ausführung wirklicher Messungen nicht nothwendig erforderte. Doch scheint die letztere Methode von Ampère überschätzt zu werden, indem er meint, dass ihr ein absoluter Vorzug vor der ersteren zukomme. Ein Instrument zu genauen Messungen setzt zweierlei voraus: 1) eine grosse Feinheit und Empfindlichkeit, welche die zu messenden Wirkungen deutlich und unabhängig von fremden, nicht zu controlirenden Einflüssen erkennen lässt; 2) eine für diese Wirkungen geeignete Messungsvorrichtung. Es leuchtet aber ein, dass die letzte Forderung sich stets leicht erfüllen lässt, wenn nur der ersteren Genüge geschehen ist, wonach also die erstere als die Hauptforderung betrachtet werden muss. Die Erfüllung dieser Hauptforderung ist aber für die zweite Methode eben so wesentlich wie für die erste, weil sie ohnedem ganz illusorisch sein würde. Der wesentliche Unterschied dieser Methoden in experimenteller Beziehung besteht also blos darin, dass man nach jener Methode den elektrodynamischen Kräften durch andere bekannte und messbare Naturkräfte das Gleichgewicht hält, während man nach der zweiten Methode solche Verhältnisse sucht, wo die elektrodynamischen Kräfte sich wechselseitig unter einander das Gleichgewicht halten. Es kann kein Zweifel sein, dass die letztere Methode, wenn sie zu sicheren und genauen Resultaten führen soll, in *experimenteller* Beziehung weniger direct und weniger einfach ist, als die erstere. Es kann daher zum Vortheil der zweiten Methode höchstens der Umstand geltend gemacht werden, dass in *theoretischer* Beziehung aus den nach dieser Methode gewonnenen Resultaten die Fundamentalgesetze leichter und directer abgeleitet werden können, was aber nicht mehr in Betracht kommt, wenn die zu prüfenden Fundamentalgesetze schon vollständig vorliegen, wie dies durch Ampère's Verdienst im vorliegenden Falle statt findet. Wir werden hierdurch in den Stand gesetzt, ein sehr einfaches System von Messungen auszuführen, welches den Forderungen Genüge leistet.

Die beiden Leitungsdrähte, welche wechselseitig auf einander wirken, sollen Kreise bilden oder Systeme paralleler Kreise, welche eine gemeinschaftliche Axe haben und *Leitungsrollen* heissen. Diese beiden Axen sollen eine horizontale und gegen einander rechtwinkelige Lage haben, und zwar so, dass die Verlängerung der einen Axe durch den Mittelpunkt der andern Rolle geht. Die eine dieser Rollen wird fixirt, die andere ist um ihren verticalen Durchmesser drehbar. Nun kann entweder die Axe der fixirten Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der beweglichen Rolle gehen, oder umgekehrt kann die Axe der beweglichen Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der festen Rolle gehen. In beiden Fällen kann man Messungen bei verschiedenen Entfernungen der Mittelpunkte von einander machen. Man ersieht leicht, dass diese beiden

Arten der Anordnung der elektrodynamischen Messungen ganz denen der magnetischen Messungen entsprechen, welche Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Commentationes Soc. regiae Scient. Gottingensis recentiores. Vol. VIII. pag. 33) gegeben hat. Wir können für die elektrodynamischen Wechselwirkungen noch eine dritte Anordnung der Messungen hinzufügen, wo die Mittelpunkte der beiden Rollen zusammenfallen, wie dies bei dem oben beschriebenen Dynamometer statt findet. Auf alle diese Fälle lässt sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz anwenden und die Resultate daraus berechnen, um die Resultate der Beobachtung damit zu vergleichen.

Wenn die feste Rolle auf die bewegliche aus der Entfernung wirkt, so können die beiden Rollen nach Belieben gleiche oder ungleiche Durchmesser haben; wenn aber die Mittelpunkte beider Rollen zusammenfallen sollen, wie es bei dem oben beschriebenen Messinstrumente der Fall war, so muss der innere Durchmesser der einen, ringförmigen, Rolle grösser sein, als der äussere der andern, damit die erstere die letztere umschliessen kann. Bei dem oben beschriebenen Dynamometer war die bewegliche Rolle die kleinere und wurde von der festen umschlossen. Sollen endlich die drei eben angedeuteten Versuchsreihen ausgeführt werden, indem man blos die feste Rolle successive an verschiedene Stellen versetzt, ohne dass die Aufhängung der beweglichen Rolle geändert werde, was zum Zweck der genaueren Vergleichung aller Messungsresultate unter einander vortheilhaft ist, so muss die bewegliche Rolle grösser sein, damit sie die feste Rolle umschliessen könne, weil nur dann die letztere, der Aufhängungsdrähte unbeschadet, durch die bewegliche Rolle hindurch geführt werden kann. Dies ist der Grund, warum für dieses System von Messungen ein besonderer Messapparat von Herrn Mechanikus Leyser in Leipzig vorgerichtet wurde, welcher hier beschrieben werden soll.

Die *Bifilarrolle aaa* Fig 10. besteht aus einem dünnen Messingringe von $100\frac{1}{2}$ Millimeter Durchmesser und 30 Millimeter Höhe, welcher zwei parallele Messingscheiben von $122\frac{7}{10}$ Millimeter äusserem und $100\frac{1}{2}$ Millimeter innerem Durchmesser verbindet und in 30 Millimeter Abstand von einander hält. Auf jenen Messingring zwischen diesen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 3000 Mal herumgewunden, so dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Nach Aufwindung des Drahtes wurden die beiden Messingscheiben durch eine feste messingene Klammer *bb* verbunden, welche die aufgewundenen Drähte umschliesst und in ihrer Mitte den Tonsionskreis *cc* trägt. Der Torsionskreis besteht aus zwei (bei verticaler Stellung der Bifilarrolle) horizontalen Scheiben, von denen die untere durch die messingene Klammer mit der Bifilarrolle fest verbunden ist, die obere sich auf der untern um eine verticale Axe drehen lässt. Erstere ist mit einer Kreistheilung, letztere mit einem Index versehen. Die letztere trägt einen hölzernen Zapfen *d*, welcher am oberen Ende die Gabel *ee* einer sehr beweglichen Rolle von 20 Millimeter Durchmesser hält. Unter dieser Rolle ist ein seidener Faden *ff* weggeführt, welcher zu beiden Seiten der Rolle senkrecht nach oben geht, und auf beiden Seiten, einige Millimeter über der Rolle, an den beiden Suspensionsdrähten *fg*,

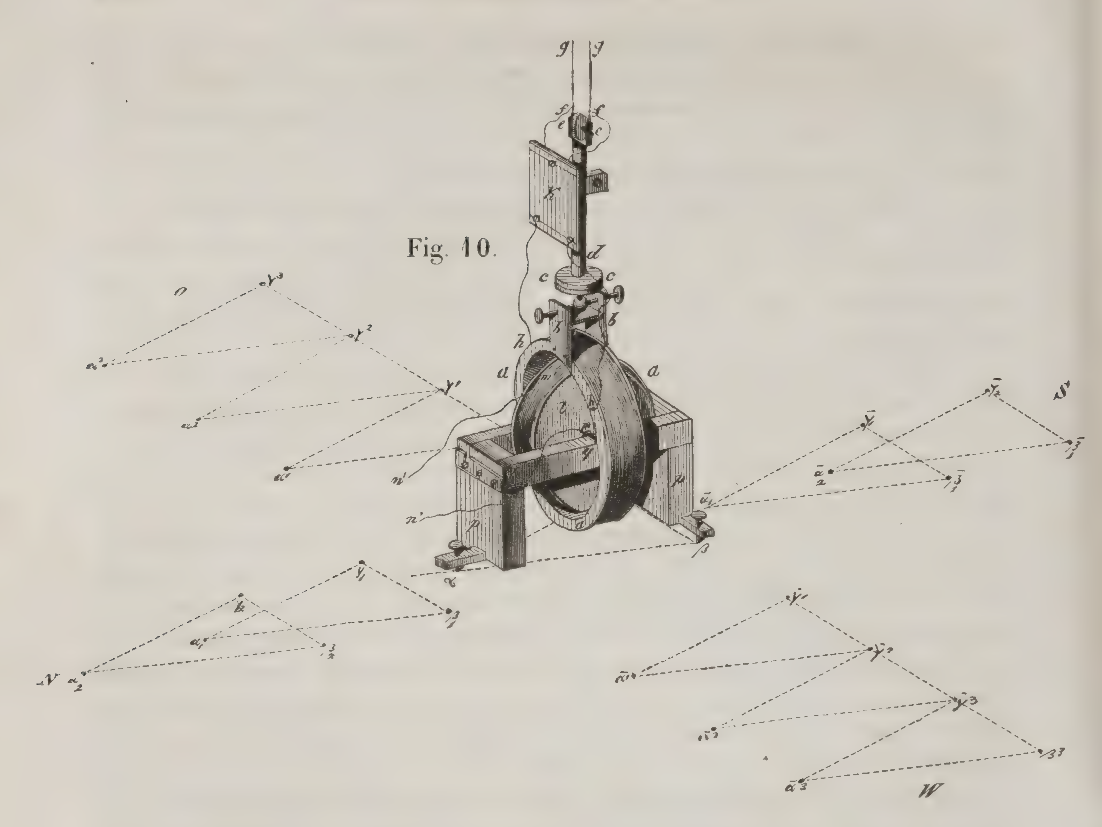


Fig. 10.

fg angeknüpft ist. Zu diesen Anknüpfungspunkten f, f sind auch die beiden Enden des um die Bifilarrolle gewundenen Drahtes hf, hf geleitet, so, dass der galvanische Strom durch den einen Suspensionsdraht zum einen Ende der Bifilarrolle, und durch das andere Ende aus der Bifilarrolle in den zweiten Suspensionsdraht geleitet werden kann. Die beiden Suspensionsdrähte gehen von diesen Anknüpfungspunkten senkrecht aufwärts zur Decke, wo sie an zwei von einander isolirten messingenen Haken befestigt sind. Von diesen beiden Haken sind zwei andere Drähte wieder herabgeführt, der eine zu einem Commutator, der andere zur galvanischen Säule.

Mit Hülfe des Torsionskreises kann man der horizontalen Axe der Bifilarrolle jede beliebige Lage geben, während die Suspensionsdrähte ihre natürliche parallele Lage beibehalten. Der Torsionskreis wurde so eingestellt, dass die Axe der Bifilarrolle mit dem magnetischen Meridiane NS zusammenfiel, so dass der Erdmagnetismus den Stand der Bifilarrolle nicht änderte, wenn ein galvanischer Strom durch letztere hindurchging.

An dem hölzernen Zapfen am Torsionskreise wurde ein verticaler Planspiegel k befestigt, auf welchen aus etwa $3\frac{3}{10}$ Meter Entfernung ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet wurde, um damit das Bild einer nahe beim Fernrohr aufgestellten horizontalen Skale zu beobachten.

Die *feste Rolle lll* Fig. 10. besteht aus zwei dünnen parallelen Messingplatten von $88\frac{8}{10}$ Millimeter Durchmesser, welche von einer $5\frac{1}{2}$ Millimeter

dicken messingenen Axe m in 30 Millimeter Abstand von einander festgehalten werden. Diese messingene Axe geht durch die beiden Platten hindurch und ragt auf beiden Seiten 10 Millimeter hervor. Auf dieselbe Axe zwischen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seite übersponnen ist, ungefähr 10000 Mal herumgewunden, so, dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Das eine Ende dieses Drahtes ist dicht an der Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung bei m in der einen Scheibe, von m nach n, nach aussen geführt, das andere Ende ist an der Peripherie der Rolle bei m' mit seidenen Fäden festgebunden und geht von m' nach n' nach aussen. Das eine Drahtende $n'n'$ wurde zum Commutator A Fig. 11. geleitet, das andere nn zum Multiplicator B Fig. 11. eines Galvanometers.

Zur festen Aufstellung dieser Rolle dient ein kleines hölzernes Gestell pp Fig. 10. welches zwei Pfannen q darbietet, auf welche die vorragenden Theile der Axe aufgelegt werden. Dieses Gestell steht auf drei Füssen, welche mit Schraubenspitzen α, β, γ zum Nivelliren versehen sind. Der eine dieser Füsse ist mit einem Charnier r versehen und kann so zurückgeschlagen werden, dass man ihn sammt einem Theile des Gestelles und der festen Rolle durch die Bifilarrolle frei hindurchführen und dann wieder niederschlagen kann. Die feste Rolle kommt dann in dem Mittelpunkte der Bifilarrolle zu stehen, und das Gestell ruhet alsdann, mit zwei Füssen diesseits, mit dem dritten Fusse jenseits der Bifilarrolle, auf dem festen Tische, welcher dicht unter der Bifilarrolle sich befindet.

Auf der ebenen horizontalen Tischplatte sind die Stellen genau im voraus bezeichnet, wo die feste Rolle successive aufgestellt werden soll. Es werden nämlich die drei Schraubenspitzen, welche bei concentrischer Aufstellung der beiden Rollen auf den Punkten α, β, γ der Tischplatte stehen, so versetzt, dass sie entweder im *Norden* in den Punkten $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ oder $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ u. s. w., oder im *Süden* in den Punkten $\bar{\alpha}_1\ \bar{\beta}_1\ \bar{\gamma}_1$ oder $\bar{\alpha}_2\ \bar{\beta}_2\ \bar{\gamma}_2$ u. s. w., oder im *Osten* in den Punkten $\alpha^1 \beta^1 \gamma^1$ oder $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2$ oder $\alpha^3 \beta^3 \gamma^3$ u. s. w., oder im *Westen* in den Punkten $\bar{\alpha}^1\ \bar{\beta}^1\ \bar{\gamma}^1$ oder $\bar{\alpha}^2\ \bar{\beta}^2\ \bar{\gamma}^2$ oder $\bar{\alpha}^3\ \bar{\beta}^3\ \bar{\gamma}^3$ u. s. w. zu stehen kommen. Die Bifilarrolle ist zum Schutz gegen den Einfluss der Luft mit einem hölzernen Gehäuse umgeben, in welchem ein Planglas eingesetzt ist, durch welches das Licht von der Skale auf den Spiegel und von da zurück ins Fernrohr fallen kann. Das Gehäuse besteht aus zwei Theilen, die einzeln entfernt werden können, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der beweglichen aufgestellt werden soll.

Um nun ein mit diesem Instrumente ausgeführtes System elektrodynamischer Messungen unter einander vergleichbar zu machen, war es nothwendig, unabhängig hiervon die Intensität des Stromes zu messen, welcher bei jeder Messung durch die beiden Rollen geführt wurde. Hierzu liess sich aber nicht die oben Art. 3. beschriebene Einrichtung anwenden, wegen der von einer Messung zur andern vorzunehmenden Verstellung der festen Rolle. Es wurde daher das eine Ende nn des um die feste Rolle gewundenen Drahtes mit einer dritten Drahtrolle B Fig. 11. verbunden, welche aus 618 parallelen Umwindungen, welche zusammen eine Fläche von 8313440 Quadratmillimetern um-

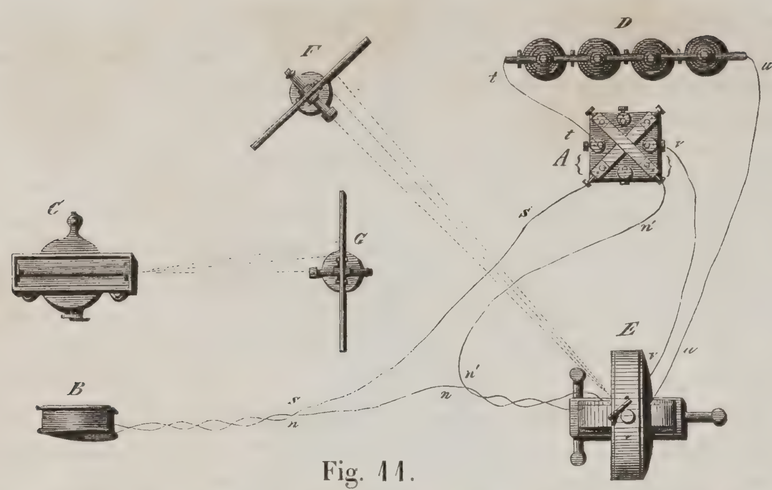


Fig. 11.

schlossen, bestand, und 217 Millimeter westlich von einem transportabelen, von dem Dynamometer 8 Meter weit entfernten Magnetometer C Fig. 11. aufgestellt war und mit demselben zusammen ein *Galvanometer* bildete. Diese dritte Drahtrolle wurde endlich mit ihrem anderen Ende ss mit dem Commutator A Fig. 11. in Verbindung gebracht, zu welchem auch der eine Leitungsdraht tt der galvanischen Säule D führte.

Fig. 11. giebt eine deutliche Darstellung von der Anordnung und Verbindung der verschiedenen Theile des Apparates unter einander. Es möge dabei bemerkt werden, dass die beiden Drahtenden der festen Rolle, so weit sie in der Nähe der Bifilarrolle sich befanden, um einander gewunden waren, so, dass die entgegengesetzten Ströme, von denen sie durchlaufen wurden, keinen Einfluss auf die Bifilarrolle hatten. E stellt hier das Dynamometer im Grundrisse dar, F das zugehörige Ablesungsfernrohr nebst Skale; C stellt das Magnetometer im Grundrisse dar und G das zugehörige Ablesungsfernrohr nebst Skale; B ist die Multiplicatorrolle, durch welche derselbe galvanische Strom wie durch das Dynamometer geleitet wird, und die aus der Ferne auf die Nadel des Magnetometers C wirkt, deren Ablenkung vom magnetischen Meridian gemessen wird, um dadurch die Intensität des angewendeten Stroms und deren Variationen während der Versuche zu bestimmen.

Die galvanische Säule, welche zu diesen Versuchen gebraucht wurde, bestand aus 8 Bunsenschen Kohlenbechern. Die Richtung dieses Stromes blieb im Drahte der Bifilarrolle des Dynamometers E immer die nämliche, und wurde, wie aus der Stellung des Commutators A einleuchtet, durch den Wechsel des Commutators blos in der festen Rolle des Dynamometers E und in der dritten Rolle B, welche die Stelle des Multiplicators beim *Galvanometer* vertrat, umgekehrt. Dass der Strom in der Bifilarrolle seine Richtung immer beibehielt, war nöthig, um den Einfluss des Erdmagnetismus zu eliminiren. Die Umkehrung des Stromes in der festen Rolle war dazu nöthig, um durch die Wirkung dieser festen Rolle auf die Bifilarrolle das nördliche Ende der Axe dieser Rolle abwechselnd östlich und westlich abzulenken und durch wiederholte Messung dieser positiven und negativen Ablenkungen diese Wirkung mit

grösserer Schärfe zu bestimmen. Denselben Zweck hatte die Umkehrung des Stromes in der dritten Rolle in Beziehung auf die Ablenkung des Magnetometers, welche zur Bestimmung der Stromintensität diente. Dieser Zweck wird durch die beschriebene Einrichtung, mit Hülfe des Commutators A, erreicht; denn die Richtung des Stroms bleibt in der Säule D und in allen denjenigen Theilen der Kette, welche die Säule D mit dem Commutator A verbinden, stets dieselbe, nämlich im Drahte tt, in der Säule D, im Drahte uu, in der *Bifilarrolle* des Dynamometers E und im Drahte vv; dagegen kann die Richtung des Stroms durch den Commutator A in allen denjenigen Theilen der Kette gewechselt werden, welche durch den Commutator A von der Säule D geschieden sind, nämlich in dem Drahte $n'n'$, in der *festen Rolle* des Dynamometers E, in dem Drahte nn, in der Multiplicatorrolle B und in dem Drahte ss.

Die Schwingungsdauer der Bifilarrolle ohne Strom war $= 13''3259$. Der horizontale Abstand des Spiegels der Bifilarrolle von der Skale betrug 3306,3 Skalentheile; der horizontale Abstand des Spiegels des Magnetometers von der Skale betrug 1103 Skalentheile. Die Resultate dieser Messungen sind in folgender Tafel enthalten, in derselben Ordnung, in welcher sie gemacht wurden.

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
600 westlich.	516,27	26,41		250,47	321,49	
	542,68	26,74		571,96	321,48	
	515,94	26,37	26,35	250,48	321,12	320,14
	542,31	26,24		571,60	319,41	
	516,07	26,00		252,19	317,22	
	542,07			569,41		
500 westlich.	506,37	44,47		254,05	314,65	
	550,84	44,87		568,70	314,22	
	505,97	43,89	44,31	254,48	314,77	314,32
	549,86	44,50		569,25	314,33	
	505,36	43,84		254,92	313,63	
	549,20			568,55		
500 nördlich.	517,27	20,34		566,80	312,08	
	537,61	20,43		254,72	312,98	
	517,18	20,19	20,30	567,70	312,82	312,48
	537,37	20,36		254,88	312,63	
	817,01	20,19		567,51	311,89	
	537,20			255,62		
500 östlich.	505,06	43,04		257,92	308,39	
	548,10	43,09		566,31	308,98	
	505,01	42,53	42,89	257,33	308,05	308,80
	547,54	42,32		565,38	309,09	
	505,22	43,46		256,29	309,50	
	548,68			565,79		

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
500 südlich.	517,96 537,47 517,67 536,86 517,07 536,24	19,51 19,80 19,19 19,79 19,17	19,49	564,05 257,96 564,03 258,89 564,36 259,33	306,09 306,07 305,14 305,47 305,03	305,56
600 östlich.	514,31 538,50 514,85 538,91 515,19 539,04	24,19 23,65 24,06 23,72 23,85	23,72	260,23 564,69 259,67 564,25 258,89 564,06	304,46 305,02 304,58 305,36 305,17	304,92
400 östlich.	568,21 486,54 568,39 486,62 568,19 486,84	81,67 81,85 81,77 81,57 81,35	81,64	562,50 258,96 563,63 260,28 563,60 259,52	303,54 304,67 303,35 303,32 304,08	303,79
400 nördlich.	546,32 510,05 546,30 510,16 546,12 510,00	36,27 36,25 36,14 35,96 36,12	36,15	261,44 562,39 259,97 562,70 261,12 563,81	300,95 302,42 302,73 301,58 302,69	302,07
400 westlich.	488,36 568,07 488,29 567,89 488,40 567,80	79,71 79,78 79,60 79,49 79,40	79,60	261,99 562,98 261,53 562,50 261,70 561,53	300,99 301,45 300,97 300,80 299,83	300,80
400 südlich.	510,23 545,57 510,04 545,49 509,93 545,21	35,34 35,53 35,45 35,56 35,28	35,43	561,18 262,23 561,90 262,50 561,87 262,76	298,95 299,67 299,40 299,37 299,11	299,30
300 südlich.	566,29 486,84 566,23 488,10 566,74 488,12	79,45 79,39 78,13 78,64 78,62	78,85	263,73 562,54 262,23 562,53 262,23 561,94	298,81 300,31 300,30 300,30 299,71	299,89

A.	Dynamometer			Galvanometer.		
	431,18			263,96		
		192,57			298,05	
	623,75			562,01		
		192,40			298,25	
300	431,35			263,76		
westlich.		192,02	192,17		297,99	297,81
	623,37			561,75		
		191,96			297,30	
	431,41			264,45		
		191,91			297,45	
	623,32			561,90		
	566,96			265,93		
		78,30			297,12	
	488,66			563,05		
		78,37			299,13	
300	567,03			263,92		
nördlich.		77,93	78,08		299,12	298,33
	489,10			563,04		
		77,98			298,15	
	567,08			264,89		
		77,80			298,14	
	489,28			563,03		
	433,52			266,49		
		190,26			296,69	
	623,78			563,18		
		190,43			298,16	
300	433,35			265,02		
östlich.		190,23	190,08		296,98	297,30
	623,58			562,00		
		189,89			297,09	
	433,69			264,91		
		189,59			297,60	
	623,28			562,51		

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen. In der Columne A ist der Abstand der Mittelpunkte beider Rollen des Dynamometers in Millimetern angegeben, und dabei bemerkt, nach welcher Richtung, von der Bifilarrolle aus gerechnet, die feste Rolle aufgestellt war; unter nördlich und südlich ist die Richtung nach dem magnetischen Meridiane, unter östlich und westlich die Richtung senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu verstehen. — In der «Dynamometer» überschriebenen zweiten Columne ist der Stand der Bifilarrolle nach Skalentheilen angegeben, abwechselnd bei directer und umgekehrter Richtung des Stromes in der festen Rolle. Jede dieser Zahlen beruht auf 7 Ablesungen, indem von Schwingung zu Schwingung abwechselnd das Maximum und das Minimum des Schwingungsbogens 7 Mal hinter einander abgelesen und hieraus nach bekannten Regeln der mittlere Ruhestand der schwingenden Rolle berechnet wurde. Bei der Umkehrung des Stromes in der festen Rolle wurde ein solches Verfahren angewendet, durch welches der Schwingungsbogen der Bifilarrolle nicht vergrössert wurde. In der Tafel sind neben den Standbeobachtungen, welche sich abwechselnd auf den directen und umgekehrten Strom in der festen Rolle beziehen, die Unterschiede je zweier unmittelbar auf einander folgender Beobachtungen bemerkt, welche die doppelte Ablenkung der Bifilarrolle durch Einwirkung der festen Rolle in Skalentheilen angeben. Endlich ist neben diesen einzelnen Werthen der doppelten Ablenkung ihr Mittelwerth für jede Stellung der festen Rolle bemerkt. — In der «Galvanometer» überschriebenen dritten Columne ist der Stand des Galvanometers angegeben, abwechselnd bei directer und umgekehrter Stromrichtung in der als Multiplicator dienenden Rolle B. Dieser Stand ist auf dieselbe Weise beobachtet und berechnet worden, wie beim Dynamometer, und daneben

sind die Unterschiede, und der Mittelwerth der doppelten Ablenkung des Galvanometers bemerkt. Die correspondirenden Beobachtungen am Dynamometer und am Galvanometer sind immer von zwei Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig gemacht worden.

Alle in der obigen Tafel zusammengestellten Beobachtungen sind in der angegebenen Ordnung an einem Tage unmittelbar nach einander gemacht worden, und, da alle äusseren Verhältnisse genau die nämlichen blieben, so sind alle Resultate unmittelbar unter einander vergleichbar. Es war an diesem Tage nicht möglich gewesen, auch noch diejenigen Beobachtungen auszuführen, wobei die feste Rolle ihre Stellung im Mittelpunkte der Bifilarrolle erhielt, weil diese Umstellung der festen Rolle mehrere zeitraubende Vorkehrungen erforderte. Diese letzte Versuchsreihe wurde daher auf einen andern Tag verschoben. Weil aber dann nicht mehr mit Sicherheit darauf zu bauen war, dass alle äusseren Verhältnisse genau dieselben geblieben, wie bei den früheren Versuchen, so wurden, zur Vergleichung, an diesem zweiten Tage zwei Versuchsreihen wiederholt, welche schon am ersten Tage gemacht worden waren, nämlich bei 300 Millimeter östlichem und westlichem Abstande der festen Rolle von der Bifilarrolle, welche benutzt werden konnten, die letzte Versuchsreihe so zu reduciren, dass die Resultate mit den Resultaten der früheren Beobachtungen vergleichbar wurden, unabhängig von den kleinen Aenderungen, welche in der Zwischenzeit in den äusseren Verhältnissen eingetreten sein mochten. Auch hatte es auf diese Vergleichung keinen Einfluss, dass am andern Tage eine andere galvanische Säule gebraucht wurde, nämlich von 2 Grove'schen (Platin-Zink-) Bechern statt von 8 Bunsen'schen Kohlenbechern. Es war dies nothwendig, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers bei der Stellung der festen Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle zu gross gewesen wäre, um an der Skale gemessen zu werden. Endlich werde bemerkt, dass die constante Richtung des Stromes in der Bifilarrolle am andern Tage die entgegengesetzte war, wie am ersten, was ebenfalls auf die reducirten Resultate keinen Einfluss hat. Die Resultate dieser zweiten Versuchsreihe sind in der folgenden Tafel enthalten.

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
0	48,05			359,78		
		905,69			64,51	
	953,74			424,29		
		904,84			64,46	
	48,90			359,83		
		904,00	903,97		64,47	64,45
	952,90			424,30		
		903,01			64,40	
	49,89			359,90		
		902,31			64,39	
	952,20			424,29		
300 östlich.	485,70			329,30		
		27,58			125,08	
	513,28			454,38		
		27,18			124,99	
	486,10			329,39		
		27,25	27,54		124,89	125,08
	513,35			454,28		
		28,26			125,10	
	485,09			329,18		
		27,43			125,35	
	512,52			454,53		

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
300 westlich.	512,37			454,50		
		25,65			125,18	
	486,72			329,32		
		27,77			125,29	
	514,49			454,61		
		27,43	27,20		125,35	125,23
	487,06			329,26		
		27,60			125,30	
	514,66			454,56		
		27,55			125,05	
	487,11			329,51		

Es ist hierbei zu bemerken, dass auch der Strom von 2 Grove'schen Bechern eine grössere Ablenkung des Dynamometers hervorbrachte, als mit der 1000 Theile umfassenden Skale gemessen werden konnte, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle aufgestellt war, und dass daher in diesem Falle der Strom dadurch geschwächt wurde, dass der Widerstand der Kette durch Einschaltung eines langen und dünnen Leitungsdrahtes vermehrt wurde, der bei 300 Millimeter Abstand der beiden Rollen wieder entfernt wurde, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers hier wieder für eine genaue Messung zu klein ausgefallen sein würde. Man erkennt dies aus der Verschiedenheit der Magnetometer-Ablenkung, welche die Stromintensität misst, und im letzteren Falle fast das Doppelte wie im ersteren beträgt.

Die Resultate dieser Versuchsreihe lassen sich leicht in folgender Zusammenstellung aller Mittelwerthe der gleichzeitigen Ablenkungen des Dynamometers und Galvanometers übersehen, nämlich:

Abstand in Millimetern.	Dynamometer	Galvanometer
0	903,97	64,45
300 östlich	27,54	125,08
300 westlich	27,20	125,23.

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, weil diese das Maass der ablenkenden Kraft geben. Es ist dabei noch ein geringer Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen. Man erhält hieraus folgende reducirte Werthe:

0	899,79	64,44
300 östlich	27,54	124,98
300 westlich	27,20	125,13.

Von den beiden letzten Zahlenreihen, welche von einander nur wenig verschieden sind, nehmen wir die Mittel, weil sie ganz gleich sein sollten, wenn die Stromintensität dieselbe, und die Stellung der festen Rolle östlich und westlich von der Bifilarrolle ganz symmetrisch gewesen wäre, wodurch wir folgende Werthe erhalten:

0	899,79	64,44
300	27,37	125,055.

Die Resultate der vorhergehenden Versuchsreihe lassen sich in der Zusammenstellung aller Mittelwerthe der Dynamometer- und Galvanometer-Ablenkungen in folgender Tafel übersehen, nämlich:

Abstand.	Oestlich.		Westlich.		Südlich.		Nördlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.
300	190,08	297,30	192,17	297,81	78,85	299,89	78,08	298,33
400	81,64	303,79	79,60	300,81	35,43	299.30	36,15	302,07
500	42,89	308,80	44,31	314,32	19,49	305,56	20,30	312,48
600	23,89	304,92	26,35	320,14	—	—	—	—

Ich habe mich überzeugt, dass der Einfluss der Reduction dieser Zahlen auf Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel für das Dynamometer so gering ist, dass er ausser Betracht gelassen werden kann, er ist nämlich kleiner, als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Auch bei den Galvanometer-Beobachtungen kommt diese Correction kaum in Betracht, weil in der Ablenkung des Galvanometers keine grossen Verschiedenheiten vorkommen.

6.

Die beobachteten elektrodynamischen Kräfte im vorigen Artikel können zu der beabsichtigten Prüfung der durch das Ampère'sche Gesetz bestimmten Abhängigkeit dieser Kräfte von der gegenseitigen Lage der auf einander wirkenden Leitungsdrähte nicht unmittelbar benutzt werden, weil sie auf verschiedene Stromintensitäten sich beziehen. Es sollen daher zunächst diese Beobachtungen *auf gleiche Stromintensität* reducirt werden, wozu das im 4. Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung kommt, nach welchem die Dynamometer-Ablenkungen den Quadraten der Galvanometer-Ablenkungen proportional sind. Die Anwendung dieses Gesetzes auf die vorliegenden Beobachtungen setzt aber selbst wieder eine andere Reduction voraus, nämlich die *auf gleiche Directionskraft* der Bifilarrolle, welche bei diesen Versuche merkliche Aenderungen erlitt. Bei den im 4. Artikel angeführten Beobachtungsresultaten, durch welche das angeführte Gesetz bewiesen wurde, war die hieraus sich ergebende Correction unmerklich und brauchte daher nicht in Rechnung gebracht zu werden, weil dort der Strom, welcher durch die feste Rolle des Dynamometers ging, getheilt wurde und nur ein kleiner Theil, nämlich $\frac{1}{246}$ des ganzen Stromes, durch die *Bifilarrolle* geführt wurde, der auf die Directionskraft dieser Rolle keinen merklichen Einfluss hatte. Bei den jetzt vorliegenden Beobachtungsresultaten dagegen darf diese Reduction nicht unbeachtet bleiben, weil hier der ganze durch die feste Rolle geführte Strom durch die Bifilarrolle weiter ging.

Die *Directionskraft der Bifilarrolle* zerfällt in einen *constanten* und in einen *veränderlichen* Theil. Der *constante* Theil, welcher das *statische Moment* heisst, hängt von dem Gewichte der Bifilarrolle und von Länge und Abstand der Aufhängungsdrähte ab und lässt sich aus der beobahteten *Schwingungsdauer* und dem *Trägsheitsmomente* der Bifilarrolle berechnen. Die *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle, wenn kein Strom durchging, war durch besondere Beobachtungen bestimmt worden,

$$t = 13''3259.$$

Das *Trägheitsmoment* K wurde nach den von Gauss in der *Intensitas* gegebenen Vorschriften

$$K = 864800000$$

gefunden, wobei Millimeter und Milligramm als Längen- und Massenmaass zum Grunde liegen. Das *statische Moment* S erhält man hieraus

$$S = \frac{\pi\pi K}{tt} = 48064000.$$

Der *veränderliche* Theil der Directionskraft der Bifilarrolle, welcher das *elektromagnetische Moment* heisse, hängt von der Intensität des horizontalen Theils des *Erdmagnetismus* T, von der Intensität des Stromes der Bifilarrolle $\varkappa$ und von der Grösse des Flächenraums λ ab, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt wird, und ist dem Producte dieser drei Grössen gleich zu setzen. Die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus war an der Stelle der Bifilarrolle

$$T = 1{,}83$$

gefunden worden. Die Grösse des *Flächenraums*, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt war, konnte durch directe Abmessung nicht bestimmt werden, weil die Zahl der Drahtwindungen nicht genau bekannt war. Es wurde daher dieser Flächenraum mittelbar durch Vergleichung der elektromagnetischen Wirkung dieser Rolle mit der einer anderen von bekanntem Flächenraume auf eine entfernte Boussole bestimmt, wonach

$$\lambda = 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

erhalten wurde. Die *Stromintensitäten* waren endlich für alle einzelnen Versuche durch die Galvanometerbeobachtungen in Skalentheilen gegeben, die jedoch zu vorliegendem Zwecke auf das *elektromagnetische Grundmaass* der Stromintensitäten zurückzuführen sind. Hierzu muss die beobachtete Zahl der Skalentheile mit einem constanten Factor multiplicirt werden, welcher der im 9 Artikel zu gebenden Nachweisung gemäss

$$= 0{,}0003614$$

zu setzen ist. Bezeichnet also y die am Galvanometer beobachtete Zahl der Skalentheile, so ist die Stromintensität

$$\varkappa = 0{,}0003614 \, . \, y.$$

Aus diesen Elementen ergiebt sich das *elektromagnetische Moment* der Bifilarrolle

$$\varkappa\lambda T = 19400 \, . \, y.$$

Dieser Werth des elektromagnetischen Moments ist bei der *ersten* Versuchsreihe von dem des *statischen Moments* abzuziehen, bei der zweiten Versuchsreihe aber demselben hinzuzufügen, um die *Directionskraft der Bifilarrolle* zu erhalten, weil, wie schon S. 242 bemerkt worden ist, die Stromrichtung in der Bifilarrolle in der letzteren Reihe der in der ersteren entgegengesetzt war. Für die *erste* Versuchsreihe ergiebt sich hieraus die Directionskraft in Theilen des statischen Moments

$$= 1 - \tfrac{19400}{48064000} \, . \, y.$$

für die zweite Versuchsreihe

$$= 1 + \tfrac{19400}{48064000} \cdot y.$$

Die beobachteten *Dynamometer-Ablenkungen* werden hiernach auf eine constante, dem *statischen Momente* gleiche, Directionskraft reducirt, wenn man die am Dynamometer beobachtete Zahl der Skalentheile x in der *ersten* Versuchsreihe mit $(1 - \tfrac{194}{480640} \cdot y)$, in der *zweiten* mit $(1 + \tfrac{194}{480640} \cdot y)$ multiplicirt.

Nach dieser Reduction erhält man für die *erste Reihe* die in folgender Tafel zusammengestellten Werthe der Dynamometer- und Galvanometer-Ablenkungen.

Abstand.	Oestlich.		Westlich.		Südlich.		Nördlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.
300	167,26	297,30	169,06	297,81	69,30	299,89	68,67	298,33
400	71,63	303,79	69,93	300,81	81,15	299,30	31,74	302,07
500	37,54	308,80	38,69	314,32	17,09	305,56	17,74	312,48
600	20,95	304,92	22,94	320,14	—	—	—	—

Für die *zweite Reihe* erhält man folgende zusammengehörige Werthe:

Abstand.	Oestlich oder Westlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.
0	923,19	64,44
300	28,75	125,055

Die *Empfindlichkeit* eines Instruments ist seiner *Directionskraft* umgekehrt proportional, d. h. die zu messende Kraft bringt eine desto grössere Ablenkung hervor, je kleiner seine Directionskraft ist. Obige auf *gleiche Directionskraft* reducirten Beobachtungen sind also denen gleich, welche bei *gleicher Empfindlichkeit* des Dynamometers erhalten worden wären.

Nach dieser Reduction der Dynamometer-Beobachtungen *auf gleiche Directionskraft* lässt sich nun das im 4. Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung bringen und alle Beobachtungen, zur besseren Vergleichung unter einander, *auf gleiche Stromintensität* reduciren. Es ist hierzu nur nöthig, die normale Stromintensität, für welche die reducirten Beobachtungen gelten sollen, näher zu bestimmen. Da es nicht nöthig ist, für beide Versuchsreihen *gleiche* normale Stromintensitäten anzuwenden, so möge für die *erste Reihe* diejenige gewählt werden, welche einer Galvanometer-Ablenkung in Skalentheilen entspricht, deren Quadrat = 100000 ist, für die *zweite Reihe* eine 5 Mal kleinere, für welche dieses Quadrat = 4000 ist. Nach dem im 4. Artikel bewiesenen Gesetze erhält man dann aus der in der Tafel angegebenen Dynamometer-Ablenkung x, welche der ebenfalls in der Tafel angegebenen Galvanometer-Ablenkung y entsprach, den reducirten Werth für die *erste* Reihe

$$= 100000 . \frac{x}{yy},$$

für die *zweite* Reihe

$$= 4000 . \frac{x}{yy} .$$

In folgender Tafel sind die hiernach reducirten Werthe der *ersten* Reihe zusammengestellt.

Abstand.	Oestlich.	Westlich.	Südlich.	Nördlich.
300	189,24	190,62	77,06	77,16
400	77,61	77,28	34,77	34,78
500	39,37	39,16	18,30	18,17
600	22,53	22,38	—	—

Die reducirten Werthe der *zweiten* Reihe sind folgende:

Abstand.	Oestlich oder westlich.
0	889,29
300	7,35.

Aus dieser letzteren ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft der festen Rolle auf die Bifilarrolle, wenn die Mittelpunkte zusammenfallen

$$\frac{889{,}29}{7{,}35} = 120{,}9 \text{ Mal}$$

grösser war, als wenn die Mittelpunkte in west-östlicher Richtung 300 Millimeter von einander entfernt waren.

In der Tafel für die erste Reihe sieht man, dass sowohl die in Osten und Westen als auch die in Süden und Norden sich entsprechenden Werthe sehr nahe übereinstimmen, was ein Beweis ist sowohl für die Genauigkeit der Messung als auch für die symmetrische Stellung, welche die feste Rolle zu beiden Seiten der Bifilarrolle erhalten hatte. Nimmt man nun die Mittel von diesen schon nahe mit einander übereinstimmenden Werthen, und fügt für 0 Abstand, dem eben aus der *zweiten* Reihe gezogenen Resultate gemäss, den 120,9 fachen Werth der Wirkung für 300 Millimeter Abstand senkrecht auf dem magnetischen Meridiane hinzu, so erhält man folgende Tafel:

Abstand.	Senkrecht auf den magnetischen Meridian.	In der Richtung des magnetischen Meridians.
0	22960	22960
300	189,93	77,11
400	77,45	34,77
500	39,27	18,24
600	22,46	—

7.

Ehe wir nun dieses System von Messungen über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte dazu benutzen, das Ampèresche Fundamentalgesetz direct daran zu prüfen, wollen wir eine interessante, wenn auch nur indirecte und partielle Prüfung vorausschicken. Es ist nämlich bekannt, dass es eine der wichtigsten Consequenzen des Ampèreschen Fundamentalgesetzes für die Wechselwirkung zweier Stromelemente sei, dass die Wechselwirkung zweier Magnete, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch constante galvanische Ströme, welche auf eine bestimmte Weise auf der Oberfläche oder im Innern der Magnete statt finden, hervorgebracht werden würde, und umgekehrt, dass die Wechselwirkungen zweier galvanischer Rollen, wie diejenigen, womit unsere Messungen ausgeführt wurden, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch zwei constante Magnete hervorgebracht werden würden, welche in Räumen enthalten sind, welche von den Drahtwindungen jener Rollen umschlossen sind, wenn der freie Magnetismus auf eine bestimmte Weise im Innern oder auf ihrer Oberfläche vertheilt wäre. Hiernach können alle Resultate, welche Gauss in der *Intensitas vis magneticae* cet. für solche Magnete bewiesen hat, auf unsere beiden Rollen übertragen werden, und dies kann um so leichter geschehen, als wir unsere Messungen über die Wechselwirkungen der beiden Rollen genau so angeordnet haben, wie Gauss die Messungen der Wechselwirkungen der beiden Magnete bestimmt hat. Gauss hat a. a. O. den Abstand der beiden Magnete in Metern angegeben, statt wir Millimeter gebrauchen; ferner hat Gauss die *einfachen*, von der natürlichen Ruhelage der Nadel an gerechneten, Ablenkungen in Graden, Minuten und Secunden bestimmt, während wir die *doppelten* Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel in Skalentheilen (d. i. mit dem constanten Coefficienten 6612,6 multiplicirt), angesetzt haben. Wollen wir daher unsere Messungen über die Wechselwirkung der beiden Leitungsrollen in die nämliche Form bringen wie jene magnetischen, so erhalten wir folgende Tafel der *gemessenen* Ablenkungen:

R	v	v'
$0^m,3$	$0°49'\ 22''$,	$0°\ 20'\ 3''$
0 ,4	0 20 8	0 9 2
0 ,5	0 10 12	0 4 44
0 ,6	0 5 50	———

Die Tangenten von v und v' sollen sich dann hier wie dort nach den fallenden ungeraden Potenzen von R entwickeln lassen, und zwar soll

$$\text{tang}\, v = aR^{-3} + bR^{-5}$$
$$\text{tang}\, v' = \tfrac{1}{2}aR^{-3} + cR^{-5}$$

gesetzt werden können, wo a, b, c aus der Erfahrung zu bestimmen sind. Setzt man nun in unserem Falle

$$\tang v = 0{,}0003572\, R^{-3} + 0{,}000002755\, R^{-5}$$
$$\tang v' = 0{,}0001786\, R^{-3} - 0{,}000001886\, R^{-5}$$

so ergiebt sich folgende Tafel *berechneter* Ablenkungen, denen die Unterschiede von den *gemessenen* beigefügt worden sind:

R	v	Unterschied.	v'	Unterschied.
0^m, 3	0° 49′ 22″	0	0° 20′ 4″	— 1
0 , 4	0 20 7	+ 1	0 8′ 58	+ 4
0 , 5	0 10 8	+ 4	0 4 42	+ 2
0 , 6	0 5 49	+ 1	———	

Die Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen kann nicht besser gewünscht werden und das Ampère'sche Fundamentalgesetz findet sich hiernach in einer seiner allgemeinsten und wichtigsten Consequenzen durch die Erfahrung bestätigt.

8.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz für die Wechselwirkung zweier Stromelemente, welches an dem vorliegenden Systeme von Messungen dieser Wechselwirkung geprüft werden soll, besteht selbst nun wesentlich in Folgendem: Die Wechselwirkung zweier Stromelemente ist dem Quadrate ihres Abstandes von einander umgekehrt, und der Stromintensität und der Länge jedes Stromelements und ausserdem einem Factor direct proportional, welcher von dem Winkel, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander, und von den beiden Winkeln, welche die beiden Stromelemente mit ihrer geraden Verbindungslinie bilden, abhängt. Man bezeichne mit r den Abstand der beiden Stromelemente von einander, mit i und i' die beiden Stromintensitäten, mit ds und ds' die Längen der beiden Stromelemente, mit ε den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander bilden, endlich mit θ den Winkel des einen Stromelements mit der Linie r, und mit θ' den Winkel des anderen Stromelements mit der verlängerten Linie r, so ist

$$-\frac{ii'}{rr}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds'$$

ein Ausdruck für die *Grösse* der Wechselwirkung beider Elemente; die *Richtung* derselben fällt für beide Stromelemente mit ihrer Verbindungslinie zusammen, und ist für die beiden Stromelemente entgegengesetzt, für beide abstossend, wenn obiger Ausdruck einen positiven Werth hat, im entgegengesetzten Falle anziehend.

Aus diesem Fundamentalgesetze lässt sich nun zunächst der Ausdruck für die Gesammtwirkung finden, welche eine Anzahl von Stromelementen, die zusammen eine *geschlossene* Linie bilden, auf irgend ein anderes Stromelement ausüben.

Man kann diese Wirkung nach drei rechtwinkligen Coordinatenaxen zerlegen. Bezeichnet man diese drei Componenten mit X, Y, Z, ferner die Winkel, welche das Stromelement d s', auf welches gewirkt wird, mit den drei Coordinatenaxen bildet, mit λ, μ, ν, und ist die Mitte des Elements d s' der Anfangspunkt der Coordinaten, so hat Ampère schon bewiesen, dass

$$X = -\tfrac{1}{2} ii' \mathrm{d}s' \left(\cos\mu \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} - \cos\nu \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}\right)$$

$$Y = -\tfrac{1}{2} ii' \mathrm{d}s' \left(\cos\nu \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} - \cos\lambda \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3}\right)$$

$$Z = -\tfrac{1}{2} ii' \mathrm{d}s' \left(\cos\lambda \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} - \cos\mu \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3}\right)$$

(siehe Mémoires de l'acad. roy. des sc. de l'Institut de France. Année 1823. S. 214). Ist nun die geschlossene Linie eine Kreislinie von dem Halbmesser m, ist ferner die Axe der x der Projection der den Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkte der Coordinaten verbindenden Geraden auf die Kreisebene parallel, und die Axe der y dem auf jene Projection senkrechten Durchmesser des Kreises; bezeichnet man ferner den auf die Kreisebene projicirten Abstand des Kreismittelpunkts vom Anfangspunkte der Coordinaten mit p, und den Winkel, welchen die Linie p mit dem Radius eines Kreiselementes d s bildet, mit ω; endlich mit q das Perpendikel vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Kreisebene, so ist für diesen Fall in obigen Werthen von X, Y, Z

$$z = q, \quad y = m \sin\omega, \quad x = p - m\cos\omega,$$

folglich ist, weil $rr = xx + yy + zz$ ist,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = mp \int \frac{\cos\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3} - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$= mp\left(\frac{\sin\omega}{r^3} + 3\int \sin\omega \,.\, \frac{\mathrm{d}r}{r^4}\right) - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = mq \int \frac{\sin\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = -mq \int \frac{\cos\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3} = -mq\left(\frac{\sin\omega}{r^3} + 3\int \sin\omega \,.\, \frac{\mathrm{d}r}{r^4}\right)$$

Substituirt man hierin endlich für dr seinen aus der Gleichung für r, nämlich:

$$rr = xx + yy + zz = mm + pp + qq - 2mp\cos\omega,$$

sich ergebenden Werth

$$dr = \frac{mp \sin\omega\,\mathrm{d}\omega}{r},$$

und erstreckt die Integralwerthe auf den ganzen Kreisumfang, so erhält man

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = 3\,mm\,pp \int \frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5} - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = 0$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = -3\,mm\,pq \int \frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5};$$

folglich

$$X = -\tfrac{1}{2} ii' \, ds'.mm \cos\mu \left(3pp\int\frac{\sin\omega^2 \, d\omega}{r^5} - \int\frac{d\omega}{r^3}\right)$$

$$Y = +\tfrac{1}{2} ii' \, ds'.mm\left(3pq\cos\nu\int\frac{\sin\omega^2 \, d\omega}{r^5} + 3pp\cos\lambda\int\frac{\sin\omega^2 \, d\omega}{r^5} - \cos\lambda\int\frac{d\omega}{r^3}\right).$$

Gehört nun das Element ds' ebenfalls einem Kreise an, dessen Halbmesser mit n bezeichnet werde, und dessen Ebene der Coordinatenaxe z parallel ist, und bezeichnet man mit a das Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises m auf die Ebene des Kreises n, mit c das Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises n auf die Ebene des Kreises m, mit b den Abstand beider Perpendikel, und ist, wie in obigen Versuchen der Fall war,

$$b = 0,$$

so erhält man für die Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Coordinatenaxen bildet, folgende Gleichungen:

$$\gamma = 90^\circ$$

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$$

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu = 0.$$

Da ausserdem

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

gegeben ist, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos\mu}{\sin\nu}, \quad \cos\beta = -\frac{\cos\lambda}{\sin\nu}.$$

Für p und q erhält man ferner folgende Gleichungen:

$$p\cos\beta = n\cos\nu$$

$$pp = aa + nn\cos\nu^2$$

$$q = c + n\sin\nu$$

Multiplicirt man nun die Componenten X, Y, Z respective mit den Cosinus der Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Coordinatenaxen macht, so giebt die Summe dieser Produkte die Componente in der auf die Ebene des Kreises n senkrechten Richtung, nämlich:

$$= X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma,$$

oder, wenn man für X, Y, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und γ die gefundenen Werthe substituirt, und p und q eliminirt,

$$= -\tfrac{1}{2} ii' mm \, ds'.\left[3(aa\sin\nu - cn\cos\nu^2)\int\frac{\sin\omega^2 \, d\omega}{r^5} - \sin\nu\int\frac{d\omega}{r^3}\right],$$

worin

$$rr = aa + cc + mm + nn + 2cn\sin\nu - 2m\cos\omega \cdot \sqrt{(aa + nn\cos\nu^2)}.$$

Schreibt man in obigem Ausdrucke für die Länge des Kreiselementes ds' seinen durch Bogenwerth und Halbmesser ausgedrückten Werth $= n\,d\nu$, und multiplicirt dann mit dem Abstande des Elementes von dem verticalen Durch-

messer des Kreises $= n \sin\nu$, so erhält man das Drehungsmoment der Kraft, in Beziehung auf den verticalen Durchmesser des Kreises als Drehungsaxe,

$$= -\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \sin\nu . d\nu \left[3(aa \sin\nu - cn \cos\nu^2)\int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \sin\nu \int \frac{d\omega}{r^3}\right].$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $\nu = 0$ bis $\nu = 2\pi$, so erhält man das Drehungsmoment, welches der Kreisstrom m auf den Kreisstrom n ausübt.

Bei der angegebenen Stellung der beiden Kreise gegen einander (wo nämlich ihre Ebenen auf einander senkrecht sind, und die darauf in ihren Mittelpunkten errichteten Perpendikel einander schneiden) können drei Hauptfälle unterschieden werden, die allein bei den obigen Versuchen vorkommen, nämlich entweder

1) die Ebene des Kreises m halbirt die Ebene des Kreises n, oder es ist $c = 0$; oder

2) die Ebene des Kreises n halbirt die Ebene des Kreises m, oder es ist $a = 0$; oder endlich

3) beide Ebenen halbiren einander wechselseitig, oder es ist $a = 0$ und $c = 0$.

Für den *ersten* Fall ergiebt sich folgender Ausdruck des auf den Kreis n wirkenden Drehungsmomentes, nämlich:

$$-\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu^2 d\nu \left(3\, aa \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \int \frac{d\omega}{r^3}\right);$$

worin

$$rr = aa + mm + nn - 2m \cos\omega . \sqrt{(aa + nn \cos\nu^2)}.$$

Für den *zweiten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu\, d\nu \left(3\, cn \cos\nu^2 \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} + \sin\nu \int \frac{d\omega}{r^3}\right),$$

worin

$$rr = cc + mm + nn + 2\, cn \sin\nu - 2\, mn \cos\nu \cos\omega.$$

Für den *dritten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\tfrac{1}{2} ii'\, mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu^2\, d\nu \int \frac{d\omega}{r^3};$$

worin

$$rr = mm + nn - 2\, mn \cos\nu \cos\omega.$$

Die erste Integration obiger Ausdrücke, nämlich in Beziehung auf ω, lässt sich

nur ausführen, indem man $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^5}$ in Reihen nach wachsenden Potenzen von $\cos\omega$ entwickelt. Da rr die Form hat:

$$ll(1 - k\cos\omega),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{l^3}\left(1 + \tfrac{3}{2}k\cos\omega + \tfrac{15}{8}kk\cos\omega^2 + \tfrac{35}{16}k^3\cos\omega^3 + \tfrac{315}{128}k^4\cos\omega^4 + ..\right)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{l^5}\left(1 + \tfrac{5}{2}k\cos\omega + \tfrac{35}{8}kk\cos\omega^2 + \tfrac{105}{16}k^3\cos\omega^3 + \tfrac{1155}{128}k^4\cos\omega^4 + ..\right).$$

Da ferner

$$\pi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\omega = \int_0^{2\pi}\sin\omega^2\, d\omega = \int_0^{2\pi}\cos\omega^2\, d\omega = 4\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^2\, d\omega$$

$$= \tfrac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos\omega^4\, d\omega = 8\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^4\, d\omega = \text{etc.}$$

$$o = \int_0^{2\pi}\cos\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi}\cos\omega^3\, d\omega = \int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^3\, d\omega = \text{etc.},$$

so erhält man

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} = \frac{\pi}{l^5}\left(1 + \tfrac{35}{32}kk + \tfrac{11555}{1024}k^4 + ..\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{r^3} = \frac{2\pi}{l^3}\left(1 + \tfrac{15}{16}kk + \tfrac{945}{1024}k^4 + ..\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man für den *ersten* Hauptfall, wo $c = 0$ ist, den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{mmnn}{l^3}ii'.\Sigma,$$

wo Σ folgenden Integralwerth bezeichnet:

$$\int_0^{2\pi}\sin\nu^2\, d\nu\left[3\frac{aa}{ll}\left(1 + \tfrac{35}{32}kk + \tfrac{11555}{1024}k^4 + ..\right) - 2\left(1 + \tfrac{15}{16}kk + \tfrac{945}{1024}k^4 + ..\right)\right].$$

Es ist hierin

$$aa + mm + nn = ll \text{ und } 4(aa + nn\cos\nu^2).\frac{mm}{l^4} = kk.$$

Substituirt man diesen Werth von kk, und integrirt den nach Potenzen von $\cos \nu^2$ geordneten Ausdruck, so erhält man das elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi\pi}{2}\frac{mm\,nn}{l^3}\,ii'\left[3\frac{aa}{ll} - 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\left(7\frac{aa}{ll} - 4\right)\left(4 + \frac{nn}{aa}\right)\frac{aa\,mm}{l^4} + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck giebt also für den betrachteten ersten Hauptfall das Maass des Drehungsmoments, welches ein Ring vom Halbmesser $= m$ auf einen Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt. Für ein System von Ringen, deren Halbmesser arithmetisch von 0 bis m wachsen, erhält man als Maass des Drehungsmoments, welches dasselbe auf den Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt, das Integral des obigen mit dm multiplicirten Ausdrucks, zwischen den Grenzen $m = 0$ bis $m = m$ genommen. Setzt man Kürze halber

$$\frac{mm}{aa + nn} = vv; \quad \frac{nn}{aa + nn} = ww; \quad \frac{4\,aa + nn}{16(aa + nn)} = f; \quad \frac{8\,a^4 + 4\,aa\,nn + n^4}{64(aa + nn)^2} = g,$$

so ist das gesuchte elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi\pi}{2} v^3\,nn\,ii'.S,$$

wo S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned}
S = &+ \left[\tfrac{1}{3} - ww\right] \\
&- \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{3}{5} - ww - (3 - 7\,ww)f\right]vv \\
&+ \tfrac{15}{8}\left[\tfrac{5}{7} - ww - 2(5 - 9\,ww)f + 3(5 - 11\,ww)g\right]v^4 \\
&- \tfrac{35}{16}\left[\tfrac{7}{9} - ww - 3(7 - 11\,ww)f + 11(7 - 13\,ww)g\right]v^6 \\
&+ \tfrac{315}{256}\left[\tfrac{9}{11} - ww - 4(9 - 13\,ww)f + 26(9 - 15\,ww)g\right]v^8 \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}$$

Eine genaue Vergleichung mit den Beobachtungen fordert, das Drehungsmoment zu bestimmen, welches ein System von solchen Ringsystemen mit gemeinschaftlicher Axe auf ein anderes ähnliches System ausübe, wozu noch mehrere Integrationen nöthig wären. Indess sieht man leicht ein, dass, wenn man von dem mittelsten dieser auf einer Axe befindlichen Ringsysteme ausgeht, die Wirkung desselben als Mittelwerth für je zwei symmetrisch zu beiden Seiten desselben liegende Systeme genommen werden dürfe, weil die Wirkung des einen der beiden letzteren nahe eben so viel jenen Mittelwerth übersteigt, als die Wirkung des andern darunter bleibt. Es gilt dies um so mehr, je kleinere Bruchtheile die Halbmesser m und n von dem Abstande a der Mittelpunkte beider Systeme sind. Wir können daher bei dem zuletzt gegebenen Ausdrucke als Maass der Wirkung stehen bleiben.

Setzt man darin nun die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m, und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n = 55{,}8,$$

und für a successive folgende verschiedene Werthe:

$$\begin{array}{l} 1.\ a' = 300 \\ 2.\ a'' = 400 \\ 3.\ a''' = 500, \end{array}$$

so erhält man folgende mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

$$\begin{array}{ll} 1 & -1{,}4544 \\ 2. & -0{,}6547 \\ 3. & -0{,}3452. \end{array}$$

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf den *zweiten* Hauptfall an, wo $a = 0$ ist, so erhält man den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$= + \pi\pi v^3 nnii'.S,$$

worin Kürze halber

$$\frac{mm}{cc+nn} = vv; \quad \frac{cc}{cc+nn} = f; \quad \frac{nn}{cc+nn} = 4gvv,$$

gesetzt worden, und S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = &+ \left[\tfrac{1}{3}\right] \\ &- \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{10}{3}fg\right]vv \\ &+ \tfrac{15}{8}\left[\tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{5}(1-14f)g + 42ffgg\right]v^4 \\ &- \tfrac{35}{16}\left[\tfrac{1}{9} + \tfrac{3}{7}(2-18f)g - \tfrac{54}{5}(1-11f)fgg - 572f^3g^3\right]v^6 \\ &+ \tfrac{315}{128}\left[\begin{array}{l}\tfrac{1}{11} + \tfrac{4}{9}(3-22f)g + \tfrac{12}{7}(1-22f+143ff)gg \\ \quad + \tfrac{1144}{5}(1-10f)ffg^3 + \tfrac{24310}{3}f^4g^4\end{array}\right]v^8 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n = 55{,}8,$$

und für c successive folgende verschiedene Werthe:

$$\begin{array}{l} 1.\ c' = 300 \\ 2.\ c'' = 400 \\ 3.\ c''' = 500 \\ 4.\ c'''' = 600, \end{array}$$

so erhält man folgende mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

1. + 3,5625
2. + 1,4661
3. + 0,7420
4. + 0,4267.

Für den *dritten* Hauptfall endlich, wo $a = c = 0$ und $\frac{m}{n}$ ein echter Bruch ist, reicht es für unsern Zweck nicht hin, für n einen Mittelwerth anzunehmen, sondern man muss den für irgend ein n gefundenen Werth mit dn multipliciren, und das Integral dieses Products zwischen den durch die Beobachtung gegebenen Grenzwerthen von n, welche wir mit n' und n'' bezeichnen wollen, nehmen. Der hieraus sich ergebende Ausdruck ist dann noch mit $n''-n'$ zu dividiren, um seinen Werth auf das Maass der für den ersten und zweiten Hauptfall gegebenen Ausdrücke zu reduciren, welche in Beziehung auf n nicht integrirt worden sind. Man erhält dann für diesen dritten Hauptfall, wo $a = 0$ und $c = 0$ ist, folgenden Ausdruck für das Drehungsmoment:

$$+\frac{\pi\pi m^3}{n''-n'}ii'\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{n''}{n'}+\frac{9}{160}\left(\frac{1}{n''n''}-\frac{1}{n'n'}\right)mm-\frac{225}{14336}\left(\frac{1}{n''^4}-\frac{1}{n'^4}\right)m^4\\ +\frac{6125}{884736}\left(\frac{1}{n''^6}-\frac{1}{n'^6}\right)m^6+\frac{694575}{184549376}\left(\frac{1}{n''^8}-\frac{1}{n'^8}\right)m^8+\ldots\end{array}\right]$$

Setzt man in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m, n' und n'', nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n' = 50{,}25$$
$$n'' = 61{,}35,$$

so erhält man folgenden mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirenden Werth des Drehungsmoments:

$$442{,}714\,.$$

Bei der Nachbarschaft der Rollen in diesem Falle muss endlich noch darauf Rücksicht genommen werden, dass nicht sämmtliche Windungen jeder Rolle in einer Ebene liegen. Wenn daher auch für die Mittelpunkte der mittleren Querschnitte beider Rollen die Abstände $a = o$ und $c = o$ sind, so gilt dies doch nicht für die übrigen Querschnitte. Es ergiebt sich hieraus, wie man leicht sieht, eine Verkleinerung der Wirkung. In welchem Verhältnisse nun diese Verkleinerung zur ganzen Wirkung steht, lässt sich mit hinreichender Schärfe bestimmen, wenn man in der S. 251 gegebenen allgemeinen Formel, nach Substitution der Werthe von $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^5}$, sich blos an das erste von $\varkappa$ unabhängige Glied hält, und das zwischen den Grenzwerthen $\omega = o$ bis $\omega = 2\pi$ genommene Integral desselben, nachdem es mit $n\sin\nu$ und mit $dm\,dn\,da\,dc$ multiplicirt, und $nd\nu$ für ds' gesetzt worden ist, zwischen den Grenzen $\nu = o$ bis $\nu = 2\pi$, $m = o$ bis $m = 44{,}4$, $n = 50{,}25$ bis $n = 61{,}35$, $a = o$ bis $a = 15$ und $c = o$ bis $c = 15$ integrirt. Führt man diese Rechnung aus, so erhält man einen Ausdruck von folgender Form

$$A\left(1-\frac{\alpha\alpha}{5000}+\frac{\gamma\gamma}{22000}\right)\cdot\alpha\gamma,$$

worin A blos von i und i' und den Grenzwerthen von m und n abhängig ist, und α und γ die grössten Werthe von a und c bezeichnen. Die gesuchte Verkleinerung, in Theilen der ganzen Wirkung ausgedrückt, ist hiernach

$$= \frac{1}{5000}\,\alpha\alpha - \frac{1}{22000}\cdot\gamma\gamma,$$

und beträgt nach den angegebenen Zahlenwerthen $\alpha = \gamma = 15$

$$\frac{1}{29}.$$

Zieht man also von obigem Werthe $\frac{1}{29}\cdot 442{,}714$ ab, so erhält man folgenden mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirenden Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments, welches dem *dritten Hauptfall* entspricht,

$$= 427{,}45.$$

Stellt man nun, nach Analogie mit den Beobachtungen, die gefundenen Rechnungsresultate zusammen, so erhält man folgende Tafel für die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente:

Abstand.	Senkrecht auf den magnetischen Meridian.	In der Richtung des magnetischen Meridians.
0	+ 427,45	+ 427,45
300	+ 3,5625	— 1,4544
400	+ 1,4661	— 0,6547
500	+ 0,7420	— 0,3452
600	+ 0,4267	———

Diese Werthe müssen nun, wenn das Ampère'sche Gesetz richtig ist, den beobachteten Werthen proportional sein. In der That, multiplicirt man sämmtliche Werthe mit dem constanten Factor

53,06,

so erhält man den beobachteten sehr nahe kommende Werthe, welche nebst ihren Unterschieden von den letzteren in der folgenden Tafel enthalten sind.

Abstand.	Senkrecht auf d. magnetischen Meridian.	Unterschied.	In d. Richtung d. magnetischen Meridians.	Unterschied
0	+ 22680	+ 280	+ 22680	+ 280
300	+ 189,03	+ 0,90	— 77,17	— 0,06
400	+ 77,79	— 0,34	— 34,74	+ 0,03
500	+ 39,37	— 0,10	— 18,31	— 0,07
600	+ 22,64	— 0,18	———	———

Der erste berechnete Werth, nämlich + 22680, ist hier mit dem 120,9fachem Werthe dessen verglichen worden, welcher bei 300 Millimeter östlichem oder westlichem Abstande erhalten worden war, weil dieser Werth, dem in Art. 6. aus der zweiten Versuchsreihe gezogenen Resultate gemäss, der Wirkung der festen Rolle entspricht, wenn ihr Mittelpunkt mit dem der Bifilarrolle zusammenfällt. Der dabei angegebene Unterschied von 280 Einheiten erscheint daher vergrössert und entspricht einem Beobachtungsfehler von $\frac{1}{3}$ Skalentheile.

welcher in der zweiten Versuchsreihe Art. 5. in der Bestimmung der Dynamometer-Ablenkung bei 300 Millimeter Abstand begangen worden.

Diese vollkommene Uebereinstimmung zwischen den nach der Ampère'schen Formel berechneten und den beobachteten Werthen (die Unterschiede übersteigen nämlich nirgends den möglichen Betrag der unvermeidlichen Beobachtungsfehler), ist bei den so verschiedenen Verhältnissen, auf welche diese Uebereinstimmung sich bezieht, ein vollständiger Beweis der Wahrheit des Ampère'schen Fundamentalgesetzes.

Aus obiger Tafel ersieht man, dass die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente sich theils positiv theils negativ ergeben. Die Bedeutung der verschiedenen Vorzeichen ist hierbei folgende. Die Ebenen der beiden Drahtrollen waren gegen einander rechtwinkelig vorausgesetzt worden. Das elektrodynamische Drehungsmoment, welches die feste Rolle auf die bewegliche (Bifilarrolle) ausübt, strebt daher die Ebene der letzteren der Ebene der ersteren parallel zu machen, was von der ursprünglichen rechtwinkeligen Lage aus auf doppelte Weise, nämlich durch Drehung nach beiden Seiten hin geschehen kann. Die eine dieser Drehungen führt nun zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme um eine auf beide Ebenen senkrechte Axe in gleichem Sinne herumgehen; die andere Drehung führt dagegen zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme in entgegengesetztem Sinne um eine solche Axe herumgehen. Die elektrodynamischen Drehungsmomente, je nachdem sie die erstere oder die letztere Drehung bewirken, werden in der Rechnung als positiv oder negativ bezeichnet. Die Vorzeichen in obiger Tafel der berechneten Werthe lehren also, dass, wenn die feste Rolle auf die Bifilarrolle aus der Ferne von Norden oder Süden her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *entgegengesetztem* Sinne um gleich gerichtete Axen herum gingen; wenn dagegen die feste Rolle aus der Ferne von Osten oder Westen her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *gleichem* Sinne um gleich gerichtete Axen herumgingen. Das letztere findet der Rechnung nach auch dann statt, wenn die Mittelpunkte beider Rollen zusammen fallen.

Auch diese Resultate der Rechnung fanden sich durch die Resultate aller Beobachtungen vollständig bestätigt. Die deshalb zu beachtenden Verhältnisse sind in der oben gegebenen Beschreibung blos deshalb nicht ausführlich erörtert worden, weil die vollständigen Angaben über den Sinn der Strömung in allen einzelnen Theilen der Leitungskette und über den Sinn der beobachteten Drehungen zu vielen Raum gekostet haben würden. Da übrigens zur Prüfung dieser Resultate der Rechnung keine exacten Messungen nöthig sind, so konnte die Bestätigung derselben auch mit den bisherigen Mitteln erlangt werden und ist damit auch schon erhalten worden, weshalb es hier genügt, die Uebereinstimmung der mitgetheilten Beobachtungen mit obigen Rechnungs-Resultaten nur im Allgemeinen zu bemerken.

9.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz giebt die berechneten Drehungsmomente in *absoluten Maassen* ausgedrückt, vorausgesetzt, dass den Werthen der Stromintensität i ein absolutes Intensitätsmaass zum Grunde gelegt werde, und zwar ist hierbei als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten, bei welcher zwei gleiche parallele, auf der Verbindungslinie senkrechte Stromelemente aus dem dem Längenmaasse gleichen Abstande eine Kraft auf einander ausüben, welche von dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse denselben Bruchtheil bildet, wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* von dem *Flächenmaasse.* Denn setzt man in der Ampère'schen Formel für die Grösse der elektrodynamischen Kraft zweier Stromelemente von der Länge α und von gleicher Stromintensität, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha}{rr}ii(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

1) den Winkel ε, welchen beide Stromelemente mit einander bilden, $= 0°$ oder $= 180°$; 2) die Winkel θ und θ', welche beide Stromelemente mit der Verbindungslinie bilden, $= 90°$ oder $= 270°$; 3) den Abstand $r = 1$; so erhält man als Werth der elektrodynamischen Kraft für die *Einheit* der Stromintensität

$$\pm\,\alpha\alpha,$$

d. h. in der Ampèreschen Formel wird ein solches Maass der Stromintensität vorausgesetzt, bei welchem die *elektrodynamische Kraft in dem bezeichneten Falle* sich zu dem *Kraftmaasse* verhält, wie

$$\alpha\alpha : 1,$$

d i. wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* zum *Flächenmaass.* Diesem Grundmaasse für die Stromintensität liegt also das *elektrodynamische Princip* selbst zum Grunde.

Zum Zweck unserer Messungen haben wir dagegen dem Maasse der Stromintensität das *elektromagnetische Princip* zum Grunde gelegt, wonach als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten ist, welche in einem das Flächenmaass begrenzenden Leiter statt finden muss, um auf einen *entfernten Magnet* gleiche Wirkungen hervorzubringen, wie ein Magnet an derselben Stelle, dessen magnetisches Moment dem von Gauss in der *Intensitas* etc. festgesetzten absoluten Maasse gleich ist, und dessen Axen gleiche Richtung hat, wie die Normale der Stromebene.

Diese beiden Grundmaasse lassen sich nun nach der von Ampère gegebenen Relation zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* mit einander vergleichen. Denn nach dieser Relation kann auch der andere *entfernte Magnet* auf gleiche Weise, wie der erstere, durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden.

Nun wird das Drehungsmoment eines Magnets auf einen anderen entfernten Magnet, wenn ihre magnetischen Momente nach absolutem Maasse $= m$ und m' sind, wie sich aus den von Gauss gegebenen Vorschriften (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840. S. 26—34) leicht ergiebt,

$$= \frac{mm'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

gefunden, wo ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Axe des ersten Magnets mit der Verbindungslinie r, und δ den Winkel, welchen die Axe des zweiten Magnets mit derjenigen Richtung einschliesst, für welche das Drehungsmoment $= 0$ ist.

Setzt man nun an die Stelle des ersten Magnets einen Strom von der Intensität $\varkappa$, der die kleine Ebene λ begrenzt, deren Normale gleiche Richtung wie die Axe des Magnets hat, so ergiebt sich nach dem *elektromagnetischen* Fundamentalgesetze (wonach die Stärke der elektromagnetischen Kraft eines Stromelements von der Länge α und Intensität $\varkappa$ auf ein Element magnetischen Fluidums μ in der Entfernung r, wenn r mit α den Winkel φ einschliesst, $= \frac{\alpha\varkappa\mu}{rr} \,.\, \sin\varphi$ gegeben ist, und zwar normal auf die Ebene, welche mit α und r parallel ist) das von diesem Strome auf den entfernten Magnet ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{k\lambda \,.\, m'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)},$$

worin für die Stromintensität $\varkappa$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt. Es muss also, dieser Maassbestimmung gemäss,

$$\varkappa\lambda = m$$

sein, wenn dieses Drehungsmoment dem vorigen gleich sein soll.

Nach der von Ampère gegebenen Relation kann nun ohne Aenderung der Wirkung auf gleiche Weise *der zweite Magnet durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden*, für welchen

$$\varkappa'\lambda' = m'$$

ist, und es ergiebt sich daraus die Grösse des Drehungsmoments, welches der erste Strom auf den zweiten ausübt,

$$= \frac{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)},$$

worin für die Stromintensitäten $\varkappa$ und $\varkappa'$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt.

Berechnet man nun aber nach der Ampère'schen Formel (S. 249) das Drehungsmoment, welches ein solcher kleiner Planstrom auf einen anderen aus grosser Entfernung ausübt, so ergiebt sich dessen Werth

$$= -\frac{1}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\ ^{*}),$$

---

*) Der Fall, wo $\delta = \psi = 90^0$ ist, folglich das elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{1}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}$$

ist, entspricht dem früher betrachteten *ersten Hauptfalle*, für welchen die Stärke des Drehungsmoments S. 254

$$= -\frac{\pi\pi}{2} \frac{mmnn}{l^3} ii' \left[3\frac{aa}{ll} - 2 + \tfrac{15}{32}\left(7\frac{aa}{ll} - 4\right)\left(4 + \frac{nn}{aa}\right)\frac{aa\,mm}{l^4} + \ldots \right]$$

gefunden worden ist. Für grosse Entfernungen, wie hier vorausgesetzt worden, ver-

worin für die Stromintensitäten i und i' das oben angegebene *elektrodynamische Maass* zum Grunde liegt.

---

schwindet m und n gegen l, und r kann für a und l gesetzt werden; das Drehungsmoment wird also für diesen Fall

$$= -\frac{\pi\pi mmnn}{2}\frac{}{r^3}ii',$$

was mit dem aus obiger Formel für diesen Fall abgeleiteten Werthe identisch ist, weil πmm und πnn die Flächenräume λ und λ' bezeichnen.

Die oben angeführten *analogen* Gesetze des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, aus denen der einfache Zusammenhang dieser verschiedenen Klassen von Erscheinungen leicht übersehen werden kann, welcher unmittelbar aus den *Grundgesetzen* nicht einleuchtet, können aus letzteren auf folgende Weise abgeleitet werden.

1) *Ableitung des Gesetzes der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab auf einen andern in der Ferne ausübt.*

Aus dem *Grundgesetz des Magnetismus* hat Gauss in den «Resultaten etc. 1840» S. 26 ff. das Gesetz der magnetischen Wirkung abgeleitet, welche ein Magnetstab auf die in einem entfernten Punkte concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt. Dieses Gesetz ist folgendes: Wenn Fig. 12. A der Mittelpunkt des

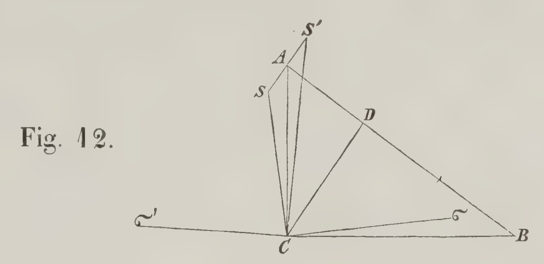


Fig. 12.

Magnetstabes ist, dessen magnetisches Moment mit m bezeichnet werde, n ein beliebiger anderer Punkt seiner durch A gelegten magnetischen Axe auf der Seite des Nordpols, C der Punkt, für welchen die magnetische Wirkung des Magnetstabes auf die daselbst concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums bestimmt werden soll, und wenn CB eine Normale gegen CA in derjenigen Ebene ist, in welcher n, A, C liegen, und B ihr Durchschnittspunkt mit der magnetischen Axe, und wenn endlich D von AB das Stück $AD = \frac{1}{3}AB$ abschneidet: so ist *die Stärke* der Kraft, welche der Magnetstab auf die in C concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt,

$$= \frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3}.$$

Die *Richtung* dieser Kraft ist, wenn nAC ein stumpfer Winkel ist, CD, wenn nAC ein spitzer Winkel ist, DC.

Nun ist im Dreieck ABC, weil $ACB = 90^0$ ist,

$$AC = AB \cos BAC = 3AD \cos DAC,$$

Ferner ist in dem Dreieck ACD

$$CD = \sqrt{(AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos DAC)} = AD.\sqrt{(1 + 3\cos DAC^2)},$$

folglich ist

$$\frac{CD}{AD} = \sqrt{(1 + 3\cos DAC^2)}.$$

Setzt man $AC = r$ und $nAC = \psi$, so ist, da $\cos DAC^2 = \cos nAC^2 = \cos\psi^2$, die *Stärke* der Kraft

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3} = \frac{m}{r^3} \cdot \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Befindet sich in einem Stahlstabe bei C die nordmagnetische Masse $+\mu$ und die südmagnetische Masse $-\mu$ durch die gegen r unendlich kleine Linie α geschieden, so ist $\alpha\mu = m'$ das magnetische Moment des Stahlstabes und $+\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ und

Es folgt nun hieraus, dass, wenn der letztere Werth, nach dem *elektrodynamischen* Maasse, mit dem ersteren, nach dem *elektromagnetischen* Maasse,

---

$-\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$ sind die beiden Kräfte, welche auf ihn in der Richtung CD oder DC wirken. Ist n' der Endpunkt der kleinen Linie α, in welchem die Masse $+\mu$ concentrirt gedacht wird, und C ihr Mittelpunkt, und bezeichnet δ den Winkel, welchen Cn mit der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft bildet, so ist $\alpha\sin\delta$ der Abstand der Angriffspunkte beider Kräfte senkrecht gegen ihre Richtung geschätzt. Das Product dieses Abstandes in den Werth obiger Kraft giebt dann das Drehungsmoment, welches der Magnetstab in A auf den Magnetstab in C ausübt,

$$=\alpha\sin\delta.\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1+\cos 3\psi^2)}=\frac{mm'}{r^3}\sin\delta\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}.$$

Der Magnet bei C wird dadurch in der Ebene ACD in demjenigen Sinne gedreht, in welchem Cn der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft genähert wird.

2) *Ableitung des Gesetzes der electromagnetischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen Magnetstab in der Ferne ausübt.*

Aus dem *elektromagnetischen Grundgesetze* kann zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stroms auf die nordmagnetische Masse $+\mu$ des Magnetstabes, welche in einem Punkte bei C Fig. 12. concentrirt gedacht wird, bestimmt werden. Man lege durch C und durch den Mittelpunkt A der vom Strome begrenzten Ebene eine auf letztere senkrechte Ebene ACB, CB sei senkrecht auf CA; s und s' seien die Durchschnittspunkte des Stromes mit dieser Ebene. Man zerlege ferner jedes Stromelement in 3 aufeinander senkrechte Elemente, das erste nach C gerichtet und das zweite senkrecht auf die Richtung CB. Die nach C gerichteten Elemente haben auf den Magnetismus in C keine Wirkung und können also ganz ausser Betracht bleiben, weil für sie in dem allgemeinen Ausdrucke der Stärke der Kraft $=\frac{\alpha k\mu}{rr}\sin\varphi$ der Werth von $\varphi=0$ ist. Zur zweiten Klasse gehören die beiden in s und s' auf der Ebene ACB perpendikularen Elemente, deren Länge mit ds bezeichnet werde. Die Kraft, welche das erstere auf den Magnetismus in C ausübt, hat dem elektromagnetischen Grundgesetze nach die Richtung $C\varsigma$ senkrecht gegen Cs; die Kraft des letzteren hat die Richtung $C\varsigma'$ senkrecht gegen Cs', und die Stärke dieser Kräfte ist, wenn $\varkappa$ die Stromintensität nach elektromagnetischem Grundmaasse bezeichnet,

$$\frac{\varkappa\mu ds}{Cs^2} \text{ und } \frac{\varkappa\mu ds}{Cs'^2}.$$

Zerlegt man nun diese Kräfte nach CA und senkrecht darauf, so erhält man

$$\text{die mit } CA \text{ parallele Componente} = \frac{\varkappa\mu ds}{Cs^2}\cos AC\varsigma + \frac{\varkappa\mu ds}{Cs'^2}\cos AC\varsigma'$$

$$\text{die auf } CA \text{ senkrechte Componente} = \frac{\varkappa\mu ds}{Cs^2}\sin AC\varsigma - \frac{\varkappa\mu ds}{Cs'^2}\sin AC\varsigma'.$$

Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Normale der Stromebene AB mit $AC=r$ bildet, durch ψ und beachtet, dass As und As' gegen r verschwinden soll, so erhält man

$$Cs = r - As\cos\psi, \qquad Cs' = r + As'\cos\psi$$

$$\text{oder } \frac{1}{Cs}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{As}{r}\cos\psi\right), \qquad \frac{1}{Cs'}=\frac{1}{r}\left(1 - \frac{As'}{r}\cos\psi\right);$$

$$\cos AC\varsigma = \sin ACs = ACs$$

$$\cos AC\varsigma' = \sin ACs' = ACs'$$

$$sCs' = \frac{(ss')}{r}\cos\psi.$$

Substituirt man diese Werthe, und bezeichnet die Entfernung ss' mit x, so erhält man die Componente nach CA

$$=\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi.x\,ds.$$

Da alle Stromelemente sehr nahe um A liegen, so kann der Factor $\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi$ als constant betrachtet werden, und man erhält also die Componente nach CA für alle Stromelemente zweiter Classe:

identisch sein soll, die oben definirten elektrodynamischen und elektromagnetischen Maasse der Stromintensitäten in solchem Verhältnisse zu einander

---

$$= \frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi . \int x\,\mathrm{d}s.$$

Das Integral $\int x\,\mathrm{d}s$ bezeichnet aber den vom Strome begrenzten Flächenraum $= \lambda$; folglich ist die Componente nach CA für alle Stromelemente *zweiter* Classe

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi.$$

Ebenso ergiebt sich die Componente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *zweiter* Classe

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sin\psi.$$

Auf ähnliche Weise findet man ferner die Componente nach CA für alle Stromelemente *dritter* Classe

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi,$$

die Componente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *dritter* Classe

$$= 0.$$

Die Resultante aller dieser Kräfte ist also

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{(4\cos\psi^2 + \sin\psi^2)} = \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Die Richtung dieser Resultante fällt in die Ebene ACB und macht mit CA einen Winkel, dessen Tangente der Componente senkrecht auf AC, $= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sin\psi$, dividirt durch die Componente nach AC, $= 2\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi$, gleich ist, d. i.

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\psi.$$

Da nun $CAB = \psi$ und $ACB = 90^0$ ist, so ist, wenn $AD = \frac{1}{3}AB$ gemacht wird,

$$\sin ACD : \sin\psi = \tfrac{1}{3}AB : CD$$
$$\cos ACD : \cos\psi = \tfrac{2}{3}AB : CD,$$

folglich

$$\operatorname{tang} ACD = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\psi,$$

woraus hervorgeht, dass CD die Richtung der Resultante ist. Hierbei ist vorausgesetzt, dass, wenn man sich senkrecht auf die Stromebene in A stehend denkt, den Kopf in B, der Strom im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne herumlaufe. Findet das entgegengesetzte statt, so ist die Richtung der Kraft CD mit DC zu vertauschen. Hiernach hat der geschlossene Strom in A auf den Magnetismus in C dieselbe Wirkung, wie nach (1) ein Magnetstab in A, dessen magnetisches Moment

$$m = \varkappa\lambda$$

ist und dessen magnetische Axe mit der Normale der Stromebene zusammenfällt, und zwar den Südpol auf derjenigen Seite der Stromebene, von welcher aus betrachtet der Strom in der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne läuft. Es folgt daraus, dass wenn man wie in (1) in C einen Magnetstab stellt, dessen magnetisches Moment $= m'$ ist, und dessen magnetische Axe mit CD den Winkel δ macht, das Drehungsmoment, welches der geschlossene Strom in A auf diesen Magnetstab übt, dem in (1) gefundenen Drehungsmomente gleich ist, wenn man darin m mit $\varkappa\lambda$ vertauscht, also

$$= \frac{\varkappa\lambda m'}{r^3}\sin\delta\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

was zu beweisen war.

3) *Ableitung des Gesetzes der elektrodynamischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen andern in der Ferne ausübt.*

Das Gesetz der Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf ein *Stromelement* in der Ferne ausübt, hat Ampère schon S. 214, 227 seiner Abhandlung aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik abgeleitet. Es lässt sich dasselbe auf folgende Weise aus-

stehen müssen, dass $\varkappa$ und $\varkappa'$ nach dem letzteren Maasse die nämlichen Stromintensitäten bezeichnen wie $i\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ nach dem ersteren. Hieraus ergiebt sich, dass alle nach dem *elektromagnetischen* Grundmaasse gemachten Bestimmungen der Stromintensitäten mit dem constanten Factor $\sqrt{2}$ zu multipliciren sind, um sie auf das der Ampère'schen Formel zum Grunde liegende *elektrodynamische* Intensitätsmaass zu reduciren.

Diess vorausgesetzt, lässt sich selbst auch noch der *constante Factor*, mit welchem alle berechneten Werthe zu multipliciren sind, um die beobachteten zu geben, aus den Galvanometer-Beobachtungen ableiten, und die Vergleichung des so bestimmten Factors mit dem oben angewendeten, nämlich mit

$$53{,}06,$$

giebt dann endlich noch den Prüfstein für die Richtigkeit der aus Ampère's Formel berechneten *absoluten* Werthe, oder für die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus gegebenen Relation.

Es wird hierzu dreierlei erfordert: 1) ist der Factor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteten Dynamometerwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das absolute Maass der *Drehungsmomente* zu reduciren; 2) ist der Factor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteteten Galvano-

---

sprechen: Befindet sich das Stromelement in C Fig. 12. und der geschlossene Planstrom in A, ist AB die Normale auf der Stromebene, CB senkrecht auf CA, und $AD = \frac{1}{3} AB$, so ist die Kraft, welche der Strom in A auf das Stromelement in C übt, auf den beiden Richtungen des Stromelements selbst und der Linie CD senkrecht, und die Stärke der Kraft ist, wenn nach dem elektrodynamischen Grundmaasse die Intensität des geschlossenen Stromes mit i, und die des Stromelements mit i' bezeichnet wird, und ferner ds' die Länge des Stromelements, $r = AC$ und $\psi = CAD$ ist,

$$= \tfrac{1}{2}\, ii'\, ds'\, \frac{\lambda}{r^3} \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Befindet sich nun auch in C ein geschlossener Planstrom und schliesst die Normale seiner Ebene mit CD den Winkel δ ein, so kann man jedes Element dieses Stromes in zwei Elemente zerlegen, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf CD normale Ebene die Stromebene schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge ds' ordnen und durch Perpendikel auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man die Länge dieses Perpendikels mit x, so ergiebt sich, dass die Wirkung des geschlossenen Stromes in A auf ein solches Paar in einem Drehungsmomente besteht, welches dem Producte von $x \sin\delta$ in obige Kraft gleich ist, d. i.

$$= \tfrac{1}{2}\, ii'\, \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\, x\, ds'$$

Der Strom in A übt also auf alle mit obiger Schneidungslinie parallelen Stromelemente das Drehungsmoment

$$= \tfrac{1}{2}\, ii'\, \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\int x\, ds'.$$

aus, wo das Integral $\int x\, ds'$ den von dem Strome in C begrenzten Flächenraum $= \lambda'$ bezeichnet; folglich ist dieses Drehungsmoment

$$= \tfrac{1}{2}\, ii'\, \frac{\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta\,.\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die Wirkung des geschlossenen Stromes in A auf die gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente, so ergiebt sich das Drehungsmoment $= 0$, woraus folgt, dass das so eben angegebene Drehungsmoment die ganze Wirkung ist, welche der geschlossene Strom in A auf den geschlossenen Strom in C ausübt, was zu beweisen war.

meterwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das *elelektromagnetische Grundmaass der Stromintensitäten* zu reduciren; 3) sind die *Flächenräume* zu bestimmen, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

1) Bestimmung des Factors zur Reduction der beobachteten Dynamometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die beobachteten Dynamometerablenkungen sind nach *Skalentheilen* gemessen und sind daher, um sie auf absolutes *Winkelmaass* zu bringen, bei der Kleinheit der Winkel, blos mit dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Skale (= 6612,6 Skalentheilen) zu dividiren. Es entspricht ferner die angegebene Zahl der Skalentheile der Differenz der positiven und negativen Ablenkung, und ist daher ausserdem noch mit 2 zu dividiren, um sie auf die einfache Ablenkung zu reduciren. Bezeichnet also x die in den obigen Tafeln angegebene *Zahl der Skalentheile*, so giebt

$$\frac{x}{13225,2}$$

die einfache *Angularablenkung* in Theilen des Halbmesser. Bezeichnet ferner S das im 6. Artikel angegebene *statische Moment* der Bifilarrolle, worauf die Ablenkungen reducirt worden sind, so braucht man, wenn x den reducirten Werth bezeichnet, die Angularablenkung $= \frac{x}{13225,2}$ nur mit jenem Werthe von S zu multipliciren, um das *elektrodynamische Drehungsmoment*, welches die Ablenkung hervorbrachte, nach den in der Statik festgesetzten Grundmaassen ausgedrückt zu erhalten. Es ist also dieses Moment

$$= \frac{x}{13225,2} \cdot S = 3634 \,.x.$$

Folglich ist 3634 der constante Factor, womit die am Schlusse von Art. 6. angegebenen Dynamometer-Ablenkungen zu multipliciren sind, um auf absolutes Maass reducirt zu werden.

2) Bestimmung des Factors zur Reduction der beobachteten Galvanometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die Galvanometerwirkungen sind oben ebenfalls in *Skalentheilen* angegeben, und zwar entspricht die angegebene Zahl y der Differenz der positiven und negativen Ablenkung. Da nun der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale beim Galvanometer 1103 Skalentheile betrug, so ergiebt sich die einfache *Angularablenkung* nach absolutem Winkelmaasse, d. h. in Theilen des Halbmessers,

$$= \frac{y}{4412}.$$

Diese Angularablenkung wurde durch eine Drahtrolle hervorgebracht, durch welche der zu bestimmende Strom ging, und die in 217 Millimeter Abstand westlich von dem kleinen Magnetometer aufgestellt war.

Multiplicirt man den Sinus dieser Angularablenkung mit der Directionskraft $= m'T$, welche der Erdmagnetismus $= T$ auf die Boussole übte, deren

magnetisches Moment $= m'$ war; so erhält man das Drehungsmoment, womit der Erdmagnetismus die abgelenkte Boussole zum magnetischen Meridian zurücktrieb,

$$= m' T . \sin \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi} .$$

Es ist hierin nach absolutem Maasse der Werth von

$$T = 1,91$$

zu setzen, wie derselbe am Platze der Boussole gefunden worden war*).

Die Boussole wurde nun in jener abgelenkten Lage im Gleichgewicht erhalten, durch dasjenige Drehungsmoment, welches der Strom in der 217 Millimeter entfernten Drahtrolle auf sie übte, und es war folglich die Stärke dieses letztern Drehungsmoments gleichfalls

$$= 1,91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi} .$$

Nach dem S. 262 in der Anmerkung unter (2) erwiesenen Gesetze würde nun, wenn der Strom hiebei aus einer *grossen* Entfernung r gewirkt hätte, dieses letztere Drehungsmoment

$$= \frac{\varkappa \lambda m'}{r^3} \sin \delta . \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

sein, worin der Werth von ψ für unseren Fall $= 0$, und δ die Ergänzung des beobachteten Ablenkungswinkels zu 90° ist, wodurch dieser Ausdruck

$$= 2 \frac{\varkappa \lambda m}{r^3} \cos \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi}$$

wird. Es ist nun aber die Entfernung von 217 Millimetern viel zu klein, um dieses Gesetz unmittelbar in Anwendung zu bringen. Ich habe daher, um diese Anwendung zu vermitteln, besondere Versuche angestellt zur Vergleichung der Wirkung der Rolle aus 217 Millimeter Entfernung mit ihrer Wirkung aus grössern Entfernungen r, für welche obiges Gesetz zulässig ist, und habe das Verhältniss dieser Wirkungen wie

$$1 : 1388 . \frac{10^4}{r^3}$$

gefunden. Das beobachtete Drehungsmoment $= 1,91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi}$ muss also mit dem Factor

$$1388 . \frac{10^4}{217^3}$$

multiplicirt werden, wenn es dem für grosse Entfernungen geltenden Ausdrucke gleich gesetzt werden soll; man erhält also

$$1388 . \frac{10^4}{217^3} . 1,91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi} = 2 \frac{\varkappa \lambda m'}{217^3} . \cos \frac{y}{4412} . \frac{180^0}{\pi} ,$$

und hieraus folgt bei kleinen Bögen der Werth

$$\varkappa \lambda = 3004 . y .$$

---

*) Die Boussole stand nahe an der Wand eines Nebenzimmers, in welchem grosse Magnete aufgestellt waren; wurden diese Magnete entfernt, so sank der Werth von T auf 1,83 herab, was ungefähr der gegenwärtige Werth des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in Leipzig ist.

Durch genaue Abmessung war aber

$$\lambda = 8313440 \text{ Quadratmillimeter}$$

gefunden worden. Hieraus ergiebt sich

$$x = 0{,}0003614 \, . \, y,$$

woraus folgt, dass

$$0{,}0003614$$

der Factor ist zur Reduction der beobachteten Galvanometerwirkungen auf das *elektromagnetische* Grundmaass der Stromintensität. Es ist dieser Factor schon oben im 6. Artikel zum Zwecke der Reduction der Beobachtungen auf gleiche Directionskraft der Bifilarrolle angeführt worden. Die Stromintensität i nach dem der Ampère'schen Formel zum Grunde liegenden *elektrodynamischen* Grundmasse erhält man endlich durch Multiplication der in Skalentheilen beobachteten Wirkungen mit dem Factor $0{,}0003614 \, . \sqrt{2}$. Es ist jedoch zu bemerken, dass dieser Reductionsfactor auf Erfahrungsdaten beruhet, welche zum Theil nur beiläufig erhalten worden und daher auf keine grosse Präcision Anspruch machen.

3) Bestimmung der Flächenräume, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

Der Flächenraum der Bifilarrolle ist schon im 6. Artikel

$$= 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

angegeben worden. Auf dieselbe Weise wie dieser war auch der Flächenraum der anderen festen Rolle des Dynamometers bestimmt worden, nämlich

$$= 31327000 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Es leuchtet ein, dass auch diese Bestimmung in Betracht der indirecten Methode, nach welcher sie gefunden worden, auf keine grosse Präcision Anspruch machen könne.

Mit Hülfe dieser drei Bestimmungen lässt sich nun endlich auch noch der *absolute* Werth der elektrodynamischen Wirkungen, wie er sich aus Ampère's Fundamentalgesetz ergiebt, der erfahrungsmässigen Prüfung unterwerfen. Aus (2) ergiebt sich nämlich der Werth von ii, welcher der *normalen* Stromintensität, auf welche die Beobachtungen reducirt sind, entspricht. Setzt man nämlich für dieselbe nach S. 246.

$$yy = 100000,$$

so ist

$$ii = 2xx = 2 \, . \, 0{,}0003614^2 \, . \, yy = 0{,}02612.$$

Ferner ersieht man leicht, dass in der S. 255 nach der Ampère'schen Formel gemachten Berechnung des elektrodynamischen Drehungsmoments, der Flächenraum der Bifilarrolle nur zu

$$\pi \, . \, 55{,}8^2 \text{ Quadratmillimetern}$$

in Anschlag gebracht worden ist, statt derselbe sich nach (3)

$$= 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat, und dass auf gleiche Weise der Flächenraum der festen Rolle des Dynamometers a. a. O. nur zu

$$\tfrac{1}{3}\pi \,.\, 44{,}4^3 \text{ Quadratmillimeter}$$

in Rechnung gebracht ist, statt derselben sich nach (3)

$$= 21327000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat. Hieraus folgt, dass die in der Tafel S. 257 aufgeführten *berechneten* Werthe mit

$$\frac{29314000 \,.\, 21327000}{\frac{1}{3}\pi\pi \,.\, 55{,}8^2 \,.\, 44{,}4^3} \,.\, \pi\pi ii = 180000$$

zu multipliciren sind, um die elektrodynamischen Drehungsmomente nach Ampère's Fundamentalgesetze in absolutem Maasse zu bestimmen. Aus (1) ersieht man aber, dass die in Skalentheilen *beobachteten* Dynamometerwirkungen in der Tafel S. 247 mit dem Factor 3634 zu multipliciren sind, um sie auf absolute Drehungsmomente zu reduciren. Dividirt man folglich mit diesem letzteren Factor den vorhergehenden, so erhält man den Factor 49,5, mit welchem die in der Tafel S. 257 aufgeführten *berechneten* Werthe zu multipliciren sind, um mit den in der Tafel S. 247 aufgeführten *beobachteten* Werthen verglichen zu werden. Dieser Factor ist etwa um 6 Procent kleiner als der oben unmittelbar aus der Vergleichung der berechneten und beobachteten Werthe abgeleitete Factor 53,06, eine Differenz, wie sie bei so vielen zur Bestimmung des Factors nothwendigen aus der Erfahrung entnommenen Elementen, unter denen mehrere nur beiläufig bestimmt worden sind (siehe [2] und [3]), erwartet werden musste. Es wird also hierdurch die Richtigkeit der aus Ampère's Formel berechneten *absoluten* Werthe oder die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus aufgestellten Relation in so weit bestätigt gefunden, als nur die gemachten Erfahrungen verbürgt werden können. Diese Prüfung der *absoluten Werthe* oder der angegebenen Relationen zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* lag ursprünglich nicht in dem Zwecke der hier mitgetheilten Versuche, welcher blos die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kraft von der gegenseitigen Lage und Entfernung der auf einander wirkenden Leitungsdrähte betraf, sonst würden Einrichtungen getroffen worden sein, um die galvanischen Ströme auch ihrer *absoluten* Intensität nach mit grösserer Präcision zu bestimmen, so wie auch die Zahl der Umwindungen der beiden Rollen des Dynamometers *direct* zu ermitteln; jene Prüfung ist aber beiläufig mit angeführt worden, weil die beschriebenen Versuche die wesentlichen Data an die Hand gaben. Weil aber nicht *alle* diese Data die hiefür wünschenswerthe Präcision besitzen, so muss eine schärfere Ausführung dieser Prüfung einer künftigen Gelegenheit vorbehalten werden. Welche Einrichtungen und Abänderungen in den Versuchen zu treffen sein würden, um den hier weniger genau bestimmten Datis eine grössere Präcision zu verschaffen, leuchtet von selbst leicht ein und bedarf keiner weiteren Erörterung.

Volta-Induction mit dem Elektro-Dynamometer.

10.

Wir haben bisher die erste Klasse elektrodynamischer Erscheinungen betrachtet, nämlich die von Ampère entdeckten, welche die Kräfte betreffen, womit die *Stromträger* bei gegebenen Stromintensitäten einander zu bewegen suchen, und haben das von Ampère für diese Klasse von Erscheinungen aufgestellte Gesetz bestätigt gefunden. Zu dieser ersten Klasse elektrodynamischer Erscheinungen ist durch Faraday's Entdeckung 10 Jahre später eine zweite Klasse noch hinzugekommen, wo die elektrodynamischen Wirkungen in Kräften bestehen, welche nicht die Stromträger, sondern die *Elektricität in den Stromträgern* zu bewegen suchen. Man kann für diese unter dem Namen der *Volta-Induction* begriffenen Erscheinungen zwei Fundamentalversuche unterscheiden, welche beide von Faraday herrühren.

Gleich im Beginne seiner «Experimental-Untersuchungen über Elektricität», Poggendorff's Annalen 1832. Bd. 25. S. 93 Art. 10, beschreibt nämlich Faraday den *ersten* Fundamentalversuch der Volta-Induction, wo zwei isolirte Kupferdrähte dicht neben einander auf einer Holzwalze aufgewunden waren, und der eine mit dem Galvanometer, der andere mit einer Volta'schen Säule in Verbindung gebracht wurde, und wo die Entstehung eines Stromes im erstern Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo die Kette, zu welcher der zweite Draht gehörte, entweder gelöst oder wieder geschlossen wurde. Der *zweite* Fundamentalversuch folgt darauf in Art. 18, wo er zwei Kupferdrähte in gleichen Zickzackbiegungen getrennt von einander auf zwei Brettern befestigt, und den einen mit dem Galvanometer, den andern mit der Volta'schen Säule in Verbindung gesetzt hat, und wo die Entstehung eines Stromes im erstern Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo das Brett mit diesem Drahte entweder aus der Ferne plötzlich genähert und auf das Brett mit dem zweiten Drahte aufgelegt, oder wo das aufliegende Brett plötzlich aufgehoben und von dem andern entfernt wurde.

Nach Faraday haben sich besonders Nobili und Lenz mit dieser Art der Induction beschäftigt und letzterer hat ein einfaches Gesetz aufgestellt, wodurch die Induction eines Stromes auf einen bewegten Leiter auf die Ampère'schen Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückgeführt wird.

«Gleich bei Durchlesung der Abhandlung Faraday's», sagt Lenz, Poggendorff's Annalen 1834. Bd. 31. S. 484 f., «schien es mir, als müssten sich sämmtliche Versuche der elektrodynamischen Vertheilung sehr einfach auf die Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückführen lassen, so dass, wenn man diese als bekannt voraussetzt, auch jene dadurch bestimmt sind, und da sich diese Ansicht bei mir durch vielfache Versuche bestätigt hat, so werde ich sie im Nachfolgenden auseinandersetzen, und theils an bekannten, theils an eigens dazu angestellten Versuchen prüfen. Der Satz, nach welchem

die Reduction der magnetoelektrischen Erscheinungen auf die elektromagnetischen geschieht, ist folgender:

«Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stroms oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein galvanischer Strom erregt, der eine solche Richtung hat, dass er in dem ruhenden Drahte eine Bewegung hervorgebracht hätte, die der hier dem Drathe gegebenen gerade entgegengesetzt wäre, vorausgesetzt, dass der ruhende Draht nur in Richtung der Bewegung und entgegengesetzt beweglich wäre.»

«Zur Bestätigung dieses Satzes, so weit er die Induction eines Stroms auf einen bewegten Leiter betrifft, führt nun Lenz folgende drei Versuche von Faraday, von sich und von Nobili an.»

«*a.* Wenn von zwei geradlinigen, einander parallelen Leitern einer von einem galvanischen Strom durchlaufen wird, und wenn man den andern Leiter jenem in paralleler Richtung nähert, so wird während der Bewegung im bewegten Leiter ein entgegengesetzter Strom von dem im unbewegten hervorgerufen; entfernt man ihn aber, so ist der erregte Strom mit dem erregenden gleichlaufend.» (Faraday.)

«*b.* Wenn von zwei verticalen kreisförmigen Leitern, die, von nahe zu gleichem Durchmesser, mit ihren Ebenen auf einander senkrecht stehen, der eine, feststehende, von einem galvanischen Strome durchflossen wird, und wenn man dann den andern, um den gemeinschaftlichen verticalen Durchmesser als Axe drehbaren, plötzlich aus der senkrechten in die parallel anliegende Lage bringt, so entsteht in ihm ein Strom, der dem im andern Leiter entgegengesetzt ist. Diesen letzten Versuch,» sagt Lenz, «habe ich mit zwei kreisförmigen Leitern angestellt, von denen jeder aus 20 Windungen besponnenen Kupferdrahts bestand; der eine ward mit einem 2 Quadratfuss grossen Zinkkupferpaar, der andere mit einem emfindlichen Nobili'schen Multiplicator in Verbindung gesetzt.»

«*c.* Bewegt sich ein begrenzter Leiter, der senkrecht auf einen vom galvanischen Strom durchflossenen unbegrenzten Leiter steht, längs diesem und in Richtung seines Stroms hin, so entsteht in ihm ein Strom, der gegen den begrenzten Leiter gerichtet ist; bewegt sich aber der begrenzte Leiter gegen die Richtung des Stroms im unbegrenzten Leiter, so ist die Richtung des in ihm durch Vertheilung erregten Stroms von dem unbegrenzten Strom abwärts. (Nobili; Poggendorff's Annalen 1833. Nr. 3. S. 407).»

Durch obigen von Lenz zuerst ausgesprochenen Satz werden die inducirten Ströme zunächst nur ihrer Richtung nach bestimmt: eine quantitative Bestimmung für die Intensität der inducirten Ströme hat Lenz nicht gegeben. Es ist diess aber von Neumann in einer noch ungedruckten Abhandlung geschehen, von welcher so eben in Poggendorff's Annalen 1846 Bd. 67. S. 31 ein Auszug erschienen ist. Die hierdurch gewonnenen quantitativen Bestimmungen bedürfen aber einer Prüfung an der Erfahrung, wozu es noch an den erforderlichen Messungen gebricht.

Eigenthümliche Versuche über die Induction von Strömen in einem ruhenden Leiter bei *Lösung* der Kette einer benachbarten Volta'schen Säule hat Henry, Poggendorff's Annalen 1842. Ergänzungsband S. 282, mitgetheilt, wobei er den inducirten Draht in verschiedene Entfernungen und Lagen gebracht hat. Auch hat er den inducirten Strom selbst wieder benutzt, um in einem dritten Leiter einen Strom zu induciren u. s. w. Er schreibt nach diesen Versuchen diesen inducirten Strömen in parallelen Drähten abwechselnd entgegengesetzte Richtungen zu; dem ersten aber dieselbe Richtung wie dem durch *Lösung* der Kette verschwindenden Strome der Volta'schen Säule.

Es soll nun in diesem Abschnitte *zuerst* gezeigt werden, wie auch die Erscheinungen der Volta-Induction sich mit dem *Elektrodynamometer* beobachten lassen, sodann sollen einige *Maassbestimmnngen* über den zweiten Faraday'schen Fundamentalversuch mitgetheilt werden.

In der Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induction muss wesentlich zweierlei unterschieden werden, nämlich *erstens* die Vorrichtung zur Stromerregung, *zweitens*, weil der erregte Strom unmittelbar nicht wahrnehmbar ist, eine Vorrichtung zur Beobachtung einer wahrnehmbaren Wirkung des erregten Stromes. Bei dem zweiten Faraday'schen Fundamentalversuche bilden z. B. die beiden zickzackförmig gebogenen Kupferdrähte, deren einer in eine galvanische Kette eingeschaltet ist, nebst der Einrichtung, wodurch beide Drähte plötzlich einander genähert oder von einander entfernt werden können, die erste Vorrichtung, zur *Erregung* des Stroms; das *Galvanometer* dagegen, welches mit dem andern Drahte in Verbindung gesetzt wird, bildet die zweite Vorrichtung, zur Beobachtung einer *sichtbaren Wirkung* des erregten Stromes. Hier sind also die beiden wesentlichen Vorrichtungen zu dem Versuche verschieden und von einander getrennt.

Eine wesentliche Vereinfachung des Versuches kann man nun aber durch das *Elektrodynamometer* erlangen, wo es möglich ist, dieselbe Vorrichtung, welche zur Erregung des Stromes dient, auch zur Beobachtung einer sichtbaren Wirkung des Stromes zu benutzen. Die Bifilarrolle des Elektrodynamometers wird nämlich in *Schwingung* gesetzt und diese Bewegung zur Induction benutzt; sodann wird die *Abnahme der Schwingungsbögen* derselben Bifilarrolle beobachtet, welche, wie sogleich gezeigt werden wird, die Folge der elektrodynamischen Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes ist. Dabei gestattet die Gesetzmässigkeit sowohl jener, die Induction vermittelnden, Schwingungen, als auch dieser, als sichtbare Wirkung des inducirten Stromes beobachteten, Abnahme der Schwingungsbögen, genaue *Maassbestimmungen* für diese Inductionserscheinungen auszuführen.

Verbindet man nämlich den Draht der *einen* Rolle des Dynamometers, während die Bifilarrolle *schwingt*, mit einer Volta'schen Säule, so braucht man, um einen Strom in der *anderen* Rolle zu *induciren*, nur ihre beiden Drahtenden mit einander zu verknüpfen. Dieser an sich zwar unwahrnehmbare in der letzteren Rolle inducirte Strom übt nun sogleich im Dynamometer selbst auf den Strom der ersteren Rolle eine *wahrnehmbare elektrodynamische Kraft* aus und ändert dadurch die Schwingung der Bifilarrolle. Beobachtet man also diese Aenderung, so lernt man daraus die elektrodynamische Kraft kennen,

welche sie verursacht, und aus der elektrodynamischen Kraft wiederum den *inducirten Strom,* dem sie proportional ist, ohne dass es dazu nöthig ist, den inducirten Strom durch den Multiplicator eines *Galvanometers* zu leiten. Das *Dynamometer* dient also hiebei selbst sowohl zur *Erregung* des Stroms, als auch zur Beobachtung einer *sichtbaren und messbaren Wirkung* des erregten Stroms.

Ruhet die Bifilarrolle, so wird kein Strom erregt, folglich ist die elektrodynamische Kraft $= 0$, und die Bifilarrolle wird dann von der festen Rolle nicht bewegt. Schwingt aber die Bifilarrolle, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist nämlich die feste Rolle mit der Volta'schen Säule verbunden und die Bifilarrolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der schwingenden Bifilarrolle erregt: oder die schwingende Bifilarrolle selbst ist durch ihre beiden Aufhängungsdrähte mit der Volta'schen Säule in Verbindung gebracht und die feste Rolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der festen Rolle erregt. In beiden Fällen ergiebt sich eine elektrodynamische Kraft, welche auf gleiche Weise die Schwingung der Bifilarrolle ändert.

Die *Beobachtung* aber dieser Schwingungsänderung, in Folge eines inducirten Stromes und der davon nach Ampère's Fundamentalgesetze abhängigen *elektrodynamischen* Wechselwirkung zwischen der inducirenden und der inducirten Drahtrolle, muss auf eine ganz *andere* Weise ausgeführt werden, wie die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Beobachtungen am Dynamometer. Es müssen an die Stelle der bisherigen *Standbeobachtungen* am Dynamometer *Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbögen* der schwingenden Bifilarrolle treten. Die Nothwendigkeit dieser veränderten Beobachtungsmethode ergiebt sich leicht wie folgt.

Die elektrodynamische Wechselwirkung beider Rollen, welche mit dem Elektrodynamometer beobachtet werden soll, besteht nach dem Ampère'schen Fundamentalgesetze in einem Drehungsmomente, welches auf die schwingende Bifilarrolle wirkt und dem ein veränderter *Ruhestand* dieser Rolle entspricht. Dieser *Ruhestand* der Bifilarrolle kann nun aber, wenn dieselbe schwingt, nicht unmittelbar beobachtet, sondern kann nur aus mehreren Beobachtungen, welche um die Schwingungsdauer von einander abstehen, bestimmt werden, und zwar nur unter der Voraussetzung, dass in der Zwischenzeit die äusseren Kräfte, welche auf die Rolle wirken, *constant* geblieben seien, oder sich stetig und *proportional* mit der *Zeit* geändert haben. Wenn also die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stromes auf die schwingende Rolle statt findet, *constant* bliebe, oder mehrere Schwingungen hindurch *proportional* mit der Zeit sich änderte, so würde dieselbe sich *durch den veränderten Ruhestand,* wie er aus einem System von Beobachtungen bestimmt wird, erkennen lassen. Wenn aber die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stromes auf die schwingende Rolle statt findet, *von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt,* so wird der Ruhestand der Rolle, wie er aus einem System von Beobachtungen während der Schwingung bestimmt wird, sich trotz der vorhandenen elektrodynamischen Einwirkung dennoch *unverändert* finden. Die Beobachtung zeigt in der That, dass das letztere statt findet, dass also die elektrodynamische Einwirkung, wenn eine solche in Folge eines inducirten

Stromes wirklich existirt, sich von Schwingung zu Schwingung umkehren müsse und durch blosse *Standbeobachtungen* am Dynamometer nicht erforscht werden könne.

Findet nun wirklich eine solche elektrodynamische Einwirkung auf die schwingende Rolle statt, welche von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt: so wird diese zwar durch Bestimmung des Ruhestandes der Rolle nicht erkennbar sein, sie muss sich aber an den *Schwingungsbögen* der Rolle zu erkennen geben; es muss nämlich die Grösse des Schwingungsbogens von Schwingung zu Schwingung sich *ändern,* entweder immer wachsen, oder immer abnehmen.

Wirklich zeigt die Erfahrung, dass, während der berechnete Ruhestand der schwingenden Rolle immer der nämliche bleibt, der Schwingungsbogen immer *abnimmt* und es geht aus den nachfolgenden Versuchen hervor, dass diese Abnahme wirklich von *elektrodynamischen* Einwirkungen und nicht von fremdartigen äusseren Ursachen herrührt, wenn man den gewöhnlichen Einfluss des Widerstands der Luft in Abrechnung bringt.

Um also diese zweite Klasse von Erscheinungen mit dem Elektrodynamometer zu beobachten, wird es hiernach nöthig, zur genauen Messung der Abnahme der Schwingungsbögen, *Schwingungsversuche* mit der Bifilarrolle des Dynamometers zu machen, während wir zum Zweck der Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen auf *Ablenkungsversuche* oder *Standbeobachtungen* uns beschränken konnten.

Für unseren Zweck ist es zunächst von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass sich die *Schwingungsbeobachtungen* am Dynamometer nach derselben Methode und mit einer eben so grossen Präcision, wie an einem Magnetometer, ausführen lassen. Ich will daher zunächst eine Reihe von Schwingungsversuchen, welche ich mit dem Dynamometer gemacht habe, vorausschicken, wobei *keine* elektrodynamische Einwirkung statt fand, indem gar kein galvanischer Strom durch das Instrument geleitet wurde und die Drahtenden sogar unverbunden blieben.

Die Methode, wie diese Versuche angestellt wurden, ist die nämliche, wie sie Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837», S. 58 ff., angegeben hat, und es ist darnach nicht nöthig, die ursprünglichen Protocolle selbst vollständig mitzutheilen, sondern es genügt die Mittheilung des Extracts, welcher aus diesen Protocollen eben so, wie a. a. O. abgeleitet ist.

Zu den folgenden Beobachtungen diente das Fig. 2., 3. und 4. abgebildete Dynamometer von Meyerstein, wo die schwingende Rolle im Mittelpunkte der festen Rolle aufgehängt und das Fernrohr etwa 6 Meter von dem Instrumente aufgestellt war. Der Abstand des Spiegels von der Skale betrug 6018,6 Skalentheile und es war der Werth von

1 Skalentheil = 17″1356.

Die Beobachtungen wurden abwechselnd von verschiedenen Beobachtern angestellt, nämlich von Herrn Dr. Stähelin aus Basel, von meinem Assistenten, Herrn Dietzel und von mir. Jeder machte einen Satz von Beobachtungen nach der a. a. O. S. 61 gegebenen Vorschrift, welcher 6 Zeiten der Vorübergänge eines bestimmten, nahe der Mitte des Schwingungsbogens liegenden

Skalenpunktes und 7 Elongationspunkte enthielt. In der folgenden Tafel giebt jede horizontale Zeile die Resultate eines solchen Satzes von Beobachtungen, nämlich die Bezifferung der Schwingung, die entsprechende Zeit, den entsprechenden Ruhestand in Skalentheilen, den entsprechenden Schwingungsbogen in Skalentheilen und den Logarithmus des letzteren

Beobachtungen zur Bestimmung der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers bei offener Kette.

Schwingung. Nr.	Zeit.	Stand.	Schwingungsbogen.	Log.
0.	5h 16′ 28″,53	457,10	650,80	2,813448
14.	20 10,20	457,38	601,43	2,779185
25.	23 4,39	457,15	564,90	2,751972
52.	30 12.50	457,19	485,28	2,685992
82.	38 8,02	457,29	409,62	2,612381
109.	45 16,16	457,15	353,08	2,547873
134.	51 52,08	457,65	306,70	2,486714
163.	59 31,80	457,41	261,08	2,416774
189.	6 6 23,90	457,56	226,33	2,354742
212.	12 28,22	457,69	198,68	2,298154
232.	17 45,45	457,63	178,26	2,251054
254.	23 33,89	457,78	157,98	2,198602
284.	31 29,30	457,73	134,17	2,127655
309.	38 5,53	456,55	116,30	2,065580
328.	43 6,90	458,02	105,25	2,022222
369.	53 56,24	457,81	83,68	1,922622
387.	58 41,96	457,90	75,45	1,877659

Dividirt man den Unterschied der ersten und letzten Zeit mit der Zahl der Schwingungen, so erhält man eine ziemlich genaue Bestimmung der Schwingungsdauer der schwingenden Rolle, weil die zur Reduction auf unendlich kleine Bögen anzubringende Correction bei so kleinen Schwingungsbögen, wie hier statt fanden, nur wenig beträgt. Diese genäherte Schwingungsdauer ist

$$= 15'',84865.$$

Reducirt man mit dieser genäherten Schwingungsdauer alle Zeiten in der Tafel, durch Abrechnung des Products der Zahl der Schwingung in die Schwingungsdauer, auf die erste Zeit, so erhält man die in der dritten Columne der folgenden Tafel enthaltenen Werthe:

Schwingung. Nr.	Zeit.	Reducirte Zeit.	Unterschied vom Mittel.
0.	5h 16′ 28″,52	5h 16′ 28″,53	+ 0″,13
14	20 10 ,20	28 ,32	— 0 ,08
25.	23 4 ,39	28 ,17	— 0 ,23
52.	30 12 ,50	28 ,37	— 0 ,03
82.	38 8 ,02	28 ,43	+ 0 ,03
109.	45 16 ,16	28 ,66	+ 0 ,26
134.	51 52 ,08	28 ,36	— 0 ,04
163.	59 31 ,80	28 ,47	+ 0 ,07
189.	6 6 23 ,90	28 ,50	+ 0 ,10
212.	12 28 ,22	28 ,31	— 0 ,09
232.	17 45 ,45	28 ,56	+ 0 ,16
254.	23 33 ,89	28 ,33	— 0 ,07
284.	31 29 ,30	28 ,28	— 0 ,12
309.	38 5 ,53	28 ,30	— 0 ,10
328.	43 6 ,90	28 ,54	+ 0 ,14
369.	53 56 ,24	28 ,07	— 0 ,33
387.	58 41 ,96	28 ,53	+ 0 ,13

Aus der Uebereinstimmung dieser reducirten Werthe, deren Unterschiede vom Mittelwerthe stets unter $\frac{1}{3}$ Secunde bleiben, geht von selbst hervor, dass die Bestimmung der *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle des Dynamometers gleicher Schärfe und Genauigkeit fähig ist, wie beim Magnetometer, wobei noch zu beachten ist, dass jene Unterschiede durch die constante Differenz, welche bekanntlich immer zwischen zwei Beobachtern statt findet, vergrössert erscheint. Auch die Bestimmungen des *Ruhestandes* der schwingenden Rolle aus den Ebongationsbeobachtungen in der 3ten Columne der ersten Tafel zeigen eine grosse Uebereinstimmung, wie die folgende Uebersicht ihrer Abweichungen vom Mittelwerthe, nach ihrem Bogenwerthe ausgedrückt, beweist:

— 6″,3	+ 3,1	+ 4,5
— 1,5	— 1,0	— 15,8
— 5,5	+ 1,5	+ 9,4
— 4,8	+ 3,8	+ 5,8
— 3,1	+ 2,7	+ 7,4
— 5,5	+ 5,3	

Diese Uebereinstimmung aller Standbeobachtungen kann nicht grösser gewünscht werden, zumal wenn man beachtet, dass das Fernrohrstatif auf dem hölzernen Fussboden des Zimmers aufgestellt war, wo bekanntlich die Richtung des Fernrohrs durch das Auftreten auf den Boden leicht etwas geändert wird. Man erkennt auch leicht, dass der Stand in der letzteren Hälfte der Beobachtungen etwas grösser, als in der erstern, gewesen sei. —

Es bleibt uns endlich die *Abnahme der Schwingungsbögen* zu betrachten übrig. Die einzelnen Sätze der Beobachtungen folgen zum Theil in so kurzer Zeit auf einander, dass die Abnahme der Schwingungsbögen in der Zwischenzeit nicht gross genug ist, um eine genaue Bestimmung des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen zu geben. Es möge daher der Logarithmus dieses Verhältnisses bestimmt werden, indem statt der Differenz je zweier unmittelbar auf einander folgender Logarithmen der Schwingungsbögen die Differenz des 1sten und 5ten, des 2ten und 6ten u. s. w. mit der Zahl der dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält alsdann aus obigen 17 Beobachtungssätzen statt 16 nur 13, aber genauere Werthe des *logarithmischen Decrements,* nämlich folgende. Vor jedem Werthe ist die Schwingungszahl bemerkt, zu welcher er im Mittel gehört.

Schwingung. Nr.	Logarithmisches Decrement.	Unterschied vom Mittel.
41.	0,002452	+ 0,000038
$61\frac{1}{2}$.	0,002435	+ 0,000021
$79\frac{1}{2}$.	0,002433	+ 0,000019
$107\frac{1}{2}$.	0,002425	+ 0,000011
$135\frac{1}{2}$.	0,002408	— 0,000006
$160\frac{1}{2}$.	0,002424	+ 0,000010
183.	0,002405	— 0,000009
$208\frac{1}{2}$.	0,002397	— 0,000017
$236\frac{1}{2}$.	0,002390	— 0,000024
$260\frac{1}{2}$.	0,002398	— 0,000016
280.	0,002384	— 0,000030
$311\frac{1}{2}$.	0,002400	— 0,000014
$335\frac{1}{2}$.	0,002427	+ 0,000013

Mittel = 0,002414.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen,* wonach die Grösse des Bogens nach $124\frac{7}{10}$ Schwingungen, oder nach 32 Minuten $56\frac{1}{3}$ Secunde auf die Hälfte herabsinkt. Die Uebereinstimmung der partiellen Werthe beweist, dass man auch diese kleine Abnahme der Schwingungsbögen mit Schärfe messen könne.

An dem nämlichen Tage, unmittelbar vor der eben beschriebenen Beobachtungsreihe, war eine andere ähnliche Beobachtungsreihe unter ganz gleichen äusseren Verhältnissen gemacht worden, blos mit dem Unterschiede, dass die beiden Enden der festen Rolle mit einer Säule von 3 kleinen Grove'schen Bechern, den nämlichen wie im 4. Artikel, in Verbindung gesetzt, und dass die freien Enden der Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle unter sich verknüpft worden waren. Zur näheren Kenntniss des Stroms, welcher durch die feste Rolle geleitet wurde, diente die Beobachtung der Ablenkung, welche diese Rolle selbst auf das 583,5 Millimeter nördlich von ihr aufgestellte, Art. 3. beschriebene *Spiegelmagnetometer* hervorbrachte. Diese beobachtete Ablenkung des

Spiegelmagnetometers ist in der letzten Columne der folgenden Tafel bemerkt worden. Der Werth der Skalentheile dieses Magnetometers hängt von dem horizontalen Abstande des Spiegels von der Skale ab, welcher = 1301 Skalentheile war. Die Beobachter und die Methode der Beobachtung waren die nämlichen. Die folgende Tafel giebt den Extract von dieser Beobachtungsreihe gerade so, wie die vorige Tafel von der andern.

Beobachtungen zur Bestimmungen der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers beim Durchgange des Stroms von 3 Grove'schen Bechern durch die feste Rolle, während der Leitungsdraht der Bifilarrolle geschlossen war.

Schwingung. Nr.	Zeit.	Stand.	Schwingungsbogen.	Log.	Ablenkung des Spiegelmagnetometers.
0.	$3^h 29' 44''$,88	464,05	764,10	2,883150	108,50
9.	32 7 , 03	464,44	679,15	2,831966	
18.	34 29 , 58	464,23	604,05	2,781073	
35.	38 50 , 17	464,07	484,15	2,684980	108,60
47.	42 9 , 10	464,20	414,60	2,617629	
57.	44 47 , 66	464,25	365,50	2,562887	
74.	49 16 , 79	464,22	292,27	2,465784	109,10
85.	52 10 , 80	464,30	253,30	2,403635	
103.	56 56 , 11	464,40	200,80	2,302764	
118.	4 0 53 , 43	464,25	165,56	2,218955	108,95
130.	4 3 , 26	464,37	141,37	2,150357	
143.	7 28 , 90	465,23	119,33	2,076750	
157.	11 11 , 11	464,96	100,49	2,002123	109,20
179.	16 59 , 23	465,20	75,59	1,878464	
196.	21 28 , 65	464,88	60,58	1,782329	190,40
210.	25 10 , 23	464,96	50,08	1,699664	

Ich beschränke mich bei dieser, der vorigen im Uebrigen sehr ähnlichen Beobachtungsreihe auf die Betrachtung der Abnahme der Schwingungsbögen. Der Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen, oder das logarithmische Decrement, soll hier bestimmt werden, indem die Differenz des 1sten und 4ten, des 2ten und 5ten u. s. w. Logarithmus mit der Zahl der dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält dann aus obigen 16 Beobachtungssätzen 13 Werthe des logarithmischen Decrements, wie sie die folgende Tafel mit Beifügung der Schwingungszahl, zu welcher jeder im Mittel gehört, enthält.

Schwingung. Nr.	Logarithmisches Decrement.	Unterschied vom Mittel.
17½.	0,005662	+ 0,000042
28.	0,005640	+ 0,000020
37½.	0,005595	— 0,000025
54½.	0,005620	0,000000
66.	0,005631	+ 0,000011
80.	0,005655	+ 0,000035
96.	0,005610	— 0,000010
107½.	0,005628	+ 0,000008
123.	0,005650	+ 0,000030
137½.	0,005560	— 0,009060
154½.	0,005549	— 0,000071
169½.	0,005555	— 0,000065
183½.	0,005707	+ 0,000087

Mittel = 0,005620.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen*, wonach die Grösse des Bogens nach 53,564 Schwingungen, oder nach 14 Minuten 8,187 Secunden auf die Hälfte herabsinkt. Auch hier zeugt die Uebereinstimmung der partiellen Werthe für die Schärfe der Messung, und es kann dabei nicht auffallen, dass zuletzt, wo die Schwingungsbögen sehr klein geworden waren, die Differenzen etwas grösser erscheinen.

Der Unterschied, welcher zwischen dieser letzteren Bestimmung des logarithmischen Decrements und der vorhergehenden statt findet, hat seinen Grund nicht in der Verschiedenheit äusserer Verhältnisse, welche auf die schwingende Rolle einwirkten, weil diese vollkommen die nämlichen blieben, sondern in dem *inducirenden* Einflusse der festen Rolle auf die schwingende Rolle, welcher den einzigen Unterschied zwischen der ersten und zweiten Versuchsreihe bildete. Beide Versuchsreihen sind an mehreren Tagen wiederholt worden, und haben nicht allein fast genau denselben Unterschied im Werthe der logarithmischen Decremente, sondern auch nahe gleiche absolute Werthe für beide Decremente gegeben, wodurch kein Zweifel daran bleibt, dass hierbei wirklich eine Induction galvanischer Ströme in der geschlossenen Bifilarrolle durch den galvanischen Strom in der festen Rolle statt findet, und zwar von solcher Stärke, dass die in der Abnahme der Schwingungsbögen sichtbare Wirkung der inducirten Ströme einer genauen Maassbestimmung fähig ist.

11.

Nach dieser Nachweisung der *praktischen* Brauchbarkeit des Elektrodynamometers zur Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induction, gehen wir *zweitens* dazu über, einige *gesetzliche Bestimmungen* für diese Erscheinungen aus den Beobachtungen der Schwingungen und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle abzuleiten.

Erstens ist schon bemerkt worden, dass die in Folge der inducirten Ströme *sich ändernde Grösse* der Schwingungsbögen, bei unverändertem mittleren Stande der Bifilarrolle, beweist, dass die Richtung des inducirten Stroms mit der *Richtung der Bewegung* der schwingenden Bifilarrolle wechselt, dass folglich durch entgegengesetzte Bewegungen entgegengesetzte Ströme inducirt werden, wie dies auch bei der Magneto-Induction der Fall ist.

Zweitens, die *Abnahme* der Schwingungsbögen beweist, dass bei *Annäherung* paralleler Elemente der inducirenden Drähte ein dem inducirenden Strome *entgegengesetzter,* bei *Entfernung* paralleler Elemente ein dem inducirenden *gleich gerichteter* Strom inducirt werde. Wenn das entgegengesetzte Verhältniss der Stromrichtungen der inducirenden und inducirten Ströme statt fände, müsste nämlich eine fortwährende *Zunahme* der Schwingungsbögen sich ergeben. Auch diese Bestimmung ist mit dem analog, was für die Magneto-Induction erfahrungsmässig begründet ist.

Drittens das *geometrische Gesetz* der Abnahme der Schwingungsbögen in Folge der inducirten Ströme beweist, dass die Intensität des inducirten Stroms der *Geschwindigkeit* der inducirenden Bewegung proportional ist; denn das geometrische Gesetz für die Abnahme der Schwingungsbögen beweist, dass die Kraft, welche diese Abnahme hervorbringt, d. h. die Intensität der inducirten Ströme, der Grösse der Schwingungsbögen immer proportional bleibt: es ist aber bekannt, dass die Grösse der Schwingungsbögen eines *isochron* schwingenden Körpers der ihm in entsprechenden Augenblicken seiner Schwingungsdauer zukommenden Geschwindigkeit immer proportional ist.

Viertens, was die gesetzliche Bestimmung der *absoluten* Stärke der Volta-Induction betrifft, so wollen wir endlich noch folgenden Satz aus Beobachtungen am Dynamometer ableiten.

> Die *Volta-Induction* ist der *Magneto-Induction* in der in sich geschlossenen schwingenden Bifilarrolle gleich, wenn jene von einem durch die feste Rolle geleiteten galvanischen Strome, diese durch Magnete hervorgebracht wird, welche in einer solchen Lage gegen die Bifilarrolle sich befinden, bei welcher, wenn durch die Bifilarrolle ein Strom geht, das *elektrodynamische* Drehungsmoment jenes Stroms dem *elektromagnetischen* Drehungsmomente dieser Magnete gleich ist.

Durch diesen Satz wird, wie man leicht sieht, die Bestimmung der Volta-Induction mit Hülfe bekannter *elektromagnetischer* und *elektrodynamischer* Kräfte auf die Gesetze der Magneto-Induction zurückgeführt, die auf andern Wegen schon genauer erforscht worden sind. Zum Beweis dieses Satzes kann ich vor der

Hand zwar nur einige mit dem Dynamometer ausgeführte Messungen geben, die unter Umständen gemacht wurden, unter welchen keine auf feine Bruchtheile genauen Bestimmungen möglich waren; es dürften jedoch diese Messungen einstweilen als genügend angesehen werden, weil, wenn obiger Satz unrichtig wäre, gar kein Grund zu derjenigen approximativen Uebereinstimmung vorläge, die sich aus den Beobachtungen ohne Zweifel ergiebt. Zu einer feineren Prüfung obigen Satzes müssten alle dabei concurrirenden Messungen mit gleicher Genauigkeit ausgeführt werden. Um aber alle Verhältnisse zur Erreichung dieser gleichmässigen Genauigkeit ganz zweckmässig einzurichten, würde es nöthig sein, besondere Instrumente blos für diesen Zweck darzustellen, was mir bisher nicht möglich war.

Ich werde die Beobahtungsresultate hier kurz zusammen stellen, ohne in das Detail der Beobachtungen selbst einzugehen, das im Wesentlichen mit dem der vorhergehenden Beobachtungen übereinstimmt.

Die *erste* Versuchsreihe bezog sich auf Messung der Magneto-Induction. Gerade diese Reihe ist es, für welche die Verhältnisse am wenigsten günstig sich gestalten liessen, und die daher der Genauigkeit der ganzen Maassbestimmung engere Schranken setzte, die unter etwas günstigeren Verhältnissen leicht bedeutend hätten erweitert werden können. Die Bifilarrolle des Art. 1. beschriebenen, Fig. 2., 3. und 4. abgebildeten Dynamometers wurde nämlich in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während ausserhalb des Kastens, welcher die schwingende Bifilarrolle vor der Luft schützte, mehrere kleine Magnete NS, $N'S'$ Fig. 4. in derjenigen Lage fest aufgestellt wurden,

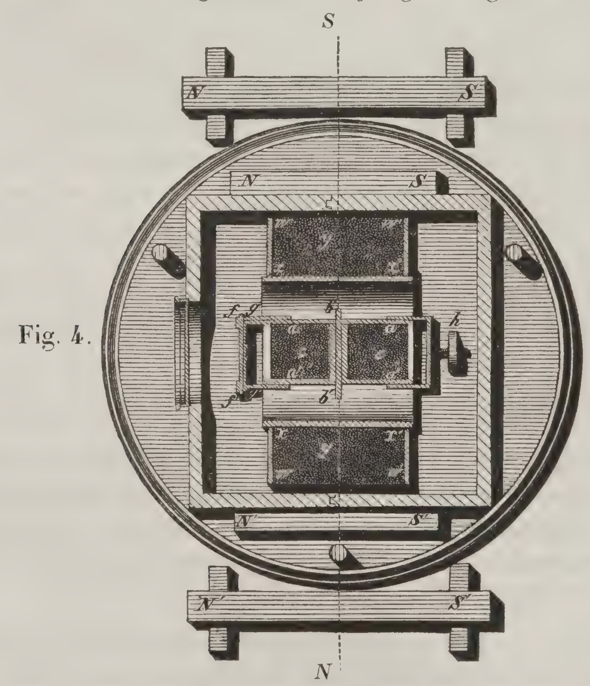


Fig. 4.

in welcher sie in der schwingenden Bifilarrolle die stärksten *magnetoelektrischen* Ströme inducirten. Diese kleinen Magnete lagen nämlich sämmtlich senkrecht

gegen den durch die Axe der Bifilarrolle gehenden magnetischen Meridian, und zwar nördlich und südlich von der Bifilarrolle symmetrisch und ihre gleichnamigen Pole waren dabei nach gleicher Seite gekehrt, wie die Figur es zeigt, worin N und N' Nordpole, S und S' Südpole bedeuten. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle, wie früher, von dem Augenblicke an, wo sie durch die Skale gemessen werden konnten, so lange beobachtet, bis sie zu genauen Bestimmungen der Abnahme der Schwingungsbögen zu klein wurden. Diese Beobachtungen wurden auf dieselbe Weise, wie oben, berechnet und ergaben das *logarithmische Decrement* für die Abnahme der Schwingungsbögen

$$= 0{,}002638.$$

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann für das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen folgender etwas kleinere Werth:

$$= 0{,}002541.$$

Der geringe Unterschied dieser beiden Werthe,

$$= 0{,}000097,$$

ist die Wirkung der *magnetoelektrischen* Ströme, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch die festliegenden Magnete inducirt wurden. Es ist die grösste Sorgfalt darauf gewendet worden, diesen kleinen Unterschied mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, und die Versuche liessen dabei nichts zu wünschen übrig, dennoch liegt es in der Kleinheit des Unterschieds, dass derselbe, wie die Wiederholungen der Versuche zeigten, etwa auf 6 bis 8 Procente als unsicher betrachtet werden muss.

Die *zweite* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektromagnetische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete blieben unverrückt an ihrer Stelle, während durch die Bifilarrolle ein schwacher Strom von einer Volta'schen constanten Säule geleitet wurde; der Strom dieser Säule ging ausserdem durch ein *Galvanometer*, durch welches seine Intensität gemessen wurde. Nun wurde der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd, wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduction der Resultate auf gleiche Stromintensität (die nur wenig variirt hatte) mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied,

$$= 19{,}1 \text{ Skalentheilen.}$$

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektromagnetischen* Drehungsmoments, welches die oben erwähnten Magnetstäbe auf den Strom in der Bifilarrolle ausübten.

Die *dritte* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektrodynamische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete wurden entfernt und dagegen die beiden Drahtenden der festen Rolle des Dynamometers mit einer starken Volta'schen Säule verbunden, während durch die Bifilarrolle der nämliche schwache Strom von einer Volta'schen constanten Säule geleitet wurde, wie in der vorigen

Reihe. Die Intensität beider Ströme wurde durch ein *Galvanometer* gemessen*). Nun wurde, wie in der vorigen Versuchsreihe, der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduction auf gleiche Stromintensität mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied

$$= 101{,}9 \text{ Skalentheilen.}$$

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektrodynamischen* Drehungsmoments, welches der starke Strom in der festen Rolle auf den schwachen Strom in der Bifilarrolle ausübte.

Die *vierte* Versuchsreihe bezog sich endlich auf die *Volta-Induction*. Die Bifilarrolle wurde in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während durch die feste Rolle des Dynamometers der Strom derselben Volta'schen Säule geleitet wurde, wie in der vorhergehenden Versuchsreihe. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle eben so beobachtet, wie in der ersten Versuchsreihe und daraus das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen berechnet. Dieses Decrement ergab sich, nach Reduction auf diejenige Stromintensität in der festen Rolle, auf welche sich der durch die vorhergehende Versuchsreihe gefundene Werth des *elektrodynamischen* Drehungsmoments bezieht,

$$= 0{,}005423.$$

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann für das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen folgender kleinere Werth:

$$0{,}002796\ ^{**}).$$

Der Unterschied dieser beiden Werthe,

$$= 0{,}002627,$$

ist die Wirkung *der Volta-Induction*, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch den Strom in der festen Rolle statt fand.

Da also die *elektrodynamische* Kraft unseres Stroms in der festen Rolle, nach der *dritten* Versuchsreihe, der *elektromagnetischen* Kraft unserer Magnete in der *zweiten* Versuchsreihe nicht gleich war, sondern sich wie

$$101{,}9 : 19{,}1$$

verhielt, so sollten auch die von beiden unter ganz gleichen Verhältnissen in der Bifilarrolle *inducirten Ströme* nicht gleich sein, sondern sich ebenfalls wie

$$101{,}9 : 19{,}1$$

*) Beide Ströme stammten von derselben constanten Säule her und die verschiedene Intensität derselben in den beiden Rollen war durch eine Theilung des Stroms bewirkt worden.

**) Dieser Werth ergab sich noch kleiner, wenn man zugleich den Strom in der festen Rolle unterbrach, weil dieser Strom auch bei geöffneter Bifilarrolle noch in der messingenen Fassung der letzteren während der Schwingung Ströme inducirte, gerade so, wie dies auch in der ersten Versuchsreihe mit den Magneten der Fall gewesen war, die aber weit schwächer wirkten.

verhalten. Wenn aber die Intensitäten der in der schwingenden Bifilarrolle inducirten Ströme in dem angegebenen Verhältnisse stehen, so wird aus der Wechselwirkung dieser Ströme mit jenen sie erzeugenden und deshalb ihnen selbst proportionalen galvanischen und magnetischen Kräften eine Dämpfung der Schwingungen der Bifilarrolle hervorgehen müssen, deren *logarithmische Decremente* sich wie die Quadrate von 101,9 : 19,1 verhalten, d. h. wie

28,5 : 1.

Statt dessen haben wir aus den Beobachtungen der Abnahme der Schwingungsbögen in beiden Fällen das Verhältniss der von den inducirten Strömen herrührenden Antheile der logarithmischen Decremente nach der *vierten* und *ersten* Versuchsreihe wie

$$0{,}002627 : 0{,}000097 = 27{,}1 : 1$$

gefunden, welches Verhältniss von den berechneten etwa um 5 Procent verschieden ist, die sich in dem beobachteten von den *magnetoelektrischen* Strömen herrührenden kleinen logarithmischen Decremente, wie schon oben S. 281 erwähnt ist, nicht mehr verbürgen lassen.

12.

Ein inducirter Strom von gleicher Stärke wie der inducirende.

Aus der *Constanz* des logarithmischen Decrements der schwingenden Bifilarrolle, unter dem Einflusse eines constanten Stromes in der festen Rolle, und der dadurch inducirten Ströme in der schwingenden Bifilarrolle, ergab sich schon S. 279 für die Induction das Gesetz, dass die Intensität des inducirten Stromes in jedem Augenblicke der *Geschwindigkeit* der schwingenden Rolle in diesem Augenblicke proportional ist. Ist nun dieses Gesetz hierdurch ausser Zweifel gesetzt, so folgt daraus, dass man bei einem gegebenen *constanten* inducirenden Strome den von ihm *inducirten* Strom beliebig verstärken könne, wenn man jene *Geschwindigkeit* vergrössere, und dass es eine Geschwindigkeit geben müsse, bei welcher *die Intensität des inducirten Stromes eben so stark sei, wie die des inducirenden Stromes.* Es dürfte nicht uninteressant sein, eine nähere *Bestimmung* von dieser Geschwindigkeit zu geben. Diese Bestimmung kann leicht erhalten werden, wenn man 1) aus dem gemessenen Schwingungsbogen unserer Rolle und aus ihrer ebenfalls gemessenen Schwingungsdauer nach bekannten Gesetzen die *Geschwindigkeit* berechnet, welche die Rolle in der Mitte ihrer Schwingung besass; 2) wenn man aus dem ebenfalls gemessenen Werthe des logarithmischen Decrements, welches durch die Voltasche Induction hervorgebracht worden war, die *Ablenkung* der Rolle berechnet, welche die Kraft, welche die Geschwindigkeit der schwingenden Bifilarrolle in dem Augenblicke verlangsamt, wo sie in der Mitte ihrer Schwingung sich befindet, wenn sie gleichförmig in gleicher Richtung fortwirkte, hervorbringen würde; und 3) endlich, wenn man durch die Bifilarrolle einen Strom gehen lässt und die Intensität dieses Stromes so lange ändert, bis die

elektrodynamische Ablenkung der Rolle in Folge der Wechselwirkung dieses Stromes und des constanten Stromes in der festen Rolle jener Ablenkung gleich ist, und wenn man alsdann das *Verhältniss* der Intensitäten beider Ströme bestimmt. — Es leuchtet dann ein, dass, wenn man die Geschwindigkeit der schwingenden Rolle nach dem Verhältniss dieser Intensitäten vergrösserte, der inducirte Strom in dem Augenblicke, wo die Rolle in der Mitte ihres Schwingungsbogens sich befindet, dem inducirenden Strom an Stärke gleich sein würde. Auf diesem Wege hat sich ergeben, dass die Bifilarrolle des Art. 1. beschriebenen Dynamometers um ihre senkrechte Drehungsaxe in einer Sekunde

31 Mal

herumgedreht werden müsste, damit der darin von dem beliebig starken oder schwachen Strome der festen Rolle dieses Instrumentes *inducirte* Strom in dem Augenblicke, wo beide Rollen auf einander senkrecht stehen, die *Intensität des ursprünglichen Stromes* hätte. Bei dieser Drehungsgeschwindigkeit der Rolle, würde die grösste lineare Geschwindigkeit der Stromelemente, da nach S. 219 der Halbmesser der Bifilarrolle 33,4 Millimeter beträgt, $6\frac{1}{2}$ Meter oder etwa 20 Fuss in eine Sekunde betragen.

13.

Bestimmung der Dauer momentaner Ströme mit dem Dynamometer nebst Anwendung auf physiologische Versuche.

Um mit Hülfe des Dynamometers die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte darzustellen und zu messen, bedarf es, wie die angeführten Thatsachen beweisen, keiner starken Ströme, sondern es reichen dazu schwache Ströme hin, welche mit anderen Hülfsmitteln kaum wahrnehmbar sind, wie z. B. die inducirten Ströme, welche durch die ohne optische Hülfsmittel kaum sichtbaren Schwingungen der Bifilarrolle, nach Art. 10. erregt wurden. Dieser Umstand ist von praktischer Wichtigkeit, weil diese Versuche dadurch eine viel grössere Ausdehnung erhalten und der Weg zu den mannichfaltigsten Anwendungen des Dynamometers insbesondere auch zu *galvanometrischen* Bestimmungen gebahnt wird. Man nennt eine Boussole, oder ein Magnetometer, wenn sie mit einem Multiplicator versehen ist, ein *Galvanometer*, weil sie dazu dient, die Intensität der galvanischen Ströme, welche durch den Multiplicatordraht geführt werden, zu messen. Die Messung der Intensität galvanischer Ströme wird hierbei *nicht auf rein galvanische*, sondern auf *elektromagnetische* Wirkungen begründet. Mit gleichem Rechte verdient auch ein *Voltameter* den Namen eines *Galvanometers*, weil es ebenfalls zur Messung der Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch das Voltameter geleitet werden; nur ist letzteres ein *elektrochemisches* Galvanometer, ersteres ein *elektromagnetisches*. Das *Elektrodynamometer* ist nun auch ein *Galvanometer*, weil es zur Messung der

Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch dasselbe geleitet werden, es ist aber ein *rein galvanisches* oder *elektrodynamisches,* weil es die Wechselwirkung der galvanischen Ströme selbst ist, welche dabei zur Messung der Stromintensität benutzt wird, und es verdient darum sogar vorzugsweise den Namen eines *Galvanometers.*

Dennoch scheint dem *Elektrodynamometer,* wenn es sich nicht mehr um Prüfung der elektrodynamischen Grundgesetze, sondern blos um *galvanometrische* Bestimmungen handelt, keine grosse praktische Wichtigkeit zugeschrieben werden zu können, weil die mannichfaltigen Einrichtungen der Voltameter und der elektromagnetischen Galvanometer bei den Intensitätsmessungen galvanischer Ströme schon so gute und bequeme Dienste leisten, dass kein Grund vorliegt, diese schon in Gebrauch befindlichen Instrumente durch neue zu ersetzen. So lange es sich blos um Zwecke handelt, welche mit den letzteren Instrumenten entweder schon erreicht worden sind, oder damit erreicht werden können, kann einem neuen Instrumente, wie dem Dynamometer in der That keine grosse praktische Wichtigkeit beigelegt werden. Anders verhält es sich aber in denjenigen Fällen, wo die bisherigen Hülfsmittel unzureichend sind, wie z. B. wenn es sich um Bestimmung der Stromintensitäten *für einzelne Augenblicke* handelt.

Es giebt nämlich der Sinus oder die Tangente der Ablenkung der Magnetnadel in der Sinus- oder Tangentenboussole nur dann ein richtiges Maass der Stromintensität im Multiplicator *für einen bestimmten Augenblick* wenn der auf die Nadel wirkende Strom im Multiplikator *constant* ist; wenn dagegen seine Intensität *veränderlich* ist, so kann die Intensität des Stromes für einen einzelnen Augenblick aus der Ablenkung der Magnetnadel gar nicht, oder nur durch Rechnung mit Hülfe eines bestimmten für jene Veränderungen gegebenen Gesetzes, abgeleitet werden. Zwar steht es frei, den Strom alsdann nur einen *Augenblick* lang auf die Nadel wirken zu lassen, aber die durch diese augenblickliche Einwirkung hervorgebrachte Ablenkung der Nadel, wenn sie auch für genaue Beobachtung gross genug ist und feine Messung gestattet, genügt für sich allein keineswegs zur Bestimmung der Stromintensität in jenem Augenblicke, sondern es wird dazu noch die Kenntniss eines andern Elements erfordert, nämlich die Kenntniss der *Dauer* jener momentanen Einwirkung, die mit dem Instrumente nicht zu erlangen ist. Nur wenn man die *Menge* der Elektricität, welche der momentane Strom durchführt und die *Zeit* kennt, in welcher diese Elektricität durch einen Querschnitt gegangen ist, lässt sich die Intensität bestimmen, indem man erstere durch letztere dividirt. Aus der durch jene augenblickliche Einwirkung hervorgebrachten Ablenkung der Nadel lässt sich aber nur eine Bestimmung jener Elektricitätsmenge ableiten, die Zeit bleibt unbestimmt.

Das *Dynamometer* dient nun in solchen Fällen wesentlich zur *Ergänzung* des *elektromagnetischen* Galvanometers, denn beide Instrumente geben uns *zwei wesentlich verschiedene,* von einander unabhängige Bestimmungen, aus welchen *die beiden unbekannten Elemente*, von welchen die Stromintensität abhängt, abgeleitet werden können. Die *Verschiedenheit* der mit beiden Instrumenten erhaltenen Bestimmungen zeigt sich schon, wenn man fortdauernde

constante Ströme von *verschiedener Intensität* durch eine Kette leitet, in welcher sowohl das gewöhnliche *Galvanometer*, als auch das *Dynamometer* eingeschlossen ist, und die *Ablenkungswinkel* beobachtet, bei welchen für jeden dieser Ströme das Gleichgewicht der Instrumente besteht. Diese Ablenkungswinkel wachsen bei beiden Instrumenten mit der Intensität, aber nach verschiedenen Gesetzen; denn die Tangenten der Ablenkungswinkel des *Dynamometers* sind, wie Art. 2. nachgewiesen worden ist, den *Quadraten* der Tangenten der Ablenkungswinkel des *Magnetometers* proportional.

Noch auffallender zeigt sich jene *Verschiedenheit* in den von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, wenn man einen *constanten* Strom, wie eben beschrieben worden ist, durch beide Instrumente gehen lässt und die correspondirenden Ablenkungen beider beobachtet und sodann, ohne die Stromintensität zu ändern, blos die *Richtung* des Stromes in allen Leitungsdrähten der beiden Instrumente mit Hülfe eines Commutators *umkehrt*; es ist bekannt, dass nach dieser Umkehrung der Stromrichtung im Multiplikator der *Magnetnadel* letztere eben so weit, wie vor der Umkehrung, aber nach der *entgegengesetzten* Seite abgelenkt wird. Bei dem *Dynamometer* findet dieses nicht statt, sondern die vor der Umkehrung des Stromes vorhandene Ablenkung bleibt hier *unverändert* auch nach der Umkehrung des Stromes, so, dass, wenn nur die Umkehrung des Stromes ohne Unterbrechung wirklich momentan stattgefunden hat, von dieser Umkehrung *gar kein Einfluss* auf das Dynamometer wahrzunehmen ist. Letzteres verhält sich hierbei wie ein *elektromagnetisches* Galvanometer sich verhalten würde, wenn in dem Augenblicke, wo der Strom im Multiplikator umgekehrt, zugleich auch die *Pole der Nadel gewechselt* würden, vorausgesetzt, dass die Nadel, wie die Bifilarrolle des Dynamometers, eine bestimmte, von der Lage ihrer Pole unabhängige Directionskraft besässe. Diese Gleichheit der Wirkungen positiver und negativer Ströme im Dynamometer pflegt bei diesem leicht anzustellenden Versuche um so mehr Aufmerksamkeit zu erregen, je mehr man gewohnt ist, entgegengesetzten Strömen entgegengesetzte Wirkungen entsprechen zu sehen.

Diese experimentell nachgewiesene *Verschiedenheit* der von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, lässt sich nun leicht genauer *definiren*, Die unmittelbare Wirkung des durch die Leitungsdrähte beider Instrumente gehenden Stromes ist ein *Drehungsmoment*, welches die Boussole oder die Bifilarrolle, auf die es wirkt, in eine rotirende Bewegung zu setzen strebt. Dieses Drehungsmoment ist bei dem *magnetischen Galvanometer* der Intensität i des Stromes, welcher auf die Nadel wirkt, und dem magnetischen Moment m der Nadel, auf welche gewirkt wird, proportional, und wird also durch die Formel

$$a.mi$$

dargestellt, worin, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, a als eine für jedes Instrument ein für allemal zu bestimmende Constante zu betrachten ist. Die Wirkung dieses Drehungsmoment in dem Zeitelemente dt wird dann durch das Produkt

$$ami.dt$$

ausgedrückt und ist dem Produkte der Drehungsgeschwindigkeit, in welche

der drehbare Körper dadurch versetzt wird, in das Trägheitsmoment dieses Körpers gleich.

Bei dem *Dynamometer* ist dagegen das Drehungsmoment der Intensität i des Stromes in der festen Rolle, welche auf die Bifilarrolle wirkt, und auch der Intensität i des Stromes in der Bifilarrolle selbst, auf welche gewirkt wird, proportional und wird also durch die Formel

$$b \,.\, ii$$

darstellt, wo b, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, eine für jedes Dynamometer ein für allemal zu bestimmende Constante bezeichnet. Die Wirkung dieses Drehungsmoments in dem Zeitelemente dt wird also durch das Product

$$bii \,.\, dt$$

ausgedrückt, und ist ebenfalls dem Produkte der dadurch hervorgebrachten Drehungsgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des drehbaren Körpers gleich.

Dauert nun dieser Strom während der kurzen Zeit von $t=0$ bis $t=\theta$ gleichmässig fort, und bezeichnet man die Trägheitsmomente der Nadel und der Bifilarrolle mit p und q, so ist die dadurch hervorgebrachte *Angulargeschwindigkeit*

$$\text{für die Nadel} \quad = \int_0^\theta \frac{a}{p} \,.\, mi dt = \frac{am}{p} \,.\, i\theta$$

$$\text{für die Bifilarrolle} = \int_0^\theta \frac{b}{q} \,.\, ii dt = \frac{b}{q} \,.\, ii\theta.$$

Waren beide Instrumente vorher in Ruhe, so sind sie durch Mittheilung dieser Angulargeschwindigkeit in Schwingung versetzt, und bezeichnet s und ς die *Schwingungsdauer* beider Instrumente, so wird nach bekannten Schwingungsgesetzen, wenn keine Dämpfung stattfindet, und wenn der Zeitraum θ, in welchem die Nadel und die Bifilarrolle jene Angulargeschwindigkeiten erhielten, so klein ist, dass die *Verrückung* derselben während dieses kleinen Zeitraums, wie bei einem *Stosse,* nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht, die *Drehungsgeschwindigkeit* für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch

$$\frac{e\pi}{s} \,.\, \cos \frac{\pi}{s}(t-\theta) \text{ und } \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma} \,.\, \cos \frac{\pi}{\varsigma}(t-\theta)$$

ausgedrückt, wo e und ε die *Elongationsweiten* bezeichnen, welche an beiden Instrumenten durch *Beobachtung* bestimmt werden können. Setzt man hierin nun für t den ersten Augenblick nach dem Aufhören des Stromes, d. i. $t=\theta$, so erhält man die beiden Instrumenten ursprünglich durch den Strom mitgetheilten Geschwindigkeiten:

$$\frac{am}{p} \,.\, i\theta = \frac{e\pi}{s}, \qquad \frac{b}{q} \,.\, ii\theta = \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma},$$

oder man hat zur Bestimmung der *Stromintensität* i und der *Stromdauer* θ zwei Gleichungen, durch welche sie aus den *gemessenen Ablenkungen* beider Instrumente e und ε berechnet werden können, nämlich:

$$i\theta = \frac{\pi p}{ams} . e, \qquad ii\theta = \frac{\pi q}{b\varsigma} . \varepsilon$$

wo $\frac{\pi p}{ams}$ und $\frac{\pi q}{b\varsigma}$ ein für allemal zu bestimmende Constante bezeichnen. Die gesuchte *Stromintensität* i ergiebt sich hieraus:

$$i = \frac{am}{b} . \frac{q}{p} . \frac{s}{\varsigma} . \frac{\varepsilon}{e},$$

und die gesuchte *Dauer* dieses Stroms:

$$\theta = \frac{\pi bpp\varsigma}{aammqss} . \frac{ee}{\varepsilon} .$$

Da sich die *Schwingungsdauer* beider Instrumente s und ς unmittelbar bestimmen lässt, so ist zur vollständigen Bestimmung der *Constanten* beider Instrumente blos nöthig, einen constanten Normalstrom, dessen *Intensität* $= 1$ gesetzt wird, durch beide Instrumente gehen zu lassen und die Tangenten der *Ablenkungswinkel* e' und ε' zu beobachten, für welche das Gleichgewicht alsdann besteht. Diese Tangenten der Ablenkungswinkel sind dann nach bekannten Gesetzen den Verhältnissen der ablenkenden *Drehungsmomente* für die Stromintensität $= 1$, nämlich

$$am \text{ und } b,$$

zu den *Directionskräften* der Boussole und der Bifilarrolle, nämlich

$$\frac{\pi\pi p}{ss} \text{ und } \frac{\pi\pi q}{\varsigma\varsigma},$$

gleichzusetzen, also:

$$e' = am . \frac{ss}{\pi\pi p}, \qquad \varepsilon' = b . \frac{\varsigma\varsigma}{\pi\pi q} .$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Gleichungen, so erhält man

$$i\theta = \frac{s}{\pi} . \frac{e}{e'}, \qquad ii\theta = \frac{\varsigma}{\pi} . \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$

folglich ist

$$i = \frac{\varsigma}{s} . \frac{e'}{\varepsilon'} . \frac{\varepsilon}{e}$$

$$\theta = \frac{1}{\pi} . \frac{ss}{\varsigma} . \frac{\varepsilon'}{e'e'} . \frac{ee}{\varepsilon},$$

worin durch einmalige Beobachtung der Ablenkungen e' und ε' sowie der Schwingungsdauer der Boussole und der Bifilarrolle s und ς die constanten Coefficienten $\frac{\varsigma}{s}$, $\frac{e'}{\varepsilon'}$, $\frac{ss}{\varsigma}$ und $\frac{\varepsilon'}{e'e'}$ für immer bestimmt sind. Es geht hieraus also hervor, dass die an beiden Instrumenten gleichzeitig gemachten Beobachtungen der Ablenkungen e und ε sich ergänzen, indem sie vereint die vollständigen Data zur Bestimmung der *Intensität* und der *Dauer* eines momentanen

Stromes liefern, während jede einzeln betrachtet, weder das eine, noch das andere kennen lehrt.

Die Fälle, wo diese vollständige, durch gleichzeitigen Gebrauch beider Instrumente erreichbare, Bestimmung momentaner Ströme nützliche *Anwendungen* findet, brauchen nicht weit gesucht zu werden, sie bieten sich von selbst in mannichfaltiger Art dar. So werden z. B. *momentane* Ströme vielfach zu *physiologischen* Versuchen gebraucht, um den *Einfluss des Galvanismus auf das Nervensystem* zu erforschen; denn es zeigt sich, dass eine fortgesetzte Einwirkung des galvanischen Stroms den Nerven, durch welchen er geht, zumal wenn es ein *Sinnesnerv* ist, sehr schnell abstumpft, so dass keine ausgedehntere Reihe schnell auf einander folgender Versuche auf diese Weise ausgeführt werden kann, was möglich wird, wenn man immer nur einen Augenblick lang den Strom durch den Nerven gehen lässt. Diese höchst interessanten Beobachtungen können aber zu keinen bestimmten Resultaten führen, wenn man blos die Verschiedenheit der *Wirkungen* bestimmt, welche von jenen Strömen auf die Nerven hervorgebracht werden, ohne eine *Kenntniss von den Strömen* zu haben, welche jene Wirkungen hervorbringen, insbesondere von ihrer *Intensität* und von ihrer *Dauer*. Eine gründliche Untersuchung der physiologischen Wirkungen galvanischer Ströme auf das Nervensystem fordert daher die vollständige Bestimmung dieser beiden Elemente, die sich aber nur nach der eben entwickelten Methode durch gleichzeitige Beobachtungen des *Galvanometers* und *Dynamometers* erreichen lässt. Jedenfalls ist es eine interessante Aufgabe für die Nervenphysiologie, die *Grenze* der Zeit festzusetzen, wie lange ein Strom auf den Nerven wirken müsse, um eine bestimmte Wirkung in ihm hervorzubringen, und wie sich dieser nothwendige Zeitraum mit der Stromstärke ändere. Ich darf hoffen, dass das Elektrodynamometer zu dem angegebenen Zwecke benutzt werden wird, zumal da schon in dem hiesigen *physiologischen Institute* einige Probeversuche mit gutem Erfolge gemacht worden sind, die bei einer andern Gelegenheit mitgetheilt werden sollen. Gegenwärtig werde ich mich zunächst auf solche Anwendungen beschränken, welche sich im Bereiche der Physik selbst machen lassen und zwar zunächst im Gebiete der reinen *Elektricitätslehre*.

14.

Wiederholung des Ampère'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität, und Messung der Dauer des elektrischen Funkens bei Entladung einer Leidener Batterie.

Der Ampère'sche Fundamentalversuch über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Ferne war bisher mit einer einzigen Art galvanischer Ströme ausgeführt worden, welche nämlich von einer *Volta'schen Säule* herstammten. Wenn man sich nun gleich mit Recht zu der Vermuthung bewogen findet, dass alle galvanischen Ströme, aus welcher Quelle sie auch stammen

mögen, gleichen Gesetzen unterworfen seien, und dass also auch das Ampère-sche Gesetz über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte für alle Arten von galvanischen oder elektrischen Strömen sich bestätigen werde, so ist doch diese Bestätigung selbst keineswegs überflüssig. Insofern erscheint es schon wichtig, dass nach den im Vorhergehenden mitgetheilten Versuchen die Ampère-sche Wechselwirkung auch für *magnetoelektrische* und durch *Volta-Induction* erregte Ströme als sichere Thatsache nachgewiesen worden ist. Noch wichtiger scheint es aber zu sein, den Ampère'schen Fundamentalversuch mit *gemeiner Elektricität,* wie sie bei Entladung einer Leidener Flasche oder Batterie durch den angewandten Entladungsdraht geht, zu wiederholen, da zwischen diesem Strome der gemeinen Elektricität und allen andern galvanischen Strömen so erhebliche Verschiedenheiten stattfinden, dass nur die Erfahrung lehren kann, ob der Ampère'sche Fundamentalversuch damit bestehen könne, oder nicht. Insbesondere konnte man, so lange die Erfahrung nicht darüber entschieden hatte, leicht vermuthen, dass entweder die äusserst *kurze Dauer* eines Stromes gemeiner Elektricität, oder, bei längerer Dauer, die *Discontinuirlichkeit* des Stromes der Wechselwirkung zweier langer Leitungsdrähte, wie die beiden Rollen des Dynamometers sind, wesentlich hinderlich sein möchte, weil es möglich wäre, dass die Strömung in dem einen Drahte schon wieder aufgehört hätte, während sie in dem andern erst begönne. Die Erfahrung am *Elektrodynamometer* hat aber bewiesen, dass der Ampère'sche Fundamentalversuch auch mit gemeiner Elektricität gelinge, wovon ich hier nun genauere Rechenschaft geben will.

Es ist bekannt, dass die Wiederholung des *Oersted'schen Fundamentalversuchs* mit der in einer Leidener Flasche angesammelten *gemeinen Elektricität* am sichersten gemacht wird, wenn man das eine Ende einer *nassen Schnur* an dem Auslader befestigt, das andere Ende an dem Leitungsdrahte, welcher den Multiplikator des *Galvanometers* bildet, und dessen anderes Ende mit der äusseren Belegung der Leidener Flasche in leitender Verbindung steht. Entladet man sodann die Leidener Flasche mit dem Auslader, während die nasse Schnur daran hängt, so beobachtet man eine Ablenkung der Magnetnadel in derjenigen *Richtung,* welche durch die *elektromagnetischen* Gesetze voraus bestimmt werden kann. Die Anwendung einer nassen Schnur ist jedoch zu diesem Fundamentalversuche nicht unbedingt nothwendig, sondern scheint nur dann vortheilhaft zu sein, wenn man die in Leidener Flaschen oder Batterien *angesammelte* Elektricität in Anwendung bringen will, und ist entbehrlich, wenn man die Drahtenden des Multiplikators eines empfindlichen Galvanometers mit dem positiven und negativen Conductor einer Elektrisirmaschine unmittelbar in Verbindung setzt. Man beobachtet dann gleichfalls die Ablenkung der Nadel nach der durch die elektromagnetischen Gesetze voraus bestimmten Seite während der Drehung der Elektrisirmaschine. Es ist dabei auch nicht nothwendig, die Drähte besser zu isoliren als es bei anderen galvanischen Ketten geschieht. In dem ersten Falle war die Anwendung einer nassen Schnur darum vortheilhaft, weil ohnedem die Heftigkeit der Entladung die Gefahr einer Vereinigung der geschiedenen und in der Batterie angesammelten Elektricitäten auf anderen Wegen als durch alle Windungen des Leitungsdrahts hindurch mit sich führt.

Diese Gefahr wird vermieden durch Einschaltung einer nassen Schnur, welche die Heftigkeit der Entladung mindert und dennoch gestattet, dass sehr grosse Massen Elektricität in sehr kurzer Zeit durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen.

Während es nun bei Anstellung des Oersted'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität hauptsächlich nur darauf ankommt, recht grosse Massen Elektricität durch den Multiplikator zu leiten, *die Zeit* aber, in welcher die Elektricität durch den Draht geht, *weniger* in Betracht kommt, beruht die erfolgreiche Ausführung des Ampère'schen Fundamentalversuchs vielmehr wesentlich darauf, dass grosse Massen Elektricität *in möglichst kurzer Zeit* durch den Leitungsdraht geführt werden, wozu also die Ansammlung der Elektricität in Batterien und die Entladung der Batterie durch eine nasse Schnur vorzüglich geeignet erscheint. Die Wirkung gleicher Massen Elektricität ist bei dem *ersteren* Versuche immer die *nämliche,* die Zeit des Durchgangs mag kleiner oder grösser sein, wenn sie nur nicht so gross wird, dass sie einen beträchtlichen Theil der Schwingungsdauer erfordert; bei dem *letztern* Versuche soll aber, dem vorigen Artikel gemäss, die Wirkung der Zeit des Durchgangs *umgekehrt proportional* sein. Es scheint hiernach die Anwendung der Leidener Batterie nebst nasser Schnur, wenn nicht als nothwendig, doch als besonders günstig für unseren Versuch betrachtet werden zu müssen, und ich habe daher bei meinen ersten Versuchen beide wirklich gebraucht.

Ich verband also zu diesem Zwecke zwei Drahtenden der beiden Rollen des Dynamometers unter einander und führte von den zwei anderen Drahtenden das eine zur äusseren Belegung einer Leidener Batterie, das andere zu einer nassen Schnur, welche an den isolirten Auslader geknüpft war. Die Batterie wurde geladen und endlich der Auslader dem metallenen Knopfe genähert, welcher mit der inneren Belegung der Batterie in Verbindung stand. In dem Augenblicke nun, wo die Entladung der Batterie durch die nasse Schuur und durch die Rollen des Dynamometers statt fand, wurde das vorher in Ruhe befindliche Dynamometer in eine *Schwingung* gesetzt, welche oft einen Bogen von mehreren hundert Skalentheilen umfasste, wovon sogleich mehrere Beispiele angeführt werden sollen. Der am Fernrohr stehende Beobachter konnte leicht die *Grösse* der ersten Elongation und die *Seite*, nach welcher sie erfolgte, bestimmen.

Wurde darauf der Versuch wiederholt, indem die Leidener Flasche oder Batterie auf gleiche Weise wieder geladen wurde, aber mit dem Unterschiede, dass derjenige Draht, welcher vorher mit der äusseren Belegung in Verbindung war, an das Ende der nassen Schnur des Ausladers geknüpft wurde, und das andere Drahtende statt dessen von der Schnur gelöst und mit der äusseren Belegung der Batterie verbunden ward, so war die Wirkung nicht allein der Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach die *nämliche*, so dass in der Wirkung des *positiven* und *negativen* Stromes, wie bei gewöhnlichen Strömen, *gar kein* Unterschied statt fand. Und diese *Richtung* der Ablenkung des Dynamometers in Folge des durchgehenden Stromes gemeiner Elektricität ergab sich auch als diejenige, welche durch das Ampère'sche Fundamentalgesetz schon *im voraus* bestimmt war. Es ist hiermit bewiesen, dass der Ampère'sche Fun-

damentalversuch auch mit dem Strome der gemeinen Elektricität gemacht werden kann.

Es war nun aber ferner interessant, zu prüfen, ob zum Gelingen dieser Versuche die Anwendung der nassen Schnur nothwendig oder entbehrlich sei, sowie überhaupt, ob es Fälle gebe, wo der Strom der gemeinen Elektricität zwar den Oersted'schen, aber nicht den Ampère'schen Fundamentalversuch hervorbringe, oder ob beide Arten von Wirkungen auch bei den Strömen der gemeinen Elektricität immer verbunden seien. Es werden hierzu ausgedehntere Versuchsreihen erfordert, als ich bisher angestellt habe; doch mögen einige vorläufige Versuche hier einstweilen Platz finden.

Es wurden die früheren Versuche wiederholt, bald mit Anwendung bald mit Ausschliessung der nassen Schnur, und zugleich damit auch die *elektromagnetischen* Versuche verbunden, indem der Multiplikator eines magnetischen Galvanometers in die nämliche Kette eingeschaltet wurde, welche die beiden Rollen des Dynamometers umfasste. Die letztere Wirkung diente dann als Merkmal und Maassstab, *ob* und *wie viel* Elektricität bei der Entladung der Leidener Flasche durch die Drahtkette wirklich hindurchgegangen war. Um bei Ausschliessung der nassen Schnur den grossen Widerstand, welchen sie leistete, auf andere Weise zu ersetzen, wurde ein feiner Argentandraht von $\frac{3}{10}$ Millimeter Durchmesser um zwei $3\frac{3}{4}$ Meter von einander abstehende Glassäulen so gewunden, dass die einzelnen $7\frac{1}{2}$ Meter langen Windungen ungefähr 40 Millimeter weit von einander entfernt waren, wodurch sie von einander vollkommen isolirt wurden. Der Argentandraht bildete 32 solche Umwindungen und das eine Ende dieses Drahts wurde nun frei durch die Luft zu der geladenen Batterie geführt. Ich stelle in folgender Tafel die Resultate zweier Versuchsreihen zur Vergleichung zusammen, wo nämlich in der einen der Strom durch die nasse Schnur ging, in der andern die nasse Schnur aus der Kette ausgeschlossen war. Die elektrische Batterie bestand aus 4 Flaschen, jede von etwa 2 Quadratfuss belegter Fläche, die mässig stark und bei allen Versuchen so gleichmässig, wie es sich an dem Quadranten-Elektrometer erkennen liess, geladen wurden. Die Schnur war von Hanf, 320 Millimeter lang, 4 Millimeter dick und wurde vor jedem Versuche in Wasser getaucht.

Nr.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1. Entladung durch die nasse Schnur:		
1.	51,75	206,99
2.	56,26	214,94
3.	61,36	236,98
4.	52,68	216,63
5.	55,31	223,88
2. Entladung durch die Drahtkette, ohne Schnur:		
6.	7,06	0,85
7.	7,04	0,85

Die Beobachtungen am *Galvanometer* zeigten, dass, wenn bei Anwendung der Schnur alle Elektricität durch die Kette gegangen war, ohne die Schnur nur der 7te bis 8te Theil davon durchging, wonach, unter der Voraussetzung, dass die Entladung ohne Schnur schneller erfolge oder wenigstens nicht langsamer als mit der Schnur, eine mindestens den 50sten Theil der vorhergehenden betragende elektrodynamische Wirkung zu erwarten gewesen wäre. Diese hat aber nicht statt gefunden, sondern, wie die Vergleichung der in der dritten Columne unter ε aufgeführten Beobachtungen zeigt, eine fast 6 Mal noch geringere. So klein übrigens diese letztere Wirkung war, so wurde sie doch deutlich wahrgenommen.

Der Einfluss, den das Wasser ausübte, wenn die Elektricität durch dasselbe geleitet wurde, schien genauer erforscht werden zu können, wenn an die Stelle der nassen Schnur eine mit Wasser gefüllte Glasröhre gesetzt würde. Es wurde daher eine 1200 Millimeter lange, 13 Millimeter im Lichten weite Glasröhre *U*förmig gebogen und mit Wasser gefüllt, zwischen dem Auslader und der übrigen Kette eingeschaltet und die früheren Versuche damit wiederholt, wo sich dann folgende Resultate, bei gleicher Ladung der Batterie wie früher, ergaben, welche bewiesen, dass das in einer Glasröhre eingeschlossene Wasser eine nasse Schnur hierbei nicht ersetzen könne.

Entladung durch eine mit Wasser gefüllte Glasröhre.

Nr.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1.	4,68	3,23
2.	4,50	1,57.

Alle Vorsichtsmassregeln, welche bei diesem und bei dem vorigen, mit Ausschliessung der nassen Schnur gemachten, Versuche angewendet wurden, um die Elektricität zu nöthigen, ihren Weg hier durch das Wasser der Röhre, dort durch den Argentandraht zu nehmen, um durch den Widerstand dieser Körper die Heftigkeit der Entladung zu mindern und zu bewirken, dass alle Elektricität ihren Weg durch die Leitungsdrähte der Instrumente nähme, waren vergeblich; nur ein geringer Theil der Elektricität schien den letzteren Weg wirklich einzuschlagen. Wurde dagegen die Glasröhre mit einer Schnur von *Glasfäden* vertauscht, so leistete diese, wenn sie äusserlich benetzt war, ähnliche Dienste, wie die benetzte Hanfschnur. Die Entladung durch eine solche 500 Millimeter lange mit Ammoniak befeuchtete Schnur gab folgende am Galvanometer und Dynamometer sich entsprechende Elongationen:

100,55 70,35.

Es scheint die aus einer Leidener Flasche kommende Elektricität an der Oberfläche der Körper sich besonders zu verbreiten, und ein feuchter Leiter deshalb mehr Wirkung zu haben, wenn er äusserlich die Oberfläche dieser Körper bedeckt, als wenn er eingeschlossen ist.

Zuletzt mögen noch die Resultate einer mit der nassen Schnur angestellten Versuchsreihe Platz finden, wobei eine Batterie von 8 eben solchen Fla-

schen, wie früher gebraucht wurde, und eine hanfene Schnur von 7 Millimeter Dicke und 2000 Millimeter Länge eingeschaltet war; diese Länge jedoch gradweise bis auf 125 Millimeter verkürzt wurde.

Länge der Schnur	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$	$\frac{ee}{\varepsilon}$
2000^{mm}	79,9	65,6	97,3
1000	76,6	153,0	38,3
500	82,3	293,8	23,0
250	87,3	682,0	11,2
125	93,2	aus d. Skale	
250	82,9	609,1	11,3
500	95,6	422,8	21,6
1000	95,8	210,1	43,7
2000	101,5	98,0	105,0

Es möge noch bemerkt werden, dass, als die Schnur in *verdünnte Schwefelsäure* getaucht worden war, eine Entladung der Batterie an dem Galvanometer einen Ausschlag von 83 Skalentheilen gab, während der Ausschlag am Dynamometer selbst bei einer Länge der Schnur von 2000 Millimetern zu gross war, um mit der Skale gemessen zu werden.

Man sieht leicht, dass hier noch ein weites Feld interessanter Versuche offen steht, welches ich darum nicht weiter verfolgt habe, weil dabei das Bedürfniss sich zeigt, die Elektricitätsmenge in der Batterie, welche zu den Versuchen gebraucht wird, einer directen genauen Messung zu unterwerfen, nach dem von Ries in seinen elektrischen Untersuchungen gegebenen Muster, wozu mir aber vor der Hand nicht die geeigneten Mittel zu Gebote standen, weshalb ich diese Arbeit auf eine günstigere Zeit verschiebe.

Indessen zeigt sich doch auch schon in der zuletzt angeführten Versuchsreihe, abgesehen von der *Stärke* der Wirkungen, ein solcher Grad von *Regelmässigkeit,* dass es wahrscheinlich wird, dass bei Entladungen der Leidener Batterie durch eine nasse Schnur wirklich *alle Elektricität* durch die Drahtleitung hindurchgehe und darin einen Strom bilde, der dem Strome einer galvanischen Säule einigermassen an Continuirlichkeit vergleichbar sein dürfte*). Wäre dies der Fall, so könnte man von den vorliegenden Beobachtungen eine wichtige Anwendung machen, indem sich dann die Art. 13. entwickelten Regeln darauf anwenden liessen, um die *Dauer* des Stromes, welche mit der Dauer des *Entladungsfunkens* als gleich betrachtet werden darf, nach *absolutem Zeitmaass* zu bestimmen. Es ist bekannt, dass Wheatstone diese

*) Es lassen sich elektrodynamische Versuche mit *zwei Dynamometern* so anordnen, dass die Elektricität in dem einen *successive*, in dem andern *simultan* durch die feste und schwebende Rolle geführt wird. Durch Vergleichung der Angaben beider Instrumente, wenn eine Batterie durch sie entladen würde, würde sich die Continuirlichkeit oder Discontinuirlichkeit des Stromes genauer erforschen lassen.

Bestimmung der Dauer des Entladungsfunkens auf eine ganz andere Weise bewerkstelligt hat, und es würde interessant sein, die auf so verschiedenen Wegen gefundenen Resultate mit einander zu vergleichen. Um die *relativen Zeitmaasse*, welche wir schon den obigen Versuchen selbst in der mit $\frac{ee}{\varepsilon}$ überschriebenen Columne beigefügt haben, auf *absolute* zu reduciren, bedarf es nach S. 288 nur eines Versuches mit einem constanten, durch beide Instrumente gehenden, Strome, den ich zu diesem Zwecke gemacht, und gefunden habe, dass die in obiger Tafel aufgeführten Werthe von $\frac{ee}{\varepsilon}$ mit

1188

zu dividiren sind, um die Dauer des Stroms in *Secunden* zu erhalten. Hiernach ist die folgende Tafel berechnet:

Länge der Schnur.	Dauer des Funkens.
Millimeter.	Secunde.
2000	0,0819
1000	0,0322
500	0,0193
250	0,0094
250	0,0095
500	0,0182
1000	0,0368
2000	0,0883

oder in Mittelwerthen:

Länge der Schnur.	Dauer des Funkens.
Millimeter.	Secunde.
2000	0,0851
1000	0,0345
500	0,0187
250	0,0095

Es ergiebt sich hieraus, dass die *Dauer des Funkens der Länge der Schnur fast proportional* ist, wie folgende Uebersicht der darnach *berechneten* Werthe und ihrer Differenzen von den *beobachteten* Werthen beweisen:

Länge der Schnur.	Berechnete Dauer des Funkens.	Unterschied von der beobachteten.
Millimeter.	Secunde.	Secunde.
2000	0,0816	— 0,0035
1000	0,0408	+ 0,0063
500	0,0204	+ 0,0017
250	0,0102	+ 0,0007.

Vergleicht man hiermit das von Wheatstone gefundene Resultat, wonach die Dauer des Funkens bei Entladungen durch blos metallische Leiter gegen die hier gefundene Dauer verschwindend klein ist, so steht dieses mit der hier ge-

fundenen Proportionalität der Funkendauer und der Länge der nassen Entladungschnur in vollkommenem Einklange. Dass hiernach die *Bewegung der Elektricität im Wasser* so *langsam* geschieht, dass die Zeit, welche sie für den kurzen Weg von 2 Metern braucht, ungefähr $\frac{1}{12}$ Secunde beträgt, verdient jedenfalls besondere Aufmerksamkeit. Man könnte zwar gegen die Anwendung der Regel, wonach diese Zeitbestimmungen gemacht sind, abgesehen von dem von der Discontinuirlichkeit der Ströme gemeiner Elektricität hergenommenen Einwande (von welchen schon oben die Rede war, und welcher in hohem Grade oder ganz durch den Einfluss des Wassers beseitigt sein dürfte) noch den Einwand machen, dass der Strom im ersten Momente am intensivsten sei, und *allmählig abnehmen* werde, statt dass obige Regel nur dann genaue Anwendung findet, wenn der Strom während seiner kurzen Dauer immer gleiche Intensität besitzt. Erfährt man aber auch in diesem Falle nicht die wahre Dauer, sondern diejenige Dauer, welche einer *mittleren Stromstärke* entsprechen würde, so dürfte doch der Werth der Bestimmung dadurch wenig verlieren, weil die Kenntniss der letzteren Dauer in der Regel mehr Interesse haben wird als die der erstern. Auch ist zu bemerken, dass aus demselben Grunde bei der Wheatstone'schen Bestimmung der Funkendauer eine ähnliche Differenz veranlasst werde, weil der Funke in eine Linie ausgedehnt wird, die in Folge jener Abnahme sich allmählig ohne scharfe Begrenzung verliert.

15.

Es würden hier noch zwei Untersuchungen im Gebiete der *reinen Elektricitätslehre* auszuführen sein, für welche die Anwendung des Dynamometers einen neuen Weg eröffnet, auf die ich jedoch gegenwärtig noch nicht näher eingehen werde, weil es noch an den nöthigen Versuchen fehlt, um zugleich mit der Methode auch die damit gewonnenen Resultate darzulegen. Diese beiden Untersuchungen betreffen:

1) die Bestimmung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung, worüber bisher blos einige wenige Versuche von Wheatstone vorliegen, die aber nach Wheatstone's eigener Angabe noch zu keinen sichern Resultaten geführt haben;

2) die Bestimmung der elektromotorischen Kraft einer galvanischen Kette unabhängig von der Polarisation ihrer Platten.

Die *erstere* Anwendung fordert, dass die Bifilarrolle von der festen durch lange Leitungsdrähte geschieden, und in dieser langen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Richtung gleich schnell wechselt, wie Wheatstone's Spiegel herumgedreht wird. Es würde die Anwendung des Dynamometers, im Vergleich mit Wheatstone's Methode, den Vortheil gewähren, dass galvanische Ströme statt gemeiner Elektricität gebraucht, und die Kette nirgends unterbrochen würde, was bei Wheatstone zur Darstellung der Funken nothwendig war. Die *letztere* Anwendung beruht auf der Messung momentaner Ströme nach Art. 13.

16.

Anwendung des Dynamometers auf Intensitätsmessungen der Schallschwingungen.

Es bleibt noch übrig, eine Anwendung des Dynamometers auf Untersuchungen in einem andern Theile der Physik mitzutheilen, welche ein besonderes Interesse darum zu haben scheint, weil sie dasjenige, was mit diesem Instrumente zu leisten sei, von einer eigenthümlichen Seite in ein helles Licht setzt. Wir besitzen ausserordentlich feine *Galvanoskope,* womit wir im Stande sind, auch die schwächsten in der Natur vorkommenden Ströme zu entdecken und zu erforschen. Wir brauchen uns blos der schönen Arbeiten von Melloni zu erinnern, um auf den Gebrauch dieser feinen Instrumente und die damit aufgefundenen Spuren von elektrischen Bewegungen die grösste Wichtigkeit für die gesammte Wissenschaft zu legen. Trotz dieser Feinheit der Instrumente ist es aber in vielen Fällen doch nicht gelungen, elektrische Ströme überall nachzuweisen, wo man solche vermuthete, vielleicht weil jene Instrumente trotz ihrer Feinheit dazu ungeeignet waren. Dieser Grund verdient um so mehr Beachtung, als sich *eine* Art von Strömen nachweisen und wirklich darstellen lässt, von denen auch jene feinsten Instrumente der Natur der Sache nach gar nicht afficirt werden können. Dieses findet statt, wenn wir mit einem veränderlichen Strome zu thun haben, welcher in sehr kurzen, auf einander folgenden Zeitabschnitten *seine Richtung immer wechselt.* Die abwechselnd entgegengesetzten Wirkungen dieses Stromes auf die empfindlichste Magnetnadel müssen sich, wenn der Magnetismus der letzteren immer der nämliche bleibt, vollkommen annulliren. Die von Poggendorff (Annalen 1838. Bd. 45. S. 355 ff.) beobachteten Erscheinungen, wo dieses nicht statt zu finden schien, rührten jedenfalls von einer Veränderlichkeit des Nadelmagnetismus her, und würden bei sehr beschleunigtem Stromwechsel wieder verschwunden sein. Solche Ströme, deren Richtung sehr schnell wechselt, können also in der Natur in grosser Menge existiren, ohne dass wir noch eine Ahnung von ihrer Existenz haben, weil wir kein Mittel besitzen, sie zu entdecken. Und es ist gar nicht unwahrscheinlich, dass solche Ströme existiren, denn die Bewegung der Elektricität in ihnen würde sich von der Bewegung der Elektricität in gewöhnlichen Strömen nur dadurch unterscheiden, dass sie in einer *Schwingung* bestände, während in letzteren die Bewegung der Elektricität *progressiv* ist. Da nun die progressive Bewegung der Elektricität in der Natur so häufig vorkommt, so ist nicht einzusehen, warum nicht, bei so grosser Beweglichkeit, auch bisweilen Verhältnisse eintreten sollten, welche eine schwingende Bewegung begünstigten. Wenn z. B. die Lichtundulationen eine Wirkung auf die elektrischen Fluida übten und das Gleichgewicht derselben zu stören vermöchten, so würde

gewiss zu erwarten sein, dass diese *Wirkungen* der Lichtundulationen sich der Zeit nach eben so periodisch gestalteten, wie die *Lichtundulationen selbst*, so, dass das Resultat in einer *elektrischen Schwingung* bestände, die wir aber mit unsern Instrumenten nicht zu entdecken vermöchten. Nun geschehen die Lichtschwingungen so schnell, dass, wenn die dadurch erregten elektrischen Schwingungen einen gleich geschwinden Wechsel befolgten, kaum zu hoffen wäre, dass es gelingen werde, mit irgend einem Instrumente eine Wirkung davon wahrzunehmen. Es finden sich aber in der Natur auch langsamere Schwingungen, z. B. die akustischen, und es fragt sich daher, ob es nicht elektrische Bewegungen in der Natur gebe, welche ihnen ihren Ursprung verdanken, und wenn es solche gebe, auf welche Weise wir dieselben entdecken und erforschen könnten.

Ich will hier wenigstens ein Beispiel von solchen durch Schallschwingungen erregten *elektrischen Schwingungen* geben und den thatsächlichen Beweis liefern, wie solche elektrische Schwingungen mit Hülfe des *Dynamometers* wahrgenommen und erforscht werden können, und wie die messbaren Wirkungen dieser elektrischen Schwingungen wieder benutzt werden können, um auf die Schallschwingungen, von denen sie herrühren, rückwärts zu schliessen, und dadurch für manche akustische Untersuchungen eine neue Bahn zu eröffnen, für welche es uns gänzlich noch an geeigneten Mitteln gebricht, die *Intensität der Schallschwingungen* zu messen.

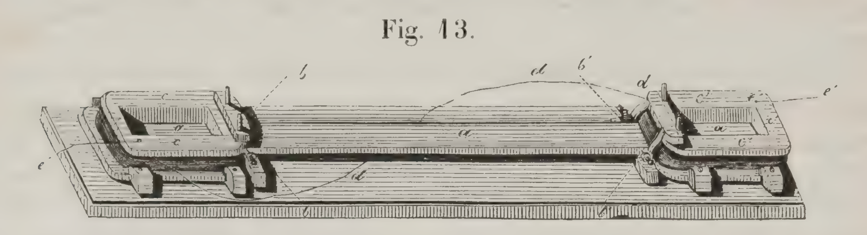
In der That besteht die Eigenthümlichkeit des Dynamometers, welche dasselbe am meisten charakterisirt und von allen andern Galvanometern unterscheidet, darin, dass es für die *Richtung* des Stromes, der darauf wirkt, *indifferent* ist, während andere Galvanometer bei entgegengesetzten Richtungen der Ströme entgegengesetzte Einwirkungen erleiden. Es ist darauf schon oben Art. 13. aufmerksam gemacht worden. Wir können dies kurz dadurch ausdrücken, dass das Dynamometer in Beziehung auf *constante* Ströme einen Maassstab für das *Quadrat der Stromintensität* gebe, während andere Galvanometer einen Maassstab für die Stromintensität selbst darbieten.

Aus dieser charakteristischen Eigenschaft des Dynamometers leuchtet nun von selbst ein, dass die schnell auf einander folgenden Wirkungen entgegengesetzter Ströme sich nicht, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, einander aufheben, sondern vielmehr summiren müssen; und dass folglich das Dynamometer seiner Natur nach seine wahre Bestimmung darin finde, solche auf andere Weise nicht wahrzunehmende Ströme an den Tag zu bringen.

Nun sind zwar die *Schallschwingungen* meist in so engen, fast mikroskopischen Grenzen eingeschlossen, dass wir kaum hoffen dürfen, durch dieselben elektrische Schwingungen in so weiten Grenzen hervoszubringen, als nothwendig sind, um auf das Dynamometer merklich zu wirken. Wenn man indessen die absoluten Geschwindigkeiten, mit welchen sich die schallenden Körper in der Mitte ihrer Schwingungen bewegen, berechnet, so ergiebt sich, dass diese, in Betracht der kurzen Schwingungsdauer, trotz des kleinen Schwingungsbogens, nicht ganz unbeträchtlich sind, sondern oft 1 Fuss und mehr in einer Secunde betragen. Hierauf bauend, habe ich einen Versuch so angestellt, wie er am ersten zu einem Resultate führen zu können schien. Ich habe einen

Klangstab von Stahl *a a a* Fig. 13. anfertigen und härten lassen, habe denselben magnetisirt und ihn sodann in den Endpunkten *b, b, b′, b′* seiner Knotenlinien

Fig. 13.



zwischen Schraubenspitzen als Drehungsaxen befestigt, wie ich es in Poggendorff's Annalen 1833. Bd. 28. S. 4 beschrieben habe, und zwar so, dass er in drei gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten schwingende Abtheilungen zerfiel. Die beiden Endabtheilungen machten folglich gleichzeitig ihre Schwingungen nach gleicher Richtung, abwechselnd aufwärts und abwärts. Der freie Magnetismus, welcher in diesen Stäben verbreitet ist, kann nach der von Gauss angegebenen idealen Vertheilung, welche in allen Wirkungen nach aussen die wirkliche Vertheilung vertritt, auf der Oberfläche des Stabes verbreitet gedacht werden, und zwar muss bei starker Magnetisirung der freie Nordmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der einen schwingenden Endabtheilung, der freie Südmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der andern schwingenden Endabtheilung, und zwar je näher am Ende, desto mehr concentrirt gedacht werden, d. h. gerade da am meisten, wo die Schallschwingungen am grössten sind. Daher umgab ich nun diese beiden schwingenden Endabtheilungen mit starken Inductoren *c c c* und *c′ c′ c′* von feinem Kupferdrahte, welche jedoch den Stab nirgends berührten, damit seine Schwingungen nicht gehemmt würden. Auch war an den einander zugekehrten Seiten der Inductoren zwischen ihren Drahtwindungen ein Durchgang frei geblieben, durch welchen der Stab mit seinen Enden in die Inductoren eingeschoben wurde. Die Windungen der Inductoren waren unter sich parallel und lagen in einer Ebene, gegen welche die Schallschwingungen des Klangstabes senkrecht geschahen. Die beiden Inductoren wurden mit zwei ihrer Drahtenden *dddd* unter sich verbunden, so, dass sie entgegesetzt gewundene Spiralen bildeten. Ihre beiden Drahtenden *e e* und *e′ e′* wurden mit zwei Drahtenden der festen und drehbaren Rolle des Dynamometers in Verbindung gesetzt, deren beide andern Drahtenden unter sich verbunden waren. Das Dynamometer war vollkommen in Ruhe. Nachdem Alles so vorbereitet war, wurde der Klangstab durch einen starken Schlag mit einem weichen Klöppel auf seine Mitte in starke Schwingung gesetzt. Sogleich zeigte sich eine Ablenkung der Bifilarrolle, welche 20 bis 30 Skalentheile betrug, und zeichnete man alsdann die Maxima und Minima des Schwingungsbogens der von nun an schwingenden Bifilarrolle auf, so sah man, dass der daraus berechnete Ruhestand, um welchen die Schwingung geschah, geändert war, dass derselbe aber, wie die Schallschwingungen an Stärke abnahmen, schnell wieder zum ursprünglichen Stande zurückkehrte. Ich bemerke, dass ich die Elongation der Bifilarrolle auf mehrere hundert Skalentheile gebracht habe, indem ich den Klangstab nur so lange schwingen liess, als die Elongation

im Wachsen war, dagegen den Klangstab dämpfte, während die Bifilarrolle wieder rückwärts schwang, und den Klangstab von neuem anschlug, sobald die Bifilarrolle wieder in der ursprünglichen Richtung sich zu bewegen begann u. s. f.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn nach der angegebenen Methode wirklich genauere Bestimmungen über die Intensität der Schallschwingungen gewonnen werden sollen, der Klangstab nicht durch einen Klöppelschlag in Schwingung versetzt werden darf, weil die Intensität der so hervorgebrachten Schwingungen sehr schnell abnimmt und bald ganz verschwindet, sondern durch eine fortdauernde geregelte Einwirkung in einer constanten Schwingung längere Zeit erhalten werden muss.

Dass die elektrischen Schwingungen, welche hiedurch thatsächlich nachgewiesen werden, unter den Verhältnissen, unter welchen wir beobachteten, statt fänden, liess sich mit Sicherheit voraussetzen; es kam daher nur darauf an, die Methode, solche Schwingungen *wahrnehmbar* zu machen, daran zu prüfen. Nachdem nun diese Methode aber bewährt gefunden worden ist, so kann man darauf weiter bauen, und gewiss wird die Benutzung dieser Methode zur Entdeckung elektrischer Schwingungen unter bisher noch nicht geahneten Verhältnissen führen. Zum Beleg der Mannichfaltigkeit dieser Erscheinungen möge hier noch folgender Versuch angeführt werden. Wird nahe neben einer schwingenden Saite, die einen Theil einer in sich zurücklaufenden Drahtkette bildet, ein starker galvanischer Strom vorbeigeführt, so werden in Folge jener Schwingungen in der Drahtkette abwechselnd positive und negative Ströme inducirt, auf ähnliche Weise, wie von dem schwingenden Magnetstabe, deren Intensität mit dem Dynamometer gemessen werden kann.

17.

Ueber verschiedene Einrichtungen des Dynamometers.

Es giebt *drei* wesentlich verschiedene Einrichtungen, welche man dem Dynamometer geben kann, die alle geeignet sind, zu genauen Messungen zu dienen, und unter verschiedenen Verhältnissen eigenthümliche Vorzüge gewähren. Ausser der *ersten* Einrichtung, welche bisher in Anwendung gebracht wurde, bietet sich nämlich zunächst eine *zweite* gleichsam von selbst dar, da sie ihrem wesentlichsten Bestandtheile nach schon häufig zur Beobachtung der Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter benutzt worden ist. Man hat nämlich zu diesem Zwecke einen kreisförmig gewundenen Leiter sammt der Säule, von welcher der Strom ausgeht, an einem Faden oder Drahte, wie einen Magnet, aufgehangen und hat das Drehungsmoment beobachtet, welches die Erde auf einen solchen in sich geschlossenen Kreisstrom auf gleiche Weise wie auf eine aufgehangene Magnetnadel ausübt. In der That besitzt man in dieser Vorrichtung einen drehbaren Leiter, dessen Schwingungen und Ablenkungen eben so fein, wie die unserer Bifilarrolle beobachtet werden können,

und es ist nur nöthig, diese schwebende Säule mit einem festen Multiplikator zu umgeben, durch welchen ebenfalls ein Strom geht, um das Dynamometer zu vollenden. Dazu kommt nun, dass durch die Entdeckung der *constanten* Säulen von Daniell und Grove der Weg zu feineren Anwendungen eines solchen Instruments gebahnt worden ist, denen früher die Veränderlichkeit der Ströme entgegenstand. Besonders eignet sich hierzu ein kleiner Grove'scher Becher, der bei geringen Dimensionen und kleinem Gewichte, einen ziemlich starken und constanten Strom giebt. Fügt man Spiegel, Fernrohr und Skale hinzu, so lassen sich die feinsten Beobachtungen mit diesem Instrumente ausführen. Fig. 14. stellt ein solches Instrument, wie ich es zu diesem Zwecke

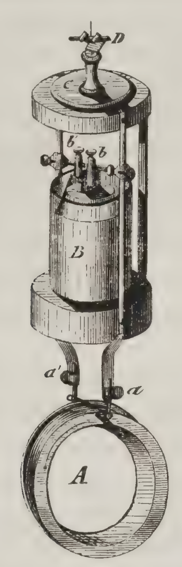


Fig. 14.

gebraucht habe, dar. *A* ist der ringförmig aufgewundene Draht, dessen Enden durch Verbindungsstücke von Messing *a b* und *a' b'* mit dem Platin- und Zinkpole eines kleinen Grove'schen Bechers *B* vom Mechanikus Kleinert in Berlin in Verbindung gesetzt wurde. Dieser Becher steht auf einem hölzernen Gestell, welches oberhalb mit einem Torsionskreise *C* versehen ist, an welchem bei *D* der Aufhängungsfaden befestigt wird.

So geeignet indess diese Einrichtung des Dynamometers für einige besondere Zwecke sein möge, so ist sie doch weit entfernt, die erstere Einrichtung ersetzen zu können, wovon der Grund in dem Mangel *zweier* Eigenschaften liegt, welche das Dynamometer mit der *Bifilarrolle* besitzt, und die darauf beruhen, dass der Strom, welcher durch die Bifilarrolle geht, sich weiter leiten lässt, sowohl durch die als Multiplikator dienende feste Rolle, als auch durch beliebige andere Leiter. Die *erste* Eigenschaft besteht darin, dass dieses *Dynamometer* mit einem *Galvanometer* zugleich gebraucht werden kann, wodurch eine unabhängige Intensitätsmessung des Stromes in der Bifilarrolle gewonnen wird, was bei jenem Intrumente nicht der Fall ist, weil bei ihm der Strom der schwebenden Säule nicht durch den Multiplikator eines *Galvanometers* abgeleitet werden kann. Die gleichzeitigen Beobachtungen am *Galvanometer* und

Dynamometer gestatten aber, die elektrodynamischen Wirkungen auf *gleiche Stromintensität* zu reduciren, wie dies im Vorhergehenden häufig geschehen ist. Der Mangel dieser Eigenschaft wird durch Anwendung constanter Säulen nicht gänzlich beseitigt, weil die Stromintensität auch solcher Säulen immer noch beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist, welche bei genaueren Bestimmungen keineswegs vernachlässigt werden dürfen.

Die *zweite* Eigenschaft besteht darin, dass man, indem man die mit dem *Dynamometer* zu untersuchenden Ströme durch *beide* Rollen, durch die feste sowohl, als durch die drehbare, gehen lässt, das *Quadrat der Stromintensität* bestimmen kann, welches unabhängig ist von der *Richtung* des Stromes. Hierauf beruhte die Eigenthümlichkeit des Instrumentes, welche es fähig machte, in Verbindung mit dem elektromagnetischen Galvanometer die nothwendigen Elemente zur Kenntniss *momentaner* Ströme zu liefern. Siehe oben Art. 13.. Auch diese Eigenschaft mangelt dem andern Instrumente, dessen drehbare Rolle eine in sich abgeschlossene schwebende Säule bildet; denn die verschiedenen zu *untersuchenden* Ströme können hier blos durch den Leitungsdraht der *festen* Rolle geführt werden, während der Strom in der *drehbaren* Rolle unverändert bleibt, wo dann die Wirkung, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, der Stromintensität selbst proportional ist, und folglich das Instrument blos die Dienste eines elektromagnetischen Galvanometers zu leisten, dieselben aber nicht zu ergänzen vermag.

Ich gehe zur *dritten* Einrichtung des Dynamometers über, welche, indem sie die wesentlichsten Eigenschaften der ersten theilt, geeignet ist, den elektrodynamischen Messungen eine noch grössere Ausdehnung zu geben, besonders in solchen Fällen, wo die *erste*, wegen der nothwendigen Feinheit der Aufhängungsdrähte, durch welche der Strom hindurch geleitet wird, den Dienst versagt.

Diese dritte Einrichtung beruht auf demselben Princip, welches ich in den Commentat. Soc. Reg. Sc. Gottingensis recentiores, Vol. VIII. zu dem Zwecke entwickelt habe, eine vollkommen drehbare, von der Reibung freie *Wage* darzustellen, nämlich auf dem Princip der Compensation zwischen *Schwerkraft* und *Federkraft*. Ich habe dort den horizontalen Wagbalken an zwei elastischen, verticalen Federn aufgehangen. Diese Federn beugten sich zwar, wenn der Wagbalken gedreht wurde, und suchten also durch ihre *Federkraft* die Drehung desto mehr zu *hemmen*, je mehr der Wagbalken gedreht worden war; fand aber dabei die Drehung des Wagbalkens um eine Axe statt, welche tiefer lag, als der Schwerpunkt desselben, so suchte die *Schwerkraft*, wenn der Wagbalken gedrehet wurde, die Drehung zu *fördern*, desto mehr, je mehr der Wagbalken gedrehet worden war, und es liess sich eine solche Einrichtung treffen, dass jene *hemmende* Einwirkung der *Federkraft* und diese *fördernde* Einwirkung der *Schwerkraft* einander das Gleichgewicht hielten, und der Wagbalken folglich nicht blos in horizontaler, sondern auch in geneigter Lage im Gleichgewicht beharren und ohne von der Reibung gehindert zu werden, beim geringsten Antriebe aus einer dieser Lagen zur andern übergehen konnte.

Einen solchen *compensirten* Wagbalken benutze ich nun für das Dynamometer und ersetze dadurch die drehbare Rolle, indem ich von den beiden Aufhängungsfedern hier denselben Gebrauch für die Zuleitung und Ableitung des

Stromes mache, wie dort von den beiden Aufhängungsdrähten. Diese Federn sind dann insbesondere jenen feinen Drähten vorzuziehen, wenn es sich um Ströme von grosser Intensität handelt, welche nicht durch feine Drähte geleitet werden dürfen. Bei solchen Strömen begnügt man sich, dieselben durch eine möglichst starke und kurze Kette zu führen; daher kann der Wagbalken, durch welchen dieser Strom gehen soll, aus einem von jenen beiden Federn getragenen, mässig langen Stabe bestehen, an welchem aber ein Spiegel für die feinere Beobachtung angebracht wird. Was endlich die *feste* Rolle betrifft, so wird dieselbe aus gleichem Grunde durch einen andern, mässig langen *festen* Stab ersetzt, durch welchen der galvanische Strom ebenfalls geleitet wird, und welcher dann auf jenen *drehbaren* Stab wirkt, und ihn, wie eine Wage, ablenkt. Die Empfindlichkeit dieses Instruments beruht hauptsächlich darauf, dass die beiden Stäbe (der feste und der drehbare) parallel in geringer Entfernung von einander gestellt werden. Ich habe dieses Instrument vorzüglich dazu bestimmt, um den elektrodynamischen Versuchen mit *gemeiner* Elektricität eine grössere Ausdehnung zu geben, indem die besondern Umstände entbehrlich werden, welche nöthig waren, um die Entladung einer Leidener Flasche durch die vielen Windungen der beiden Rollen des *ersten* Dynamometers wirklich sicher zu bewerkstelligen. Dieses letzte Instrument ist bisher noch nicht in derjenigen Vollkommenheit ausgeführt worden, wie es für eine solche Versuchsreihe nöthig sein würde.

Ehe ich diesen Abschnitt über die Einrichtung der Dynamometer beschliesse, will ich noch eine Bemerkung über die Verwandlung derselben in *magnetische Galvanometer* hinzufügen. Ich habe schon erwähnt, dass die für die oben beschriebene *zweite* Einrichtung benutzte, ganz in sich selbst abgeschlossene *schwebende* Säule ihre Anwendung zu *elektromagnetischen* Versuchen, nämlich um die Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter zu beobachten, schon früher gefunden habe. Mit dieser in sich abgeschlossenen schwebenden Säule, wenn man auf die Unveränderlichkeit ihres Stromes vollkommen bauen könnte, würden sich alle Versuche und Messungen über den Erdmagnetismus gerade so, wie mit dem Magnetometer ausführen lassen, und es würde ihm in so fern der Name eines *galvanischen Magnetometers* zu geben sein. Unser erstes Dynamometer lässt sich dagegen zu einem *magnetischen Galvanometer* gebrauchen, welches sogar im Vergleiche mit einem mit Multiplikator versehenen Magnetometer grosse Vorzüge darbietet, wenn es sich nicht blos um relative, sondern um *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten handelt. Bei dem mit Multiplikator versehenen Magnetometer steht der Stromleiter fest, und der Magnet ist drehbar; es ist aber ohne wesentlichen Einfluss auf die Wirkung, wenn man dies Verhältniss umkehrt und den Magnet feststellt, während der Stromleiter drehbar ist. Zu dem drehbaren Stromleiter kann nun die an zwei Aufhängungsdrähten schwebende Rolle unseres Dynamometers dienen, und zu dem festen Magnete (welcher hier die feste Rolle vertritt) kann man die Erde selbst benutzen. Soll die Erde nun aber diesen Dienst wirklich leisten, so muss die Bifilarrolle anders orientirt werden, nämlich statt wie früher, gleich einem *Declinationsmagnetometer*, so orientirt zu werden, dass ihre Axe dem magnetischen Meridian parallel ist, muss sie, gleich dem *Inten-*

sitätsmagnetometer, so orientirt werden, dass ihre Axe senkrecht auf dem magnetischen Meridiane steht. Man kann sie dann ein *magnetisches Bifilargalvanometer* nennen. Dieses einfache Instrument gewährt dann für *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten grosse Vortheile, eben dadurch, dass die Lage und Entfernung der einzelnen Theile des Leitungsdrahtes gegen die einzelnen Theile des Magneten wegen der grossen Entfernung, aus welcher der Erdmagnetismus wirkt, nicht mehr einzeln in Rechnung gezogen zu werden braucht, und daher zum Zwecke dieser absoluten Bestimmung der Stromintensität ausser der Kenntniss des Erdmagnetismus, der Ablenkung, der Schwingungsdauer und des Trägheitsmoments nach absoluten Maassen, nur die Kenntniss eines einzigen Elementes erforderlich ist, nämlich die Kenntniss des vom Drahte umschlossenen *Flächenraums,* wie ich schon in den «Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereines im Jahre 1840» S. 93 aus einander gesetzt habe, wo ich einige solche Intensitätsbestimmungen nach absolutem Maasse, welche mit diesem Instrumente gemacht worden, mitgetheilt habe.

Die bisherige Untersuchung hatte hauptsächlich den Zweck, auf *experimentellem* Wege zu Maassbestimmungen über die elektrodynamischen Kräfte zu führen, und dieselben nach den auf Raum-, Zeit- und Massenmaass reducirten *absoluten* Maassen auszudrücken. Hierdurch war die den Instrumenten gegebene Einrichtung motivirt, welche, wie bei den Magnetometern von Gauss, eine festere Aufstellung und einen grösseren Raum in Anspruch nimmt, als bei anderen physikalischen Apparaten erfordert wird, bei welchen der Maasstab an dem zu beobachtenden Instrumente unmittelbar angebracht ist. Bei einer auf jene Weise einmal zweckmässig getroffenen Einrichtung konnten einzelne grössere Versuchsreihen mit Genauigkeit ausgeführt werden; es liess sich aber diese Einrichtung nicht so leicht wieder ändern und verschiedenartigen Zwecken anpassen. Ich muss es dabei noch als einen besonders günstigen Umstand anerkennen, dass die Räumlichkeit des Leipziger physikalischen Instituts diesen Einrichtungen im Allgemeinen günstig war; dennoch musste ich zu manchen Zwecken, wie mehrfach erwähnt worden ist, für jetzt nur auf Probeversuche mich beschränken, weil nicht alle Einrichtungen auf gleich entsprechende Weise hergestellt werden konnten. Mit Rücksicht auf diese, anderwärts vielleicht noch mehr als hier, vorhandene äussere Beschränkung, und weil auch viele Experimentatoren mit solchen Instrumenten zu beobachten weniger gewohnt sind, habe ich den hiesigen Mechanikus Herrn Leyser veranlasst, dass er, zum leichteren und bequemeren Handgebrauche, kleinere portative Instrumente, ohne katoptrische Vorrichtung, auf die gewöhnliche einfache Weise mit Zeiger und getheiltem Kreise ausführe, welche zur Anstellung der meisten Versuche und zu gewöhnlichen Messungen genügen. Auf diese kleineren Instrumente mache ich diejenigen aufmerksam, welche sich mit ähnlichen Versuchen beschäftigen wollen, unter Verhältnissen, welche die Anwendung der beschriebenen Instrumente nicht gestatten.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG DER ELEKTROSTATISCHEN UND DER ELEKTRODYNAMISCHEN ERSCHEINUNGEN,

NEBST ANWENDUNG AUF DIE ELEKTRODYNAMISCHEN MAASSBESTIMMUNGEN.

18.

Da das von Ampère aufgestellte elektrodynamische Fundamentalgesetz durch genaue Messungen vollkommen bestätigt gefunden wird, so könnten die *Fundamente der Elektrodynamik* vielleicht für abgeschlossen betrachtet werden. Es würde dies mit Recht geschehen, wenn alle weiteren Forschungen nur in der Entwickelung der Anwendungen und Folgen, welche sich auf jenes Fundamentalgesetz gründen lassen, beständen. Denn könnte man auch zwar noch nach dem *Zusammenhange* fragen, welcher zwischen dem *elektrodynamischen* und *elektrostatischen* Fundamentalgesetzte bestehe; so würde doch, so interessant es auch sein möge, und so wichtig für eine genauere Kenntniss der *Natur der Körper,* diesen Zusammenhang erforscht zu haben, sich daraus nichts mehr zur Erklärung der *elektrodynamischen Erscheinungen* ergeben können, wenn diese wirklich schon ihre vollständige Erklärung in dem Ampère'schen Fundamentalgesetze gefunden hätten. Kurz, ein wesentlicher Fortschritt für die Elektrodynamik selbst würde dadurch, dass man ihr Fundament wieder auf das Fundament der Elektrostatik zurückführte, nicht erreicht werden, so wichtig und interessant auch in andern Beziehungen eine solche Zurückführung sein möchte.

Diese Ansicht von dem Abschlusse, zu welchem die Fundamente der Elektrodynamik durch Ampère's Grundgesetz und dessen Bewährung gelangt seien, setzt aber wesentlich voraus, dass wirklich *alle* elektrodynamischen Erscheinungen in jenem Grundgesetze ihre Erklärung finden. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es irgend eine Klasse von elektrodynamischen Erscheinungen, welche ihre Erklärung darin nicht fänden, so würde jenes Grundgesetz nur als ein provisorisches zu betrachten sein, welches durch ein wirklich allgemein gültiges und auf alle elektrodynamische Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz künftig zu ersetzen wäre. Und es könnte dann wohl geschehen, dass man zu diesem definitiven Grundgesetze gelangte, indem man zunächst eine Zurückführung des Ampère'schen Gesetzes auf ein allgemeineres, die Elektrostatik mit umfassendes Grundgesetz versuchte. Es wäre nämlich mög-

lich, dass aus der nämlichen Quelle, aus welcher alsdann sowohl das elektrostatische als das Ampère'sche Gesetz abgeleitet würde, unter veränderten Verhältnissen sich auch das Gesetz der übrigen elektrodynamischen Erscheinungen ergäbe, die sich auf das Ampère'sche Gesetz unmittelbar nicht zurückführen lassen, und dass dann die Fundamente der Elektrodynamik in grösster Allgemeinheit nicht abgesondert für sich, sondern nur abhängig von dem allgemeinsten, die Fundamente der Elektrostatik mit umfassenden, elektrischen Grundgesetze dargestellt würden.

Es giebt nun in der That eine solche Klasse elektrodynamischer Erscheinungen, welche, wie ich hier immer voraussetze, von Wechselwirkungen abhängen, die die Elektricitäten *aus der Ferne* auf einander ausüben, und die unter dem Ampère'schen Gesetze nicht mit enthalten sind und nicht daraus erklärt werden können, nämlich die von Faraday entdeckten Erscheinungen der *Volta-Induction*, d. h. die *Entstehung eines Stromes* in einem Leitungsdrahte durch Einwirkung eines vorhandenen Stroms, welchem er genähert wird; oder die *Entstehung eines Stromes* in einem Leitungsdrahte, wenn die Intensität des Stroms in einem andern benachbarten, Leitungsdrahte zu- oder abnimmt.

Das Ampère'sche Gesetz lässt nichts zu wünschen übrig, sobald es sich um die Wechselwirkungen von Leitungsdrähten handelt, deren Ströme eine *unveränderliche Intensität* besitzen, und die selbst *in ihrer Lage* gegen einander *beharren;* sobald aber Aenderungen von Stromintensitäten eintreten, oder die Leitungsdrähte gegen einander bewegt werden, giebt das Ampère'sche Gesetz von den Erscheinungen keine vollständige und genügende Rechenschaft; es lehrt dann nämlich blos die Wirkungen kennen, welche auf das *ponderabele* Drahtelement, nicht aber die Wirkungen, welche auf die darin enthaltene *imponderable* Elektricität statt finden. Es geht also hieraus hervor, dass dieses Gesetz nur als ein Particulargesetz Gültigkeit besitzt, und nur provisorisch für ein Grundgesetz genommen werden darf, welches durch ein wirklich allgemein gültiges, auf alle elektrodynamischen Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz noch zu ersetzen ist.

Nun ist man zwar im Stande, auch die Erscheinungen der *Volta-Induction* zum Theil voraus zu bestimmen; diese Bestimmung beruht aber nicht auf dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, sondern auf dem Fundamentalgesetze der *Magneto-Induction*, welches unmittelbar aus der Erfahrung abgeleitet werden konnte, und welches bis jetzt noch ohne einen innern Zusammenhang mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze besteht. Und zwar kann jene Vorausbestimmung der Volta-Induction aus den Gesetzen der Magneto-Induction nicht durch eine strenge Schlussfolge, sondern nach einer blossen Analogie geschehen. Da nun eine solche Analogie zwar einen vortrefflichen Leitfaden für wissenschaftliche Untersuchungen geben kann, aber selbst zu einer theoretischen Erklärung der Erscheinungen ungenügend erachtet werden muss; so ergiebt sich hieraus, dass die Erscheinungen der Volta-Induction überhaupt noch der Erklärung aus einer Theorie entbehren, und insbesondere keine solche Erklärung aus dem Ampère'schen Grundgesetz erhalten haben. Hierzu kommt noch, dass jene Vorausbestimmung der Erscheinungen der Volta-Induction sich bloss auf diejenigen Fälle erstreckt, wo die inducirende Wirksamkeit eines Stromes,

nach Analogie mit seiner elektrodynamischen Wirksamkeit, durch die Wirksamkeit eines Magneten ersetzt werden kann. Dies setzt aber *geschlossene Ströme* von unveränderlicher Gestalt voraus. Man kann aber an das Fundamentalgesetz der Volta-Induction, mit gleichem Rechte, wie Ampère bei dem Fundamentalgesetz der Wechselwirkung constanter Stromelemente gethan hat, die Forderung stellen, dass es alle Fälle enhalte, indem es eine allgemeine Bestimmung für die Wechselwirkung je zweier kleinster Elemente gebe, aus denen alle messbaren Wirkungen zusammengesetzt seien und berechnet werden können.

Wenn man sich also mit dem Zusammenhange der *elektrostatischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen beschäftigt, so braucht man sich nicht blos von dem allgemeineren wissenschaftlichen Interesse leiten zu lassen, welches es hat, in die zwischen den verschiedenen Theilen der Physik existirenden Beziehungen einzudringen, sondern man kann sich dabei ausserdem einen näher bestimmten Zweck vor Augen stellen, welcher die *Maasbestimmungen der Volta–Induction aus einem allgemeineren Grundgesetze der reinen Elektricitätslehre* betrifft. Diese Maassbestimmungen der Volta-Induction gehören nun zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen,* welche den Hauptgegenstand dieser Abhandlung bilden, welche, wenn sie vollständig sein sollen, auch die Erscheinungen der *Volta–Induction* mit umfassen müssen. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Aufstellung solcher Maassbestimmungen mit der Aufstellung der *Gesetze,* denen die betreffenden Erscheinungen unterworfen sind, auf das innigste zusammenhängt, so, dass das eine von dem anderen nicht geschieden werden kann.

19.

Um einen auf Erfahrung beruhenden, möglichst sichern Leitfaden für diese Untersuchung zu gewinnen, sollen *drei specielle Thatsachen,* die theils mittelbar auf Beobachtung beruhen, theils unmittelbar in dem durch alle Messungen constatirten Ampère'schen Fundamentalgesetze enthalten sind, zu Grunde gelegt werden.

Die *erste Thatsache* ist, dass zwei Stromelemente, welche in einer geraden Linie liegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, einander *abstossen* oder *anziehen,* je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *zweite Thatsache* ist, dass zwei parallele Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, einander *anziehen* oder *abstossen,* je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *dritte Thatsache* ist, dass ein Stromelement, welches mit einem Drahtelemente in einer geraden Linie liegt, mit welcher die Richtungen beider Elemente zusammenfallen, einen *gleich* oder *entgegengesetzt gerichteten Strom* in dem Drahtelemente inducirt, je nachdem seine eigene Stromintensität *abnimmt* oder *zunimmt.*

Diese drei Thatsachen sind zwar nicht unmittelbar durch die Erfahrung gegeben, weil sich die Wirkung eines *Elementes* auf ein anderes unmittelbar nicht beobachten lässt; sie hängen aber mit unmittelbar beobachteten Thatsachen so genau zusammen, dass sie fast gleiche Geltung als sie haben. Die beiden ersten Thatsachen sind schon unter Ampère's elektrodynamischem Fundamentalgesetze mit begriffen; die dritte ist durch Faraday's Entdeckung hinzugekommen.

Die angeführten drei Thatsachen werden als *elektrische* betrachtet, das heisst, man betrachtet die nachgewiesenen Kräfte als *Wirkungen elektrischer Massen auf einander.* Das *elektrische Gesetz* dieser Wechselwirkung ist aber noch unbekannt; denn wenn auch die beiden ersten Thatsachen unter dem Ampère'schen Gesetze mit begriffen sind, so ist doch, auch abgesehen von der dritten nicht darunter begriffenen Thatsache, das Ampère'sche Gesetz selbst in strengem Sinne *kein elektrisches Gesetz,* weil dadurch *keine elektrische Kraft* bestimmt wird, welche eine elektrische Masse auf die andere ausübe. Durch das Ampère'sche Gesetz wird blos eine auf die *ponderable Masse des Stromträgers* wirkende Kraft bestimmt. Mit den *elektrischen Kräften,* welche die durch die Stromträger strömenden *elektrischen Fluida* selbst auf einander ausüben, hat sich Ampère nicht beschäftigt, wenn er gleich wiederholt die Hoffnung ausgesprochen hat, dass die durch sein Fundamentalgesetz bestimmte Wechselwirkung der *ponderabelen Stromträger* aus den Wechselwirkungen der in ihnen enthaltenen *elektrischen Fluida* sich werde erklären lassen.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die *elektrischen Fluida* in den beiden Stromelementen selbst, so haben wir in denselben gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität, welche sich in jedem Elemente in entgegengesetztem Sinne bewegen. Diese gleichzeitige entgegengesetzte Bewegung positiver und negativer Elektricität, wie man sie in allen Theilen eines linearen Leitungsdrahtes anzunehmen pflegt, kann in der Wirklichkeit zwar nicht existiren, kann aber für unseren Zweck als eine *ideale* Bewegung angesehen werden, welche in den von uns betrachteten Fällen, wo es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelt, die wirklich vorhandenen Bewegungen in Beziehung auf alle in Betracht zu ziehenden Wirkungen *vertritt,* und dabei den Vorzug hat, sich besser der Rechnung unterwerfen zu lassen. Die wirklich vorhandenen *Seitenbewegungen,* durch welche die sich begegnenden Theilchen in dem, *keine mathematische Linie* bildenden, Leitungsdrahte einander *ausweichen,* dürfen als ohne Einfluss auf die Wirkungen *in die Ferne* betrachtet werden, daher es für unsern Zweck zulässig erscheint, an obige einfache Ansicht der Sache uns zu halten (siehe Art. 31.).

Alsdann haben wir in den *zwei* Stromelementen, die wir betrachten, *vier Wechselwirkungen* elektrischer Massen zu betrachten, *zwei abstossende,* zwischen den beiden positiven und zwischen den beiden negativen Massen in den Stromelementen, und *zwei anziehende,* zwischen der positiven Masse in dem ersten und der negativen Masse in dem zweiten, und zwischen der negativen Masse in dem ersten und der positiven Masse in dem zweiten.

Jene beiden *abstossenden* Kräfte müssten, wenn die bekannten *elektrostatischen* Gesetze eine *unbedingte Anwendung auf unsern Fall* fänden, diesen bei-

den *anziehenden* Kräften *gleich* sein, weil die gleichartigen, sich abstossenden Massen den ungleichartigen, sich anziehenden Massen gleich sind und aus gleicher Entfernung auf einander wirken. Ob aber jene bekannten *elektrostatischen* Gesetze auf unsern Fall eine *unbedingte Anwendung* finden, lässt sich *a priori* nicht entscheiden, weil diese Gesetze sich zunächst nur auf solche elektrische Massen beziehen, die sich gegen einander im *Gleichgewicht* und in *Ruhe* befinden, während unsere elektrischen Massen sich gegen einander *bewegen*. Folglich kann nur die *Erfahrung* entscheiden, ob jene elektrostatischen Gesetze eine solche *Anwendung in weiterem Kreise* auch auf unsern Fall gestatten oder nicht.

Die beiden ersten der oben angeführten *Thatsachen* beziehen sich nun zwar zunächst auf Kräfte, welche auf die *ponderabeln Stromträger* wirken; es lassen sich diese Kräfte aber als die *Resultanten* derjenigen Kräfte betrachten, welche auf die in den ponderabeln Trägern enthaltenen *elektrischen Massen* wirken. Streng genommen ist diese Betrachtung zwar nur dann zulässig, wenn diese elektrischen Massen an ihrem gemeinschaftlichen ponderabeln Träger so gebunden sind, dass sie nicht ohne ihn bewegt werden können, und weil dies in der galvanischen Kette nicht der Fall ist, sondern die elektrischen Massen sich hier auch dann bewegen, wenn ihr Träger ruhet, so hat Ampère, wie in der Einleitung S. 213 angeführt worden ist, auf diesen Umstand besonders aufmerksam gemacht, in Betracht, dass dadurch die auf den ponderabelen Träger wirkende Kraft wesentlich modificirt werden könne. Wenn aber auch die elektrischen Massen in der Richtung des Leitungsdrahtes verschiebbar sind, so sind sie doch keineswegs in dieser Richtung *frei beweglich*, sonst würden sie in der ihnen nach dieser Richtung einmal mitgetheilten Bewegung ohne neuen Antrieb (d. i. ohne fortwirkende *elektromotorische Kraft*) *beharren* müssen, was nicht der Fall ist; denn kein galvanischer Strom dauert auch bei fortdauerndem Schluss der Kette *von selbst* fort, vielmehr entspricht seine Intensität in jedem Augenblicke nur der eben vorhandenen *elektromotorischen Kraft*, wie das Ohm'sche Gesetz es bestimmt, hört also von selbst auf, sobald diese Kraft verschwindet. Hieraus folgt, dass nicht blos diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen in solchen Richtungen (senkrecht auf den Leitungsdraht) wirken, in denen sie nur mit dem ponderabelen Träger zugleich bewegt werden können, auf den letzteren übertragen werden müssen, sondern, dass das nämliche auch von solchen Kräften gelte, welche in der Richtung des Leitungsdrahtes wirken und die elektrischen Massen im Träger bewegen, nur mit dem Unterschiede, dass die letztere Uebertragung eine, wenn auch sehr kurze, Zeit erfordert, was bei der ersteren nicht der Fall ist. Die *unmittelbare* Wirkung der dem Leitungsdrahte parallelen Kräfte besteht zwar blos in einer Bewegung der elektrischen Massen nach dieser Richtung; die Wirkung dieser Bewegung ist aber ein *Widerstand* des ponderabelen Trägers, durch welchen sie in unmessbar kurzer Zeit wieder aufgehoben wird. Durch diesen *Widerstand* werden *mittelbar*, während der Zeit, wo diese Bewegung aufgehoben wird, alle Kräfte, welche zuvor diese Bewegung hervorgebracht hatten, an den, Widerstand leistenden, ponderabelen Körper übertragen. Endlich, da es sich hier um Wirkungen der Kräfte handelt, welche dem *ponderabelen* Träger selbst

eine *messbare* Geschwindigkeit zu ertheilen vermögen, so können dagegen diejenigen Wirkungen der Kräfte, welche nur momentan die *imponderabelen* Massen ein wenig verrücken, mit gleichem Rechte vernachlässigt werden, mit welchem man die *Masse der Elektricität* gegen die *Masse ihres ponderabelen Trägers* vernachlässigt. Hieraus ergiebt sich aber, dass die Kraft, welche auf den *Stromträger* wirkt, wie oben angegeben worden ist, als die *Resultante* aller Kräfte betrachtet werden darf, welche auf die im Stromträger enthaltenen *elektrischen Massen* wirken.

Dies vorausgesetzt, so lehren die *beiden ersten oben angeführten Thatsachen,* dass die *Resultante* jener 4 Wechselwirkungen der in den beiden betrachteten Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen, welche nach dem *elektrostatischen* Gesetze Null sein sollte, von Null desto mehr *verschieden* ist, je grösser die *Geschwindigkeit* ist, mit welcher die elektrischen Massen durch beide Stromelemente fliessen, d. i. je grösser die Stromintensitäten sind.

Es folgt also hieraus, dass die *elektrostatischen* Gesetze auf elektrische Massen, welche gegen einander *bewegt* werden, *keine unbedingte Anwendung* finden, sondern dass sie für die Kräfte, welche diese Massen wechselseitig auf einander ausüben, blos einen *Grenzwerth* geben, dem sich der *wahre Werth* dieser Kräfte desto mehr nähert, je geringer die gegenseitigen Bewegungen der Massen sind, von dem sich dagegen der *wahre Werth* desto mehr entfernt, je grösser die gegenseitigen Bewegungen sind. Zu dem Werthe, welchen die *elektrostatischen* Gesetze für die Kraft geben, welche *zwei elektrische Massen* auf einander ausüben, muss also noch eine *von ihrer gegenseitigen Bewegung abhängige Ergänzung* hinzukommen, wenn diese Kraft nicht blos für den Fall der gegenseitigen Ruhe und des Gleichgewichts, sondern allgemein auch für jede beliebige *Bewegung* beider Massen gegen einander richtig bestimmt werden soll. Diese *Ergänzung,* welche dem elektrostatischen Gesetze eine allgemeinere Anwendbarkeit, als es gegenwärtig besitzt, ertheilen soll, wird nun gesucht.

Die oben angeführte *erste Thatsache* lehrt ferner nun nicht blos, dass die Summe der abstossenden Kräfte der gleichartigen elektrischen Massen in den betrachteten Stromelementen von der Summe der anziehenden Kräfte der ungleichartigen Massen *verschieden* sei, sondern lehrt zugleich auch, wann die erstere Summe *grösser* und wann sie *kleiner* als die letztere sei, und es lassen sich alle daraus sich ergebenden Bestimmungen in dem einfachen Ausspruche vereinigen,

> *dass die elektrischen Massen, welche in entgegengesetztem Sinne bewegt werden, schwächer auf einander wirken, als diejenigen, welche in gleichem Sinne bewegt werden.*

Denn 1) wenn die Stromrichtung in den beiden Elementen *dieselbe* ist, so findet *Abstossung* statt, folglich müssen die *Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen schwächer sein,* als die Abstossungskräfte der gleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die ungleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. Ist aber 2) die Stromrichtung in den beiden Elementen *entgegengesetzt,* so findet *Anziehung* statt; folglich müssen die *Abstossungskräfte*

der gleichartigen Massen schwächer sein, als die Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die gleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. In beiden Fällen sind es also die *in entgegengesetztem Sinne* bewegten Massen, welche *schwächer* auf einander wirken, wodurch der obige Ausspruch bestätigt wird.

Die *erste Thatsache,* auf welche obiger Ausspruch zu beziehen war, gestattet ferner noch folgende genauere Bestimmung beizufügen,

> *dass zwei elektrische Massen desto schwächer (abstossend oder anziehend, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig sind) auf einander wirken, je grösser das Quadrat ihrer relativen Geschwindigkeit sei.*

Die *relative Geschwindigkeit* zweier elektrischen Massen kann, wenn r den Abstand beider Massen bezeichnet, durch $\frac{dr}{dt}$ ausgedrückt werden, und ist positiv oder negativ, je nachdem dadurch eine gegenseitige Entfernung oder Annäherung beider Massen bewirkt wird; da aber dieser Unterschied der Annäherung und Entfernung, oder kurz, der Unterschied des Vorzeichens von $\frac{dr}{dt}$, keinen Einfluss auf die Grösse der Kraft hat, so war es nöthig, in der eben ausgesprochenen Regel statt der relativen Geschwindigkeit selbst, ihr *Quadrat* einzuführen.

Bezeichnen e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Elementen, und u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, die je nach der Richtung des Stromes einen positiven oder negativen Werth haben, so werden $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ die ihnen zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten sein. In den unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fällen, wo alle elektrischen Massen *in einer und derselben geraden Linie* sich bewegen, ergeben sich aber die *relativen* Geschwindigkeiten aus den *absoluten* durch blosse Subtraction, nämlich für die *gleichartigen* Massen:

$+e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u - u'$,

$-e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u + u'$;

für die ungleichartigen Massen:

$+e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u + u'$,

$-e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u - u'$.

Hieraus ergiebt sich nach obigem Satze für die Wechselwirkung *gleichartiger* (sowohl der beiden positiven, als der beiden negativen) Massen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u - u')^2$$

abhängige Schwächung, im Vergleich mit der in der Elektrostatik für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts betrachteten Kraft; für die Wechselwirkung *ungleichartiger* Massen dagegen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u + u')^2$$

abhängige Schwächung. Die einfachste Form, welche das Gesetz dieser Schwächung haben kann, ist die, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts mit dem Faktor

$$\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur *vollständigeren Bestimmung der Kraft* dienen würde:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

worin e und e' positive oder negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder dem negativen Fluidum angehören. aa ist eine Constante.

Für unsern Fall ergäben sich, wenn man von dieser einfachsten Form Anwendung zu machen versuchte, folgende 4 Wechselwirkungen zwischen den elektrischen Massen in den beiden Stromelementen:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2)$

2) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2)$

3) zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2)$

4) zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2)$

Die Summe der beiden ersten Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen,* ist also

$$= +2\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2);$$

die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen,* ist

$$= -2\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach verschieden. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller 4 Wechselwirkungen, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$= +8\frac{ee'}{rr}aa.uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direct proportional den Stromintensitäten

in beiden Stromelementen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Stromlemente.

Ferner ersieht man, dass obiger Ausdruck *positiv* ist, folglich eine *Abstossung der Stromelemente* bezeichnet, wenn u und u' *beide zugleich* entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in gleichem Sinne durchflossen werden; dass aber, wenn von beiden nur *der eine positiv, der andere negativ* ist, obiger Ausdruck *negativ* werde, was eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *ersten Thatsache*.

Gehen wir nun zu der *zweiten oben angeführten Thatsache* über, so leuchtet ein, dass die eben gegebene Ergänzung des elektrostatischen Gesetzes hier nicht mehr ausreicht; denn es ergiebt sich für alle unter dieser zweiten Thatsache enthaltenen Fälle der Werth der relativen Geschwindigkeiten der elektrischen Massen

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Verfolgt man nämlich zwei elektrische Theilchen in ihren Bahnen, so ergiebt sich, dass ihre relative Entfernung bis zu dem betrachteten Augenblicke abnimmt, und von dann an wieder zunimmt, in dem betrachteten Augenblicke selbst also weder Zunahme noch Abnahme der Entfernung statt findet; folglich würde darnach für alle diese Fälle zur Bestimmung der 4 Wechselwirkungen der elektrischen Massen in beiden Stromelementen das elektrostatische Gesetz selbst, ohne eine Ergänzung, in Anwendung zu bringen sein, wonach also die beiden Stromelemente gar keine Wirkung auf einander haben sollten, was nicht der Fall ist.

Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass für diese *zweite* Klasse von Fällen, wo der Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ verschwindet, der Werth der *relativen Beschleunigung* $\frac{ddr}{dt^2}$ desto bedeutender hervortritt, während für die *erste* Klasse, wo der letztere Werth $\frac{ddr}{dt^2}$ verschwand, der erstere $\frac{dr}{dt}$ desto bedeutender hervortrat.

Nimmt man also an, dass die Grösse der Wechselwirkung bewegter elektrischer Massen, wie sie durch das elektrostatische Gesetz bestimmt wird, einer Ergänzung bedarf, die aber nicht blos von dem *Quadrate der relativen Geschwindigkeit* beider Massen $= \frac{dr^2}{dt^2}$, sondern auch von ihrer *relativen Beschleunigung* $= \frac{ddr}{dt^2}$ abhängt, so ist die einfachste Form, welche das allgemeine Gesetz der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen haben kann, diejenige, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts, mit dem Factor

$$\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2} + b\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur vollständigen Bestimmung der Kraft dienen würde:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

worin e und e' positive und negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder negativen elektrischen Fluidum angehören. aa ist dieselbe Constante wie früher, b ist eine andere von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängige Grösse, deren Werth und Vorzeichen näher zu bestimmen bleibt.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiv elektrischen Massen in beiden Stromelementen, u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Stromelemente, r den Abstand der beiden *positiven* elektrischen Massen; so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die elektrischen Massen sich bewegen, ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werthes von r folgende Gleichung:

$$rr = RR + (u - u')^2 tt,$$

folglich, weil R, u und u' constant sind,

$$r\mathrm{d}r = (u - u')^2 t\,\mathrm{d}t$$

und

$$r\mathrm{dd}r + \mathrm{d}r^2 = (u - u')^2\mathrm{d}t^2,$$

woraus sich die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* am Ende des Zeitraums t ergeben, nämlich:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{(u - u')^2}{r}t$$

$$\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(u - u')^2}{r}\left(1 - \frac{(u - u')^2}{rr}tt\right).$$

Wendet man diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, für welchen $t = 0$ ist, so erhält man die in unserm Ausdruck einzuführenden Werthe der *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung der beiden positiven Massen:*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(u - u')^2}{r},$$

folglich erhält man für die erste der 4 Wechselwirkungen, nämlich:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2\right)$.

Es leuchtet von selbst ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können, durch Substitution der entsprechenden Massen und Geschwindigkeiten; man erhält dann

2) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2\right)$

3) zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1+\frac{b}{r}(u+u')^2)$

4) zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1+\frac{b}{r}(u+u')^2)$.

Die Summe der beiden erstern Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen* ist also

$$= +2\frac{ee'}{rr}(1+\frac{b}{r}(u-u')^2);$$

Die Summe der beiden letztern Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen* aber ist

$$= -2\frac{ee'}{rr}(1+\frac{b}{r}(u+u')^2).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach *verschieden*. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller 4 Kräfte, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$= -8\frac{ee'}{rr}\cdot\frac{b}{r}\cdot uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direct proportional den Stromintensitäten in beiden Stromelementen, und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Stromelemente.

Ferner ersieht man, falls b positiv ist, dass obiger Ausdruck *negativ* sei, folglich eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichne, wenn u und u' beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in *gleichem* Sinne durchflossen werden; ist aber von beiden nur der eine positiv, der andere negativ, so wird obiger Ausdruck *positiv*, was eine *Abstossung* der Stromelemente bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *zweiten Thatsache*.

Gehen wir endlich noch auf die Ampère'sche Formel selbst zurück, welche beide Thatsachen als specielle Fälle umfasst, wonach die Abstossung zweier Stromelemente folgende ist:

$$\frac{ii'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\,ds\,ds',$$

worin die Buchstaben die S. 249 angegebene Bedeutung haben, so ergiebt sich, dass für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } = 180^\circ$$

sei, je nachdem θ und θ' *beide zugleich*

$$= 0^\circ \text{ oder } = 180^\circ$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$$= 0^\circ, \text{ der } andere = 180^\circ \text{ ist.}$$

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem Ampère'schen Gesetze

$$= \mp \tfrac{1}{2} \cdot \frac{ii'}{rr} \mathrm{d}s\mathrm{d}s'.$$

Für die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle ist

$$\varepsilon = 0^\circ \text{ oder } 180^\circ$$

je nachdem θ und θ' *beide zugleich*

$$= 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$$= 90^\circ, \text{ der } andere = 270^\circ \text{ ist.}$$

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft für die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem Ampère'schen Gesetze

$$= \pm \frac{ii'}{rr} \mathrm{d}s\mathrm{d}s'.$$

Nach dem Ampère'schen Fundamentalgesetz erhält man also (abgesehen vom Vorzeichen) für die letzteren Fälle den doppelten Werth, wie für die ersteren.

Dies ergiebt sich auch aus unsern Bestimmungen, wenn man

$$aa = \frac{1}{2}\frac{b}{r}$$

setzt, wodurch also der Werth und das Vorzeichen von b näher bestimmt sind, nämlich:

$$b = 2raa.$$

Substituirt man diesen Werth von b in unserem allgemeinen Ausdruck für die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, so ergiebt sich ihre *Abstossungskraft*

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + 2aa \cdot r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Die *dritte oben angeführte Thatsache* bezieht sich endlich nicht, wie die beiden vorhergehenden, auf Kräfte, welche blos auf den *Stromträger* wirken, sondern vielmehr auf Kräfte, welche auf die *elektrischen Massen* selbst wirken und sie in ihrem Träger bewegen, indem sie ungleichartige Massen zu scheiden streben, d. i. auf *elektromotorische* Kräfte, welche von bewegten elektrischen Massen in einem galvanischen Leiter auf ruhende Elektricitäten in einem andern Leiter ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber nicht allein durch das *elektrostatische* Grundgesetz, sondern auch durch das Ampère'sche *elektrodynamische* Grundgesetz *nicht bestimmt*, weil *letzteres* blos auf die an die Stromträger übertragenen Kräfte Beziehung hat, *ersteres*, wenn es Anwendung fände, den Werth der elektromotorischen Kraft = 0 ergäbe. Es bilden also diese Kräfte eine wesentlich *neue Klasse*, die man erst durch *Faraday's Entdeckung* hat kennen lernen.

Betrachten wir auch hier wieder blos die *elektrischen Massen* sowohl in dem Stromelemente, als auch in dem stromlosen Elemente, so haben wir in

jedem derselben wiederum gleiche Massen positiver und negativer Elektricität, und zwar bewegen sich jederzeit in dem Stromelemente diese beiden Massen mit gleich grosser Geschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne, und diese Geschwindigkeiten nehmen auch gleichzeitig um gleich viel zu oder ab; in dem stromlosen Elemente sind dagegen beide Massen noch in Ruhe und Gleichgewicht. Zwischen diesen 4 Massen sind nun ferner auch wieder 4 Wechselwirkungen zu unterscheiden, nämlich zwei abstossende und zwei anziehende, jene zwischen den *gleichartigen* Massen, diese zwischen den *ungleichartigen*.

Aus dem *Factum* nun, dass ein Strom in dem Elemente *entsteht*, in welchem bisher kein Strom vorhanden war, müssen wir schliessen, dass auf die *positive* elektrische Masse in diesem Elemente nach der Richtung des letzteren *eine andere Kraft* wirken müsse, als auf die *negative* Masse, weil jene Massen nur durch eine solche *Differenz* der auf sie wirkenden Kräfte diejenige *entgegengesetzte* Bewegung erhalten können, in welcher der zur Erscheinung kommende Strom wesentlich besteht. Wir sprechen hiernach das Factum zunächst so aus,

> *dass die Summe der beiden Kräfte, welche von der positiven und negativen elektrischen Masse in dem Stromelemente auf die ruhende positive Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausgeübt werden, verschieden sei von der Summe derjenigen beiden Kräfte, welche dieselben Massen in dem erwähnten Stromelemente auf die ruhende negative Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausüben; dass aber die Differenz beider Summen, d. i. die elektromotorische Kraft selbst, abhängig sei von der Geschwindigkeitsänderung der beiden elektrischen Massen in dem gegebenen Stromelemente und mit dieser Aenderung zugleich wachse oder abnehme und verschwinde.*

Auch diese *dritte Thatsache* führt also darauf, den durch das *elektrostatische* Gesetz bestimmten elektrischen Kräften noch *eine von ihrer Bewegung abhängige Ergänzung* beizufügen, und es fragt sich nur, ob hieraus gerade diejenige Ergänzung gerechfertigt werde, welche auf die beiden ersten Thatsachen gegründet worden ist. Diese *dritte Thatsache* giebt also einen *Prüfstein* für die schon gefundenen Resultate und ist zu deren Verwerfung oder festeren Begründung besonders geeignet.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Drahtelementen, u und 0 die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und 0 deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Drahtelemente, r den Abstand der beiden positiven elektrischen Massen: so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die Masse e sich mit veränderlicher Geschwindigkeit u von der ruhenden Masse e' entfernt, oder ihr nähert, so ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werths von r,

$$r = R \pm \int_0^t u\,dt,$$

wo das *obere* Vorzeichen gilt, wenn die Masse e auf der positiven Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit noch weiter von ihr entfernt wird; dagegen wenn die Masse e auf der negativen Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit ihr genähert wird, das untere Vorzeichen gilt.

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\mathrm{d}r = \pm u\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{dd}r = \pm \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

Hiernach sind also die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* beider Massen am Ende des Zeitraums t:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm u$$

$$\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2} = \pm \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t};$$

worin u und du Functionen von t sind. Wendet man nun diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, und bezeichnet man die Werthe, welche u und du annehmen, wenn $t = 0$ gesetzt wird, mit u_0 und du_0, so ergiebt sich nach dem allgemeinen Gesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, zu welchem die *beiden ersten Thatsachen* geführt haben, als erste der 4 Wechselwirkungen:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \pm 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Es leuchtet auch ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können durch Substitution der entsprechenden Massen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen; man erhält dann:

2) zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \mp 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$

3) zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \pm 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$

4) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \mp 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Die Summe der beiden ersteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *positive Masse* $+e'$ in *dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte, ist also

$$= \pm 4\frac{ee'}{r}aa\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

Die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *negative Masse* $-e'$ *in dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte aber

$$= \mp 4\frac{ee'}{r}aa\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

Diese beiden Summen sind dadurch verschieden, dass sie *entgegengesetzte* (Abstossung und Anziehung unterscheidende) *Vorzeichen* haben. Ihre *Differenz* giebt die *elektromotorische Kraft*, welche die positive und negative Masse in dem stromlosen Elemente zu scheiden sucht,

$$= \pm 8 \frac{ee'}{r} aa \frac{du_0}{dt},$$

d. h. die *elektromotorische Kraft* ist direct proportional der im betrachteten Augenblicke selbst eintretenden Aenderung der Stromgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Abstande des Stromelementes von dem stromlosen Elemente.

Ferner was die doppelten Vorzeichen unsers Ausdruckes für die *elektromotorische Kraft* betrifft, so können diese dadurch beseitigt werden, dass man sie auf den Abstand r bezieht und also diesem selbst positive und negative Werthe beilegt, indem man r von der Stelle der ruhenden Masse e' als Anfangspunkt aus rechnet, und zwar als positive Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus gerechnet auf der positiven Seite (nach welcher die positiven Geschwindigkeiten gerichtet sind) liegt, als negative Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus auf der negativen Seite liegt. Bezeichnet z. B. Fig. 15. A die Stelle der ruhenden Masse e', ist BAC die ge-

Fig. 15.

B A C

gebene Richtungslinie und wird die Seite, auf welcher C liegt, als die positive Seite zum Grunde gelegt, so ist r positiv, wenn die Masse e im Punkte C, negativ, wenn die Masse e im Punkte B sich befindet.

Wenn also in B und C zwei gleiche Stromelemente sich befinden, welche von der Elektricität *in gleichem Sinne* durchflossen werden, und deren Stromintensität gleichzeitig um gleich viel wächst oder abnimmt; so werden diese beiden Stromelemente von entgegengesetzten Seiten auf die ruhenden elektrischen Massen in A entgegengesetzte elektrische Kräfte in der Art ausüben, dass diejenige Masse, welche von C aus abgestossen wird, von B aus angezogen wird und umgekehrt; die Kraft, welche die ruhende positive und negative elektrische Masse in A zu scheiden sucht, wird also durch Zusammenwirken der beiden Stromelemente in B und C *verdoppelt.*

Endlich, wenn r positiv ist, wenn z. B. das Stromelement in C sich befindet, und wenn ferner u und du beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die absolute Stromgeschwindigkeit in C, abgesehen von der Richtung, welche sie hat, zunimmt, so hat obiger Ausdruck einen positiven oder negativen Werth, je nachdem u einen positiven oder negativen Werth hat, d. h. also, bei *wachsender* Stromintensität wirkt von C aus eine *elektromotorische Kraft* auf die positive elektrische Masse in A abstossend oder anziehend, je nachdem der Strom in C selbst nach vorwärts oder rückwärts gerichtet ist, und erregt also in A einen Strom *in entgegengesetztem Sinne* als den in C vorhandenen. Das entgegengesetzte findet statt, wenn von u und du nur der eine Werth positiv, der andere negativ ist, d. h. wenn die Stromintensität in C, abgesehen von der Richtung des Stroms, *abnimmt,* wo dann in A ein Strom *in gleichem Sinne* als der in C vorhandene, erregt wird, ganz entsprechend den in der oben angeführten *dritten Thatsache* enthaltenen Bestimmungen.

Es geht hieraus also hervor, dass diese *dritte Thatsache* das aus den beiden ersten abgeleitete Resultat bestätige, indem *dieselbe Ergänzung* des elektrostatischen Gesetzes zu einem allgemeinen Gesetze, welche zur Erklärung der beiden ersten Thatsachen diente, auch zur Erklärung der dritten genügt.

20.

Dem Leitfaden der Erfahrung folgend haben wir in dem vorigen Artikel den elektrostatischen Ausdruck für die abstossende oder anziehende Kraft, mit welcher zwei gleichartige oder ungleichartige elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken, so zu ergänzen gesucht, dass derselbe nicht blos dann, wenn beide Massen gegen einander ruhen, sondern auch wenn sie gegen einander bewegt sind, Anwendung finde. Wir haben diese Ergänzung an einzelnen Thatsachen geprüft und bestätigt gefunden und werden in den folgenden Artikeln diese Prüfung in grösserer Allgemeinheit ausführen.

Die Richtigkeit des Resultates, zu dem wir gelangt sind, vorausgesetzt, ergäbe sich hier ein Fall, wo die Kraft, mit welcher zwei Massen auf einander wirken, nicht blos von *der Grösse der Massen und ihrer Entfernung* von einander abhinge, sondern auch von ihrer *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung*. Die Berechnung dieser Kräfte wird dadurch in vielen Fällen auf grössere mathematische Schwierigkeiten stossen, als die Berechnung solcher Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen. Auch dürfte wohl erwartet werden, wenn diese Abhängigkeit der elektrischen Kräfte, nicht blos von der Grösse der elektrischen Massen und ihren Entfernungen, sondern auch von ihren relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, fest begründet wäre, dass die nämliche Abhängigkeit, wenn auch in geringerem Maasse, sich bei andern Kräften nach genauerer Untersuchung finden würde.

Es würde dadurch in die Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen ein ganz neues Element eingeführt, und das Bereich der Kräfte, zu deren Bestimmung dies neue Element in Rechnung gezogen werden müsste, würde eine eigenthümliche Klasse bilden, die eine besondere Untersuchung erforderte.

Wenn es aber auch zum Zweck der Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen sehr wünschenswerth erscheinen dürfte, dass das Bereich derjenigen Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen, möglichst weit ausgedehnt wäre, so kann doch *nur die Erfahrung* entscheiden, ob andere Kräfte, welche ausserdem auch von den gegenseitigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Massen abhängig seien, als vorhanden angenommen werden müssen, oder nicht. *A priori* lässt sich diese Frage nicht entscheiden, weil formell in der Annahme solcher Kräfte weder ein Widerspruch, noch irgend etwas Unklares oder Unbestimmtes enthalten ist.

Man nennt die Gesetze der Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen *physische Fundamentalgesetze,* und dieselben sollen, dem

Zwecke der Physik gemäss, nicht dazu dienen, eine *Erklärung* von den Kräften aus ihren wahren Gründen zu geben, sondern nur eine deutlich dargelegte und brauchbare allgemeine Methode zur *quantitativen* Bestimmung der Kräfte nach den in der Physik für Raum und Zeit festgesetzten Grundmaassen. Daher kann man vom physikalischen Standpunkte aus daran keinen Anstoss nehmen, dass eine Kraft zur Function *eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses* gemacht wird, eben so wenig, wie dass sie zur Function einer *Entfernung* gemacht wird, weil ein von der Zeit abhängiges Verhältniss eine eben so messbare Grösse ist, wie eine Entfernung: beide also ihrer Natur nach zu scharfer *quantitativer* Bestimmung geeignet, wenn auch ungeeignet, den *inneren Grund* einer Kraft darin zu suchen.

Es lässt sich hiernach gegen die Einführung eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft höchstens die *Analogie anderer Fundamentalgesetze* der Physik, z. B. des Gravitationsgesetzes, geltend machen, wo dies nicht geschieht. Jedoch kann eine solche Analogie nur dann als bindend angesehen werden, wenn sie Mittel und Wege darbietet, zum Ziele zu gelangen, wo aber die Analogie bekannter Fälle nicht ausreicht, müssen der Natur der Sache nach neue Wege versucht werden.

Wenn also die Einführung solcher *von der Zeit abhängiger Verhältnisse* in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft überhaupt nicht verworfen werden kann, so dürfte dies um so weniger dann der Fall sein, wenn jene Verhältnisse zur vollständigen Bestimmung des *vorhandenen Zustandes* der auf einander wirkenden Massen wesentlich gehören, da doch jedenfalls die Kraft, welche zwei Massen auf einander ausüben, da sie *nicht immer* dieselbe bleibt, von dem *zur Zeit vorhandenen Zustande* beider Massen abhängig gedacht werden muss. Zur vollständigen Bestimmung des gegenwärtigen Zustandes zweier Massen gehört aber wesentlich ausser der Bestimmung ihrer *relativen Lage* durch ihre gegenseitige Entfernung r, auch die Bestimmung ihrer *relativen Bewegung* durch ihre relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$. Denn schon nach dem Principe der Beharrung kann man nicht umhin, die Geschwindigkeit eines Körpers wesentlich zu seinem gegenwärtigen Zustande zu rechnen, weil der Grund der Beharrung nach jenem Principe in dem Körper selbst liegt, und folglich dem Beharren in *verschiedener* Bewegung *verschiedene* innere Zustände des Körpers entsprechen müssen, die, unserer Beobachtung selbst unzugänglich, nur durch ihre mit der Zeit hervortretenden Wirkungen unterschieden werden können.

21.

Transformation des Ampère'schen Gesetzes.

Was in den vorhergehenden Artikeln an einigen speciellen Thatsachen, soll nun allgemeiner und genauer an allen unter dem Ampère'schen Gesetze enthaltenen Thatsachen nachgewiesen werden. Das Ampère'sche Gesetz bestimmt die *Totalwirkung*, welche ein Stromelement auf das andere ausübt, in

ihrer Abhängigkeit von dem *Abstande* beider Elemente von einander, von ihren beiden *Stromintensitäten* und von den 3 *Winkeln* ihrer beiden Stromrichtungen unter einander und mit der beide Elemente verbindenden Geraden. Soll nun eine Zurückführung dieser so bestimmten *Totalwirkung* auf *elektrische Elementarkräfte* möglich sein, so muss *erstens* die Ampère'sche Formel sich in mehrere Theile zerlegen lassen, welche den Wirkungen *je zweier elektrischer Massen* in beiden Stromelementen entsprechen, im Einzelnen nämlich der Wirkung der positiven Masse des einen Elements auf die positive des anderen, der negativen Masse des einen Elements auf die negative des anderen, der positiven Masse des ersteren auf die negative des letzteren, und endlich der negativen Masse des ersteren auf die positive des letzteren. *Zweitens* muss jeder dieser Theile, als *elektrische Elementarkraft,* ganz von solchen Grössen abhängig sein, welche ausschliesslich dem Wesen und den gegenseitigen Verhältnissen der beiden elektrischen Massen, auf die er bezogen wird, angehören und dadurch vollständig und unabhängig von anderen Umständen bestimmt sind. *Drittens* endlich müssten alle diese *elektrischen Elementarkräfte* unter ein *allgemeines Gesetz* gebracht werden können. Es ist aber nicht nöthig, über dieses allgemeine Gesetz im Voraus irgend eine Hypothese zu machen: vielmehr müsste das Ampère'sche Gesetz nach solcher Umgestaltung unmittelbar zum Ausspruch dieses allgemeinen Gesetzes führen und über Zulässigkeit oder Unzulässigkeit einer jeden darüber im voraus aufgestellten Hypothese entscheiden. Es soll zunächst folgende Frage beantwortet werden:

> ob die Ampère'sche Formel eine solche Transformation gestatte, dass die darin enthaltenen Stromintensitäten i und i', und die Winkel ε, θ und θ', welche die beiden Stromelemente unter sich und mit der beide Elemente verbindenden Geraden einschliessen, daraus verschwinden, und statt derselben nur solche neue Grössen eingeführt werden, welche sich ganz und ausschliesslich auf die elektrischen Massen selbst und deren gegenseitige Verhältnisse beziehen.

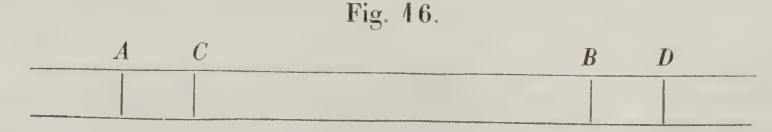
Diese Transformation wird hier nun wirklich ausgeführt und sodann geprüft werden, ob der auf solche Weise transformirte Ausdruck der elektrodynamischen Kraft die verlangte Zerlegung in 4 Theile, welche 4 partiellen Wirkungen entsprächen, aus denen die Totalwirkung zusammen gesetzt wäre, gestatte.

Die Ampère'sche Formel für die abstossende Kraft zweier Stromelemente ist folgende:

$$-\frac{ii}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').\,ds\,ds',$$

worin die Buchstaben die Art. 8. S. 249 angegebene Bedeutung haben.

Fig. 16.



AB Fig. 16. sei ein Stück des einen Leitungsdrahts von der Länge $= 1$, und die Menge der darin gleichförmig vertheilten positiven Elektricität werde mit

e bezeichnet, so dass $e\,ds$ die Masse der positiven Elektricität ist, welche das Stromelement enthält, dessen Länge $= ds$ ist.

Mit der constanten Geschwindigkeit u, welche alle positiven Elektricitätstheile im Leitungsdrahte AB beim Durchgang eines constanten Stromes besitzen, legen in 1 Secunde die vordersten den Weg BD, die hintersten den Weg AC zurück, und die elektrische Masse e, welche im Anfang der Secunde im Stücke $AB = 1$ gleichförmig vertheilt war, befindet sich am Ende der Secunde im Stücke $CD = 1$ gleichförmig vertheilt. Durch den Querschnitt des Leitungsdrahts bei B ist folglich während der Secunde alle Elektricität durchgegangen, welche am Ende der Secunde auf der anderen Seite von B das Stück $BC = u$ des Leitungsdrahts erfüllt. Es kann nun diese Elektricität, der im Anfang von Art. 2. gegebenen Definition von der Stromintensität i gemäss (wonach dieselbe der Menge Elektricität proportional ist, welche während einer Secunde durch einen Querschnitt der Kette geht), $= \frac{i}{a}$ gesetzt werden, wo a eine Constante bezeichnet. Es ergiebt sich dann

$$\frac{i}{a} : e = u : 1,$$

folglich $i = aeu$. Der Werth von a ist ein anderer als Art. 19.

Ebenso ergiebt sich, wenn u' die Strömungsgeschwindigkeit der Elektricität im anderen Leitungsdrahte bezeichnet,

$$i' = ae'u'.$$

Substituirt man diese Werthe in der Ampère'schen Formel, so wird dieselbe

$$-\frac{eds \,.\, e'ds'}{rr} \,.\, aauu'\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

wo also der erste Faktor $\frac{eds\,.\,e'ds'}{rr}$ das Produkt zweier auf einander wirkender *elektrischer Massen* in den beiden Stromelementen dividirt durch das Quadrat ihrer *Entfernung* bezeichnet.

Ferner hat Ampère in seiner Abhandlung S. 207 schon gezeigt, dass

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos\theta' = -\frac{dr}{ds'}$$

und

$$\cos\varepsilon = -r\frac{ddr}{ds\,ds'} - \frac{dr\,dr}{ds\,ds'}$$

sei. Substituirt man diese Werthe, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{rr} \,.\, aauu'\left(\tfrac{1}{2}\frac{dr\,dr}{ds\,ds'} - r\frac{ddr}{ds\,ds'}\right).$$

Es liege das Element ds des Leitungsdrahts ABS Fig 17. bei B; in A werde der Anfangspunkt des Leitungsdrahts gesetzt, folglich $AB = s$. Das Element ds' des Leitungsdrahts $A'B'S'$ liege bei B, A' sei der Anfangspunkt

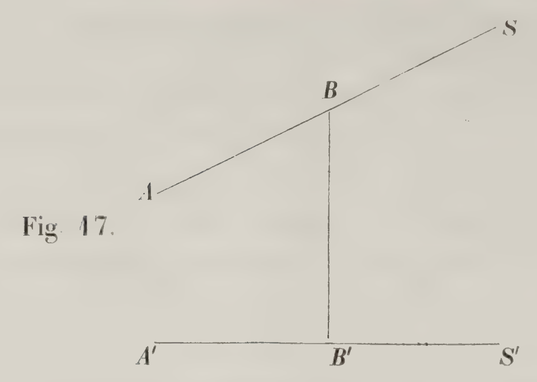


Fig. 17.

dieses Drahts, $A'B' = s'$ und $BB' = r$. Die letzte Grösse r ist, wenn die Leitungsdrähte ABS und $A'B'S'$ gegeben sind, eine Function von s und s', und man erhält für dr und dd$r$ folgende Ausdrücke:

$$dr = \frac{dr}{ds}ds + \frac{dr}{ds'}ds'$$

$$ddr = \frac{ddr}{ds^2}ds^2 + 2\frac{ddr}{ds\,ds'}ds\,ds' + \frac{ddr}{ds'^2}ds'^2.$$

Bedeutet nun s und s' die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den betrachteten Stromelementen selbst, so haben s und s' für zwei gegebene Stromelemente constante Werthe. s und s' können aber auch die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den in den betrachteten Stromelementen gerade jetzt befindlichen, aber durch dieselben weiter strömenden *elektrischen Massen* bedeuten. In dieser letzteren Bedeutung sind s und s' veränderlich mit der Zeit t, und man hat dann

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{ddr}{ds^2}\cdot\frac{ds^2}{dt^2} + 2\frac{ddr}{ds\,ds'}\cdot\frac{ds\,ds'}{dt^2} + \frac{ddr}{ds'^2}\cdot\frac{ds'^2}{dt^2}.$$

Hierin ist $\frac{ds}{dt}$ das Wegelement der elektrischen Masse dividirt durch das Zeitelement, in welchem es durchlaufen wird, d. i. die *Geschwindigkeit* der elektrischen Masse, und es ist also $\frac{ds}{dt} = u$, wenn die *positive* Masse zunächst betrachtet wird. Eben so ist dann $\frac{ds'}{dt} = u'$. Substituirt man diese Werthe, so ist

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{dr}{ds} + u'\frac{dr}{ds'},$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = uu\frac{ddr}{ds^2} + 2uu'\frac{ddr}{ds\,ds'} + u'u'\frac{ddr}{ds'^2}.$$

Aus der letzteren Gleichung und aus der von der ersteren abgeleiteten

$$\frac{dr^2}{dt^2} = uu\frac{dr^2}{ds^2} + 2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'} + u'u'\frac{dr^2}{ds'^2}$$

ergeben sich für $2uu'\frac{ddr}{ds\,ds'}$ und $2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}$ folgende Werthe:

$$2uu'\frac{ddr}{ds\,ds'}=\frac{ddr}{dt^2}-uu\frac{ddr}{ds^2}-u'u'\frac{ddr}{ds'^2},$$

$$2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}=\frac{dr^2}{dt^2}-uu\frac{dr^2}{ds^2}-u'u'\frac{dr^2}{ds'^2},$$

woraus folgt:

$$uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}-r\frac{ddr}{ds\,ds'}\right)=\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds'^2}\right)u'u'.$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{rr}aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Bei dieser Transformation der Ampère'schen Formel sind zunächst blos die *positiven elektrischen Massen,* welche in ihren Bahnen mit den Geschwindigkeiten u und u' sich bewegten, eingeführt worden. Es leuchtet ein, dass man statt der positiven elektrischen Massen auch die *negativen* einführen könne. Es ergiebt sich dann, wenn dies für beide Stromelemente zugleich geschieht, beide eingeführten Massen also wiederum *gleichartig* sind, ihre Geschwindigkeiten aber, den für galvanische Ströme S. 311 gegebenen Bestimmungen gemäss, beide zugleich die entgegengesetzten Werthe, nämlich $-u$ und $-u'$, erhalten, wiederum der nämliche Ausdruck. Denn bezeichnet r_1, ς und ς' für die *negativen* Massen dasselbe, was r, s und s' für die *positiven,* so erhält man zunächst die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{r_1r_1}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{d\varsigma^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma'^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{d\varsigma'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Für den betrachteten Augenblick, wo jene *positiven* (auf welche r, s und s' bezogen werden) und diese *negativen* (auf welche r_1, ς und ς' bezogen werden) Massen durch die nämlichen Stromelemente gehen, ist aber

$$r=r_1,\quad s=\varsigma,\quad s'=\varsigma'.$$

Ferner ist auch

$$\frac{dr_1}{d\varsigma}=\frac{dr}{ds},\quad \frac{ddr_1}{d\varsigma^2}=\frac{ddr}{ds^2},\quad \frac{dr_1}{d\varsigma'}=\frac{dr}{ds'},\quad \frac{ddr_1}{d\varsigma'^2}=\frac{ddr}{ds'^2},$$

weil alle diese Werthe blos von der Lage des von jenen *positiven* und diesen *negativen* Massen zugleich durchflossenen Stromelementen abhängig, von der Bewegung der Massen in diesen Stromelementen aber unabhängig sind. Endlich ist

$$\frac{d\varsigma}{dt}=-u=-\frac{ds}{dt},\qquad \frac{d\varsigma'}{dt}=-u'=-\frac{ds'}{dt},$$

folglich ist

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_1}{d\varsigma}\cdot\frac{d\varsigma}{dt}+\frac{dr_1}{d\varsigma'}\cdot\frac{d\varsigma'}{dt}=-\left(\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt}\right)=-\frac{dr}{dt},$$

woraus sich

$$\frac{dr_1^2}{dt^2}=\frac{dr^2}{dt^2}$$

ergiebt. Ebenso findet man

$$\frac{ddr_1}{dt^2} = \frac{ddr}{dt^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht der letztere Ausdruck in den früheren über.

Anders verhält es sich aber bei Einführung einer *positiven* und einer *negativen* Masse, d. h. bei *ungleichartigen* Massen. Hält man sich bei dem ersten Stromelemente an die *positive*, bei dem zweiten an die *negative* Masse, und bezeichnet mit r_2 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_2 r_2}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{ddr_2}{dt_2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{ddr_2}{ds^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{d\varsigma'^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{ddr_2}{d\varsigma'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Hält man sich dagegen bei dem ersten Stromelemente an die *negative*, bei dem zweiten an die *positive* Masse, und bezeichnet mit r_3 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_3 r_3}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{ddr_3}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{d\varsigma^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{ddr_3}{d\varsigma^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{ddr_3}{ds'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Hierin ist nun ebenfalls $r_2 = r_3 = r$,

$$\frac{dr_2}{ds} = \frac{dr_3}{d\varsigma} = \frac{dr}{ds}, \qquad \frac{ddr_2}{ds^2} = \frac{ddr_3}{d\varsigma^2} = \frac{ddr}{ds^2}$$

$$\frac{dr_2}{d\varsigma'} = \frac{dr_3}{ds'} = \frac{dr}{ds'}, \qquad \frac{ddr_2}{d\varsigma'^2} = \frac{ddr_3}{ds'^2} = \frac{ddr}{ds'^2},$$

es ergiebt sich aber

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_2}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{dr_2}{d\varsigma'}\cdot\frac{d\varsigma'}{dt} = +\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} - \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{dr_3}{dt} = \frac{dr_3}{d\varsigma}\cdot\frac{d\varsigma}{dt} + \frac{dr_3}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt} = -\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt} = -\frac{dr_2}{dt},$$

folglich ist $\frac{dr_2^2}{dt^2} = \frac{dr_3^2}{dt^2}$, von $\frac{dr^2}{dt^2}$ verschieden. Eben so findet man $\frac{ddr_2}{dt^2} = \frac{ddr_3}{dt^2}$, von $\frac{ddr}{dt^2}$ verschieden. Durch Substitution dieser Werthe erhält man, in beiden Fällen wo man *ungleichartige* Massen einführt, den nämlichen Ausdruck für die Ampère'sche Formel, nämlich:

$$+\,eds.\,e'ds'.aa\left\{\frac{1}{r_2 r_2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds^2}\right)\frac{uu}{rr}-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds'^2}\right)\frac{u'u'}{rr}\right\}.$$

Da nun beide Ausdrücke, sowohl der frühere, welcher durch Einführung *gleichartiger*, als dieser letztere, welcher durch Einführung *ungleichartiger* Massen erhalten wurde, die Kraft darstellen, mit welcher zwei Stromelemente auf einander wirken, beide mit der Ampère'schen Formel identisch, so wird man aus ihnen für die nämliche Kraft noch einen dritten, ebenfalls mit der Ampère'schen Formel identischen Ausdruck ableiten, wenn man ihre halbe Summe nimmt, das ist

$$-\frac{aa}{2}\frac{eds\,.\,e'ds'}{rr}\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{dt}\right)+\frac{aa}{2}\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_2 r_2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right).$$

Dieser letzte, der Ampère'schen Formel gleiche, Ausdruck ist die gesuchte *Transformation.* Denn es sind dadurch aus der Ampère'schen Formel die Grössen i, i', ε, θ und θ' eliminirt, und nur solche Grössen statt derselben eingeführt worden, welche theils die *gleichartigen*, theils die *ungleichartigen* elektrischen Massen selbst und ihre gegenseitigen Verhältnisse betreffen.

Dieser *transformirte* Ausdruck der Ampère'schen Formel lässt sich nun auch als eine Summe von 4 Theilen darstellen, welche als die *elektrischen Elementarkräfte* betrachtet werden können, nämlich auf folgende Weise

$$+\frac{eds\,.\,e'ds'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } +eds \text{ auf } +e'ds';$$

$$+\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_1 r_1}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } -eds \text{ auf } -e'ds';$$

$$-\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_2 r_2}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } +eds \text{ auf } -e'ds';$$

$$-\frac{eds\,.\,e'ds'}{r_3 r_3}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_3\frac{ddr_3}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } -eds \text{ auf } +e'ds'.$$

Jede dieser 4 partiellen Wirkungen reducirt sich für den Fall der Ruhe, wo $\frac{dr}{dt}=\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_2}{dt}=\frac{dr_3}{dt}=0$ und ebenso $\frac{ddr}{dt^2}=\frac{ddr_1}{dt^2}=\frac{ddr_2}{dt^2}=\frac{ddr_3}{dt^2}=0$ ist, auf den nämlichen Werth, wie er für diesen Fall durch das Fundamentalgesetz der *Elektrostatik* bestimmt wird; jede dieser 4 Kräfte wird dann nämlich durch das Produkt der Massen, welche auf einander wirken, dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung ausgedrückt. Je nachdem jenes Produkt einen positiven oder negativen Werth hat, wirkt die Kraft abstossend oder anziehend.

Bezeichnet man, wie in der Elektrostatik, die elektrischen Massen schlechtweg durch e und e', und legt diesen Massen selbst positive oder negative Werthe bei, je nachdem sie dem positiven oder negativen Fluidum angehören, so können alle jene partiellen Wirkungen unter das *allgemeine Gesetz* gebracht werden, wonach die abstossende Kraft jener Massen dargestellt wird durch

$$\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Es folgt also aus dieser Analyse des Ampère'schen Gesetzes, welches ein präciser Ausdruck einer sehr umfangreichen Klasse von Thatsachen ist, das nämliche *elektrische Grundgesetz,* welches in den vorhergehenden Artikeln blos nach Anleitung einzelner Thatsachen aufgestellt wurde, und es ergiebt sich dieses ohne Hypothese.

22.

Theorie zweier constanter Stromelemente.

Zu dem im vorigen Artikel ausgesprochenen *elektrischen Grundgesetze* gelangt, können wir es an die Spitze der Elektricitätslehre stellen und daraus synthetisch ein System von Folgerungen ableiten, welches der letzte Zweck eines solchen Gesetzes ist.

Die Folgerungen, welche sich für *ruhende* Elektricität daraus ableiten lassen, findet man in Poisson's klassischer Abhandlung in den *Mémoires de l'académie des sciences de l'institut de France.* Année 1812 entwickelt, denn obiges Grundgesetz ist für den Fall der Ruhe mit demjenigen Gesetze, welches Poisson a. a. O. an die Spitze der Elektrostatik gestellt hat, identisch.

Für *bewegte* Elektricität ist zuerst die *gleichförmige* Bewegung der Elektricität galvanischer Ströme in ruhenden Leitern zu betrachten, auf welche sich das Ampère'sche Gesetz bezieht. Da nun aus Ampère's Gesetze analytisch das obige elektrische Grundgesetz entwickelt worden ist, so muss aus diesem Grundgesetze wieder synthetisch das Ampère'sche Gesetz folgen. Diese Folgerung soll wirklich hier gegeben werden.

In zwei Stromelementen α und α', welche mit der sie verbindenden Geraden in Ebenen liegen, welche den Winkel ω mit einander machen, sind 4 *elektrische Massen* gegeben, nämlich in jedem Stromelemente eine *positive* und eine *gleich grosse negative.*

Für das Element α bezeichne $+\alpha e$ die *positive* Masse, welche mit der constanten Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des Elements α sich bewegt, welche mit der vom ersten Elemente zum zweiten gerichteten Geraden r den Winkel θ einschliesst; für dasselbe Element bezeichne $-\alpha e$ die *negative* Masse, welche in der nämlichen Richtung mit der constanten Geschwindigkeit $-u$, das heisst rückwärts, sich bewegt.

Die accentuirten Buchstaben $\pm\alpha' e'$, $\pm u'$ und θ' bezeichnen dasselbe für das andere Element α', was die nicht accentuirten für das erstere Element α.

Zwischen diesen 4 Massen sind folgende 4 Wirkungen zu betrachten:

$$\begin{aligned}
&\text{von } +\alpha e \text{ auf } +\alpha' e' \\
&\text{von } -\alpha e \text{ auf } -\alpha' e' \\
&\text{von } +\alpha e \text{ auf } -\alpha' e' \\
&\text{von } -\alpha e \text{ auf } +\alpha' e'.
\end{aligned}$$

Die 4 Entfernungen dieser auf einander aus der Ferne wirkenden Massen sind in dem betrachteten Augenblicke, wo alle diese Massen in den beiden gegebenen Elementen α und α' sich befinden, der gegebenen Entfernung dieser beiden Elemente r gleich. Diese 4 Entfernungen, weil sie nicht immer gleich bleiben, wegen der verschiedenen Bewegungen der Massen, werden durch r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet, und es ist also in dem betrachteten Augenblicke

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r.$$

Die Anwendung des am Ende des vorigen Artikels angegebenen Grundgesetzes giebt dann unmittelbar die Werthe dieser 4 partiellen Wirkungen, der Reihe nach,

$$+\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_1 r_1}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_2 r_2}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_3 r_3}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_3\frac{ddr_3}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_4 r_4}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_4\frac{ddr_4}{dt^2}\right)$$

Diese 4 Kräfte werden von den elektrischen Massen $+\alpha' e'$ und $-\alpha' e'$, auf welche sie unmittelbar wirken, nach Art. 19. S. 309 an die ponderable Masse des Elements α' übertragen, und setzen sich darin zu einer Resultante zusammen, welche der algebraischen Summe jener Kräfte gleich ist. Diese Summe ist, mit Rücksicht auf die schon erwähnte Gleichheit der Entfernungen,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Rückt nun die Masse $+\alpha e$ in dem Zeitelemente $\mathrm{d}t$ mit der Geschwindigkeit $+u$ um das Wegelement $+u\,\mathrm{d}t$ in ihrer Bahn fort, welche mit der Geraden r_1 den Winkel θ einschliesst, während die Masse $+\alpha' e'$ in demselben Zeitelemente $\mathrm{d}t$ mit der Geschwindigkeit $+u'$ um das Wegelement $+u'\mathrm{d}t$ in ihrer Bahn fortrückt, welche mit der verlängerten Geraden r_1 den Winkel θ' einschliesst, und projicirt man diese kleinen Verschiebungen auf die Richtung r_1, so ist

$$r_1+\mathrm{d}r_1=r_1-u\,\mathrm{d}t.\cos\theta+u'\,\mathrm{d}t.\cos\theta',$$

worin $\mathrm{d}r_1$ die Längenänderung der die beiden positiven Massen verbindenden Geraden während des Zeitelements $\mathrm{d}t$ bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'.$$

Ebenso ergiebt sich für die beiden negativen Massen $-\alpha e$ und $-\alpha' e'$:

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}=+u\cos\theta-u'\cos\theta';$$

ferner für die positive $+\alpha e$ und für die negative $-\alpha' e'$:

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}=-u\cos\theta-u'\cos\theta';$$

endlich für die negative $-\alpha e$ und für die positive $+\alpha' e'$:

$$\frac{\mathrm{d}r_4}{\mathrm{d}t}=+u\cos\theta+u'\cos\theta'.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\theta\cos\theta'.$$

Da nun ferner die Geschwindigkeiten u und u' constant sind, so ergiebt sich, wenn man die *Aenderungen* der Winkel θ und θ' (die selbst zwar in dem betrachteten Augenblicke für alle 4 Massenpaare gleichen Werth haben, der sich aber mit der Zeit ändert und ungleich wird) während des Zeitelements $\mathrm{d}t$

für das erste Massenpaar mit $\mathrm{d}\theta_1$ und $\mathrm{d}\theta'_1$
für das zweite Massenpaar mit $\mathrm{d}\theta_2$ und $\mathrm{d}\theta'_2$
für das dritte Massenpaar mit $\mathrm{d}\theta_3$ und $\mathrm{d}\theta'_3$
für das vierte Massenpaar mit $\mathrm{d}\theta_4$ und $\mathrm{d}\theta'_4$

bezeichnet, durch Differentiation der ersten Differentialcoefficienten:

$$\frac{\mathrm{dd}r_1}{\mathrm{d}t^2}=+u\sin\theta.\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}-u'\sin\theta'.\frac{\mathrm{d}\theta'_1}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}t^2}=-u\sin\theta.\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}+u'\sin\theta'.\frac{\mathrm{d}\theta'_2}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = + u \sin\theta . \frac{d\theta_3}{dt} + u' \sin\theta' . \frac{d\theta'_3}{dt},$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = - u \sin\theta . \frac{d\theta_4}{dt} - u' \sin\theta' . \frac{d\theta'_4}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = + u \sin\theta \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\theta' \left(\frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Nun stelle AB Fig. 18. die Linie r dar. In A befinde sich die Masse $+ \alpha e$



Fig. 18.

und bewege sich in der Richtung AC mit der Geschwindigkeit $+ u$ während des Zeitelements dt durch $AD = + u dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung AC mit AB bildet, ist $BAC = \theta$. In Folge der Bewegung von A nach D geht der Winkel BAC in BDC über, und es ist

$$BDC = BAC + ABD = \theta + \frac{udt}{r} \sin\theta.$$

Die Linie AB Fig. 19., welche wiederum r darstellt, werde nach B' verlängert.

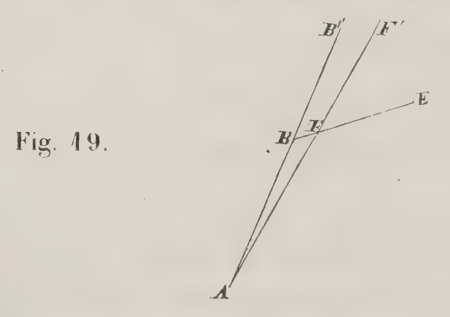


Fig. 19.

In B befinde sich die Masse $+ \alpha' e'$, und bewege sich in der Richtung BE mit der Geschwindigkeit $+ u'$ während des Zeitelements dt durch $BF = + u' dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung BE mit BB' bildet, ist $B'BE = \theta'$. In Folge der Bewegung von B nach F geht der Winkel $B'BE$ in $F'FE$ über, und es ist

$$\theta' = B'BE = AFB + BAF = F'FE + \frac{u'dt}{r} \sin\theta',$$

folglich ist

$$F'FE = \theta' - \frac{u'dt}{r} \sin\theta'.$$

Zieht man endlich mit der Richtung AB und mit den beiden Stromrichtungen AC und BE Fig. 18. 19. Parallellinien durch den Mittelpunkt einer

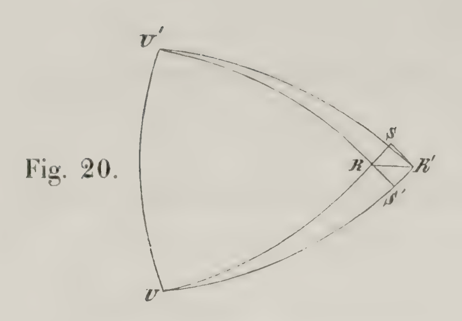


Fig. 20.

Kugel, welche die Oberfläche in R, U und U' Fig. 20. schneiden, und verbindet R mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist die Ebene des Kreisbogens $UR = \theta$ der Ebene BAC Fig. 18., die Ebene des Kreisbogens $U'R = \theta'$ der Ebene $B'BE$ Fig. 19. parallel, und es ist der von beiden Ebenen eingeschlossene Winkel bei R der mit ω bezeichnete Winkel.

Man verlängere die Kreisbögen UR nach S, $U'R$ nach S', und mache

$$RS = +\frac{u\mathrm{d}t}{r}\sin\theta', \quad RS' = -\frac{u'\mathrm{d}t}{r}\sin\theta'.$$

Dann ist US der Bogen des Winkels BDC Fig. 18. und $U'S'$ der Bogen des Winkels $F'FE$ Fig. 19. Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S und S' liegen, kann auch als ein Element der die Kugeloberfläche bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS und RS' als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$; so geht eine durch den Mittelpunkt der Kugel gezogene Parallele mit der Geraden, welche beide Massen am Ende des Zeitelements $\mathrm{d}t$ verbindet, durch den Punkt R'. Es ergiebt sich dies daraus, dass die Richtung dieser Geraden durch die gleichzeitige Bewegung beider Massen sich eben so ändert, wie sie sich ändern würde, wenn die eine Masse ruhete und ihre Bewegung, entgegengesetzt genommen, der anderen Masse beigelegt würde. Es lassen sich dann beide Bewegungen, so auf einen Punkt übertragen, nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammen setzen und es ergiebt sich daraus das angeführte Resultat.

Verbindet man endlich R' mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist

$$UR' = \theta + \mathrm{d}\theta_1 = UR + \mathrm{d}\theta_1$$

$$U'R' = \theta' + \mathrm{d}\theta'_1 = U'R + \mathrm{d}\theta'_1.$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{d}\theta_1 = UR' - UR = RS + RS'\cos\omega$$

$$\mathrm{d}\theta'_1 = U'R' - U'R = RS' + RS\cos\omega.$$

Da nun $RS = +\frac{u\mathrm{d}t}{r}\sin\theta$, $RS' = -\frac{u'\mathrm{d}t}{r}\sin\theta'$ war, so ergiebt sich:

$$\mathrm{d}\theta_1 = +\frac{u\mathrm{d}t}{r}\sin\theta - \frac{u'\mathrm{d}t}{r}\sin\theta'\cos\omega$$

$$\mathrm{d}\theta'_1 = -\frac{u'\mathrm{d}t}{r}\sin\theta' + \frac{u\mathrm{d}t}{r}\sin\theta\cos\omega.$$

Es ist hiernach

$$r\frac{d\theta_1}{dt} = + u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_1}{dt} = - u' \sin\theta' + u \sin\theta \cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-\alpha e$ und $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_2}{dt} = - u \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_2}{dt} = + u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega,$$

ferner für die positive $+\alpha e$ und für die negative $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_3}{dt} = + u \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_3}{dt} = + u' \sin\theta' + u \sin\theta \cos\omega,$$

endlich für die negative $-\alpha e$ und für die positive $+\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_4}{dt} = - u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_4}{dt} = - u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man folgende Gleichung:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = - 8\, uu' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega \text{ *)}.$$

---

*) Diese Gleichung kann auch aus den Gleichungen der Bewegung der vier elektrischen Massen abgeleitet werden. Man lege durch das Element α eine mit α' parallele Ebene. O sei derjenige Punkt dieser Ebene, in welchem die auf diese Ebene projicirte Richtung α' die Richtung α schneidet. Man nehme O zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Richtung α zur Axe der x, die Axe der z senkrecht auf die erwähnte Ebene. Ferner denke man sich, dass beide Massen sich immer in den nämlichen Richtungen gleichförmig fortbewegten, und wähle denjenigen Augenblick zum Anfangspunkt der Zeit t, für welchen die Coordinaten der später in α' betrachteten Masse

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = c$$

sind. Bezeichnet dann ε den Winkel, welchen die Richtungen α und α' mit einander bilden, x, y, z die Coordinaten der später in α betrachteten Masse, und u und u' die Geschwindigkeiten beider Massen, so sind die Gleichungen der Bewegung

der einen Masse:	der anderen Masse:
$x = b + ut$	$x' = u't \,.\cos\varepsilon$
$y = 0$	$y' = u't \,.\sin\varepsilon$
$z = 0$	$z' = c$

b und c sind gegebene Constante. Hiernach ist:

$$x' - x = (u' \cos\varepsilon - u)\,.\,t - b$$
$$y' - y = u't \,.\sin\varepsilon$$
$$z' - z = c$$

und, da $r_1 r_1 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ ist,

$$r_1 r_1 = [(u' \cos\varepsilon - u).t - b]^2 + u'u'\, tt.\sin\varepsilon^2 + cc.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach r_1 und t, so erhält man:

Substituirt man diesen Werth und den für $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)$ gefundenen in obigem Ausdrucke für die Resultante der vier partiellen Wirkungen, so erhält man dafür folgenden Werth:

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{1}{r_1}.\left[((u'\cos\varepsilon-u)t-b)(u'\cos\varepsilon-u)+u'u't.\sin\varepsilon^2\right],$$

und durch wiederholte Differention,

$$r_1\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{dr_1^2}{dt^2}=uu+u'u'-2uu'\cos\varepsilon.$$

Für den Augenblick nun, wo die beiden Massen nach α und α' gelangen, ist, wenn θ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von α nach α' mit der *ersten* Coordinatenaxe bildet,

$$x'-x=r_1\cos\theta.$$

Zieht man mit den 3 Coordinatenaxen, ferner mit der Richtung von α nach α' und endlich mit der Richtung α' selbst Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche in

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad R \quad\text{und}\quad P$$

schneiden, so ist RY der Bogen des Winkels, welchen die Richtung von α nach α' mit der *zweiten* Coordinatenaxe bildet, folglich für den Augenblick, wo die beiden Massen nach α und α' gelangen,

$$y'-y=r_1\cos RY.$$

Nun ist aber in den sphärischen Dreiecken PRX und PRY, weil der Radius P (welcher der Richtung α' parallel ist) mit den Radien X und Y (welche der Ebene der Coordinatenaxen x und y parallel sind) in demselben grössten Kreise liegt,

$$\cos RX\sin PY+\cos RY\sin PX=\cos PR\sin XY,$$

und es ist ferner

$$XY=90^0,\quad PX=\varepsilon,\quad RX=\theta,\quad PR=\theta',$$

wo θ' den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von α nach α' mit der Richtung von α' selbst bildet. Substituirt man diese Werthe, so ergiebt sich:

$$\cos RY=\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon},$$

folglich

$$y'-y=r_1.\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Bezeichnet nun t in den obigen Gleichungen für $x'-x$ und $y'-y$ denjenigen Werth, welcher dem Augenblicke entspricht, in welchem die beiden Massen nach α und α' gelangen, so sind die obigen Werthe von $x'-x$ und $y'-y$ den eben gefundenen gleichzusetzen, oder es ist:

$$(u'\cos\varepsilon-u)t-b=r_1\cos\theta$$

$$u't.\sin\varepsilon=r_1.\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für $\frac{dr_1}{dt}$, so erhält man:

$$\frac{dr_1}{dt}=+u'\cos\theta'-u\cos\theta.$$

Subtrahirt man das Quadrat hiervon von dem gefundenen Werthe von $r_1\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{dr_1^2}{dt^2}$, so bleibt:

$$r_1\frac{ddr_1}{dt^2}=uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2-2uu'(\cos\varepsilon-\cos\theta\cos\theta')$$

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} . aeu . ae'u' (\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\theta').$$

Setzt man hierin nach S. 323

$$aeu = i, \qquad ae'u' = i',$$

so ergiebt sich nach dieser Ableitung aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze, für die abstossende Kraft zweier Stromelemente derselbe Werth wie nach dem Ampère'schen Gesetze, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} ii' (\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\theta'),$$

oder, wenn man den Winkel, welchen die beiden Elemente α und α' selbst machen, ε nennt, wo dann $\cos\varepsilon = \sin\theta \sin\theta' \cos\omega + \cos\theta \cos\theta'$ ist,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} ii' (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos\theta \cos\theta').$$

Hierdurch sind die Wirkungen *gleichförmiger* elektrischer Strömungen in *ruhenden* Leitungsdrähten in der Ferne vollständig bestimmt. Die bisherigen Folgerungen des aufgestellten Grundgesetzes sind sämmtlich durch die Erfahrung bestätigt.

Theorie der Volta-Induction.

23.

Es bleibt noch übrig, aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze die Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern zu entwickeln, welche Entwickelung die *Theorie der Volta-Induction* umfasst.

Die *Volta-Induction* unterscheidet sich von Ampère's *Elektrodynamik* dadurch, dass sie die *Entstehung* von Strömen betrifft, welche von letzterer ganz ausgeschlossen ist.

Aus der *Erfahrung* ist über die *Volta-Induction* folgendes bekannt. Wir wissen *erstens*, dass sie auf zwei wesentlich verschiedene Arten hervorgebracht werden kann; es können nämlich Ströme inducirt werden durch *constante* Ströme und durch *veränderliche*. Durch *constante* Ströme wird inducirt, entweder wenn der Leitungsdraht, durch welchen der constante Strom geht, dem Leitungsdrahte, in welchem ein Strom inducirt werden soll, genähert oder davon entfernt wird, oder wenn umgekehrt der letztere dem ersteren genähert oder von ihm entfernt wird. Für die Wirkung scheint es gleichgültig, ob nur der eine,

---

oder, wenn man den Winkel ω, nach der Gleichung $\cos\varepsilon = \sin\theta \sin\theta' \cos\omega + \cos\theta \cos\theta'$, einführt,

$$r_1 \frac{ddr_1}{dt^2} = uu \sin\theta^2 + u'u' \sin\theta'^2 - 2uu' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise findet man die den anderen Massenpaaren entsprechenden Differentialcoefficienten, die dann zusammen obige Gleichung geben.

oder nur der andere Draht, oder beide zugleich bewegt werden, vorausgesetzt dass ihre *relative* Bewegung die nämliche ist. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch Annährung ein entgegengesetzt gerichteter, durch Entfernung ein gleich gerichteter Strom inducirt. Durch *veränderliche* Ströme wird inducirt, auch wenn der Leitungsdraht, durch welche der veränderliche Strom geht, gegen denjenigen Draht, in welchem ein Strom inducirt werden soll, unverrückt bleibt. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch wachsende Stromintensität ein entgegengesetzt gerichteter, durch abnehmende Intensität ein gleich gerichteter Strom inducirt.

Wir wissen *zweitens* aus der Erfahrung, dass die Induction eines constanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht dieselbe ist, wie die Induction eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Abstossungs- oder Anziehungskraft, welche jener Strom auf diesen Leitungsdraht beim Durchgange eines bestimmten Stromes durch letzteren ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich ist, welche der Magnet auf denselben Draht unter den nämlichen Verhältnissen ausüben würde. Siehe Art. 11. S. 279.

Diese Erfahrungen können dazu dienen, die Richtigkeit der aufzustellenden Gesetze der *Volta-Induction* zu prüfen.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die Theorie der *Volta-Induction* eine Theorie *elektromotorischer Kräfte* ist, durch welche die *inducirten Ströme* selbst noch nicht vollständig bestimmt werden. Um die *inducirten Ströme* selbst vollständig auch ihrer *Intensität* nach zu bestimmen, so wie auch die von ihnen selbst wieder hervorgebrachten elektrodynamischen Abstossungs- und Anziehungskräfte und *secundären* Inductionen, bedarf es ausser der aus der Theorie der *Volta-Induction* zu entnehmenden Bestimmung der *elektromotorischen Kraft,* noch einer Angabe über den *Widerstand* der ganzen Kette, zu welcher der inducirte Leitungsdraht gehört, wie dies aus der durch Ohm's Gesetze bestimmten Abhängigkeit der Stromintensität von der elektromotorischen Kraft und dem Gesammtwiderstande der Kette von selbst einleuchtet.

Die vollständige Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern umfasst endlich nicht blos die *Theorie der Volta-Induction,* das heisst, sie giebt nicht blos von der Entstehung, Verstärkung und Schwächung von Strömen in den ponderabeln Leitern Rechenschaft, sondern sie umfasst auch alle *elektrodynamischen* Abstossungs- und Anziehungskräfte, welche Wirkungen obiger Ströme sind, und die ponderabeln Leiter selbst bewegen.

Wir wollen in den folgenden Artikeln *zuerst* die Betrachtung einzelner Fälle vorausschicken, und *alsdann* die allgemeine Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen, wie sie in *galvanischen Strömen* von veränderlicher Intensität statt finden, während die ponderabeln Leiter *bewegt* werden, folgen lassen.

24.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter, welcher einem ruhenden constanten Stromelemente genähert, oder von ihm entfernt wird.

Der einfachste Fall der *Volta-Induction*, auf welchen das aufgestellte Grundgesetz angewendet werden kann, ist derjenige, wo von den beiden Elementen blos das eine, nämlich das inducirende, schon einen Strom enthält, und zwar einen Strom von constanter Intensität, und die Entfernung beider Elemente blos durch die Bewegung des anderen Elements, nämlich des inducirten, geändert wird.

Bezeichnet nun α die Länge des inducirenden, α' die Länge des inducirten Elements, so sind in diesen beiden Elementen 4 elektrische Massen zu unterscheiden, nämlich:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *constanten* Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des *ruhenden* Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ einschliesst; die *zweite* $-\alpha e$ bewege sich in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts; die *dritte* $+\alpha' e'$, welche zwar in dem Elemente α' ruhet, werde von demselben mit der Geschwindigkeit $+u'$ in derjenigen Richtung *fortgetragen*, welche mit der verlängerten von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ' einschliesst; und mit derselben Geraden in einer Ebene liegt, welche mit der das Element α und jene Gerade enthaltenden Ebene den Winkel ω macht; die *vierte* endlich $-\alpha' e'$, welche ebenfalls im Elemente α' ruhet, wird von diesem Elemente mit der nämlichen Geschwindigkeit $+u'$ in der nämlichen Richtung wie die dritte Masse mit fortgeführt. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r gleich, in welcher die Elemente α und α' in diesem Augenblicke sich befinden; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie, wie S. 328, mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Die Anwendung des Grundgesetzes giebt dann, wie Seite 328, zwischen diesen 4 Massen folgende 4 partielle Wirkungen:

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_1 r_1}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_1 \frac{ddr_1}{dt^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_2 r_2}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_2 \frac{ddr_2}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_3 r_3}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_3 \frac{ddr_3}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_4 r_4}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_4 \frac{ddr_4}{dt^2}\right)$$

Diese 4 partiellen Wirkungen lassen sich nun zunächst zu zwei Kräften vereinigen, von denen die eine die Wirkung der beiden Massen des inducirenden Elements $+\alpha e$ und $-\alpha e$ auf die *positive* Masse $+\alpha' e'$ des inducirten Ele-

ments, die andere die Wirkung der nämlichen Massen auf die *negative* $-\alpha'e'$ des inducirten Elements ist. Jene Kraft ist die Summe der ersten und vierten, diese ist die Summe der zweiten und dritten. Hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht der Gleichheit von r_1, r_2, r_3 und r_4 mit r in dem betrachteten Augenblicke, jene Kraft

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\};$$

diese Kraft ergiebt sich

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}\right)\right\}.$$

In sofern nun die von diesen Kräften hervorgebrachten Bewegungen der beiden elektrischen Massen $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ in ihrem ponderabelen Träger α' fast augenblicklich durch den *Widerstand* des letzteren aufgehoben und dadurch alle auf jene Massen wirkenden Kräfte alsbald auf diesen Träger übertragen werden, giebt die *Summe* obiger beiden Kräfte, wie S. 329, die Kraft, welche den Träger α' selbst bewegt,

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Vor dieser Uebertragung jener ursprünglich auf die elektrischen Massen wirkenden Kräfte auf ihren Träger, werden aber die elektrischen Massen selbst etwas in ihrem Träger verschoben, und wenn diese Verschiebung für die *positive* Masse $+\alpha'e'$ und für die *negative* $-\alpha'e'$ *verschieden* ist, beide also dadurch von einander *geschieden* werden, so entsteht im Träger α' ein galvanischer Strom, und die Kraft, welche diese Scheidung bewirkt, heisst die *elektromotorische Kraft*. Es leuchtet ein, dass diese *elektromotorische Kraft* von der *Differenz* obiger beiden Kräfte abhängt, d. i. von

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Nach den Art. 22. für *zwei ruhende constante* Stromelemente in Beziehung auf die Bewegung ihrer elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen, ergab sich dort der Werth jener *Summe* gleich der durch Ampère's Gesetz bestimmten Kraft,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right);$$

der Werth dieser *Differenz* würde sich dagegen dort

$$= 0$$

ergeben haben.

Nach den in diesem Artikel für *ein ruhendes constantes* Stromelement und für *ein bewegtes stromloses* Drahtelement in Beziehung auf ihre elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen ergiebt sich dagegen der Werth jener *Summe*

$$= 0,$$

und der Werth dieser *Differenz*

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr}ae'u'i\left(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

wie in Folgendem nachgewiesen werden soll.

Es ist hierzu blos nöthig, in den S. 329 bestimmten Differentialcoefficienten, für die Geschwindigkeit der *negativen* Masse, $+u'$ statt $-u'$ zu setzen; man erhält dann:

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'$$

$$\frac{dr_2}{dt}=\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\theta+u'\cos\theta'.$$

Folglich ist dann:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}=0.$$

Dagegen ist:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}=-8uu'\cos\theta\cos\theta'.$$

Ferner erhält man:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta\,.\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'\,.\frac{d\theta'_1}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta\,.\frac{d\theta_2}{dt}-u'\sin\theta'\,.\frac{d\theta'_2}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2}=+u\sin\theta\,.\frac{d\theta_3}{dt}-u'\sin\theta'\,.\frac{d\theta'_3}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2}=-u\sin\theta\,.\frac{d\theta_4}{dt}-u'\sin\theta'\,.\frac{d\theta'_4}{dt},$$

folglich ist:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}+\frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Dagegen ist:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'^3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Ferner ergiebt sich nach S. 331 f., wenn man daselbst auch der *negativen* Masse des inducirten Element $-\alpha' e'$ die Geschwindigkeit $+u'$ beilegt,

$$r\frac{d\theta_1}{lt}=r\frac{d\theta_3}{dt}=+u\sin\theta-u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta_2}{dt}=r\frac{d\theta_4}{dt}=-u\sin\theta-u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_1}{dt}=r\frac{d\theta'_3}{dt}=-u'\sin\theta'+u\sin\theta\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_2}{dt}=r\frac{d\theta'_4}{dt}=-u'\sin\theta'-u\sin\theta\cos\omega,$$

woraus sich ergiebt:

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)=r\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)=0;$$

dagegen aber

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)=-4u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)=+4u\sin\theta\cos\omega.$$

Es folgt hieraus:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=0$$

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-8uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man die *Summe* der beiden Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Masse des inducirten Elements wirken,

$$=0,$$

ihre *Differenz* dagegen

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}aeu\,.\,ae'u'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

oder, da nach S. 334 $\cos\varepsilon=\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+\cos\theta\cos\theta'$ und nach S. 323 $aeu=i$, ist,

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i\,.\,ae'u'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

was zu beweisen war.

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden. In der Wirklichkeit kann diese Scheidung aber nur nach der Richtung von α' erfolgen, weil in einem linearen Leiter ein galvanischer Strom nur in der Richtung des Leiters statt finden kann. Zerlegt man daher obige Kraft nach der Richtung des Elements α' und senkrecht darauf, so kommt nur der erstere Theil als *elektromotorische Kraft* in Betracht, und dieser ist, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen das Element α' mit der verlängerten Geraden r macht,

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').ae'u'\cos\varphi.$$

Gewöhnlich versteht man unter *elektromotorischer Kraft* die beschleunigende Kraft, welche die angegebene absolute Kraft auf die in der Längeneinheit des inducirten Leitungsdrahts enthaltene elektrische Masse e' ausübt, welche durch Division des obigen Werths mit e' erhalten wird. Hiernach würde endlich die *elektromotorische Kraft* eines ruhenden constanten Stromelements auf ein bewegtes Drahtelement erhalten werden.

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\,.\,au'\cos\varphi.$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck einen *positiven* oder *negativen* Werth hat, ist der inducirte Strom *positiv* oder *negativ*, wo unter positivem Strome ein solcher verstanden wird, dessen positive Elektricität in derjenigen Richtung des

Elements α' sich bewegt, welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel φ einschliesst.

Sind z. B. die Elemente α und α' einander parallel, und ist die Richtung, nach welcher das letztere mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt wird, in der Ebene beider Elemente senkrecht auf dieselben, so ist, wenn α' durch seine Bewegung von α sich *entfernt,*

$$\theta = \varphi, \quad \cos\theta' = \sin\theta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= + \tfrac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr} i \sin\theta\cos\theta^2 . au'.$$

Dieser Werth ist immer *positiv,* wenn $\theta < 180°$ genommen wird, und dieser *positive* Werth bezeichnet hier einen inducirten Strom von gleicher Richtung, wie der inducirende, übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

Unter gleichen Verhältnissen, blos mit dem Unterschiede, dass das Element α' durch seine Bewegung dem Elemente α sich *nähert,* ist

$$\theta = \varphi, \quad \cos\theta' = -\sin\theta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= - \tfrac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr} i \sin\theta\cos\theta^2 . au'.$$

Der *negative* Werth dieser Kraft bezeichnet einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung, wie der inducirende, ebenfalls übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

25.

Vergleichung mit dem Erfahrungssatze Art. 11.

Auf den im vorigen Artikel betrachteten Fall der *Volta-Induction* beziehen sich die Art. 10. 11. mitgetheilten Versuche. Zur *quantitativen* Bestimmung der *Volta-Induction* in diesem Falle ist dort der Satz aufgestellt und an der Erfahrung geprüft worden,

> *dass die Induction eines ruhenden constanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht die nämliche sei, wie die Induction eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Kraft, welche jener constante Strom auf jenen von einem Strome durchflossenen Leitungsdraht ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich wäre, welche der Magnet auf den von demselben Strome durchflossenen Draht ausüben würde.*

Um diesen Satz erfahrungsmässig zu begründen, wurden folgende Versuche gemacht:

1) wurde die *elektrodynamische* Kraft gemessen, welche ein geschlossener Strom A auf einen anderen geschlossenen Strom B ausübte;

2) wurde der geschlossene Strom A mit einem Magnete C vertauscht, und die *elektromagnetische* Kraft gemessen, welche C auf B ausübte;

3) wurde der geschlossene Leiter B, ohne Strom, in eine bestimmte Bewegung gesetzt, und der Strom gemessen, welcher dann vom Strome A in dem bewegten Leiter durch *Volta-Induction* entstand;

4) wurde bei derselben Bewegung des geschlossenen Leiters B der Strom gemessen, welcher von dem für den Strom A substituirten Magneten C durch *Magneto-Induction* entstand.

Diesen 4 Versuchen entsprechend sollen nun zur Vergleichung folgende 4 Gesetze zusammengestellt werden:

1) das Gesetz der *elektrodynamischen* Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement;

2) das Gesetz der *elektromagnetischen* Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement;

3) das Gesetz der *Volta-Induction* eines geschlossenen Stromes auf ein Element eines bewegten Leiters;

4) das Gesetz der *Magneto-Induction* eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.

1. *Das Gesetz der elektrodynamischen Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement.*

Dieses Gesetz ist S. 263 in der Note unter (3) für den Fall entwickelt worden, wo der geschlossene Strom eine Ebene begrenzt und in die Ferne wirkt. Statt auf dieses besondere Gesetz soll hier auf das allgemeinere zurückgegangen werden, welches Ampère S. 214 seiner Abhandlung gegeben hat, und welches S. 250 dieser Abhandlung angeführt worden ist. Es wird darnach die auf das Stromelement α' wirkende elektrodynamische Kraft nach 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liegt, in die Componenten X, Y, Z zerlegt, welche folgendermaassen bestimmt werden:

$$X = -\frac{ii'}{2}\alpha'(C\cos\mu - B\cos\nu)$$

$$Y = -\frac{ii'}{2}\alpha'(A\cos\nu - C\cos\lambda)$$

$$Z = -\frac{ii'}{2}\alpha'(B\cos\lambda - A\cos\mu),$$

worin $A = \int\frac{ydz - zdy}{r^3}$, $B = \int\frac{zdx - xdz}{r^3}$, $C = \int\frac{xdy - ydx}{r^3}$ ist, α' die Länge des Stromelements, auf welches gewirkt wird, bezeichnet, λ, μ, ν die Winkel welche α' mit den 3 Coordinatenaxen bildet, und i und i' die Intensitäten des geschlossenen Stroms und des Stromelements.

2. *Das Gesetz der elektromagnetischen Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement.*

Nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus wird die elektromagnetische Kraft, welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm\mu$ auf ein Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität

i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen α' mit r bildet, durch

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin\varphi}{rr}$$

dargestellt, worin $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ für $\varkappa'$ nach S. 264 gesetzt worden ist, und diese Kraft sucht das Stromelement in einer auf α' und r senkrechten Richtung zu bewegen. Hieraus ergiebt sich also die Grösse und Richtung der beiden Kräfte, welche die beiden in einem *kleinen* Magnete enthaltenen Massen des nördlichen und südlichen magnetischen Fluidums auf das Stromelement ausüben. Diese beiden Kräfte lassen sich nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammensetzen, und es ergiebt sich daraus die *Grösse* der Resultante, wenn m das magnetische Moment und ψ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe mit der Geraden r macht, und ε den Winkel, welchen die Richtung α' mit der in der Ebene der magnetische Axe und der Geraden r liegenden Richtung D macht, von deren Winkel mit der Geraden r der Sinus sich zu $\sin\psi$ wie $1 : \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ verhält, und wenn man endlich Kürze halber $\frac{1}{r^3}\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet,

$$= \frac{i'}{\sqrt{2}} \alpha' m' \mathfrak{d} \sin\varepsilon.$$

Die *Richtung* dieser Resultante ist gegen die Richtungen α' und D senkrecht. Bezeichnet man nun mit

$$a, \quad b, \quad c$$

die Cosinus der Winkel, welche die so bestimmte Resultante mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen bildet, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liege, und zerlegt die Resultante nach der Richtung der letzteren, so erhält man folgende 3 Componenten:

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' . a\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' . b\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' . c\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

und für a, b, c folgende Gleichungen, wenn die Winkel, welche die Richtung des Elements α' mit jenen Coordinatenaxen bildet, mit

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung D mit den nämlichen Coordinatenaxen bildet, mit

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}},$$

bezeichnet werden, nämlich:

$$a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} = 0$$

$$a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu = 0$$

$$aa + bb + cc = 1$$

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu = \cos\varepsilon.$$

Durch Elimination von b und c ergiebt sich aus diesen Gleichungen der Werth von a

$$a = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\mathfrak{d}\sqrt{\left(1-\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda+\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu\right)^2\right)}} = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon},$$

und auf gleiche Weise folgende Werthe von b und c:

$$b = \frac{\mathfrak{c}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\nu}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon}$$

$$c = \frac{\mathfrak{a}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\lambda}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die der 3 Componenten der elektromagnetischen Kraft, so erhält man für die letzteren folgende Werthe:

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{c}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\nu)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{a}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\lambda)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{b}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\mu).$$

Für einen grösseren Magnet, welcher aus vielen kleinen zusammengesetzt ist, werden hiernach die 3 Componenten X', Y', Z' der von ihm auf das Stromelement α' ausgeübten elektromagnetischen Kraft folgendermassen bestimmt:

$$X' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (C'\cos\mu - B'\cos\nu)$$

$$Y' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (A'\cos\nu - C'\cos\lambda)$$

$$Z' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (B'\cos\lambda - A'\cos\mu),$$

worin $A' = S(\mathfrak{a}m')$, $B' = S(\mathfrak{b}m')$, $C' = S(\mathfrak{c}m')$ ist.

3. *Das Gesetz der Volta-Induction eines geschlossenen Stroms auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Das im vorigen Artikel entwickelte Elementargesetz dieser Induction, welches für jedes inducirende *Element* α gilt, giebt folgenden Werth der *elektromotorischen* Kraft, mit welcher ein solches Element α die positive und negative elektrische Masse in dem inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden sucht:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').au',$$

worin $+u'$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das inducirte Element α' bewegt wird, und ε und θ' die Winkel, welche die Richtung dieser Bewegung mit der Richtung, nach welcher im inducirenden Stromelemente α die positive Elektricität strömt, und mit der verlängerten Geraden r bildet. θ bezeichnet, wie in der Theorie zweier constanter Stromelemente Art. 22 den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher im ersteren Elemente α die positive Elektricität strömt, mit der Geraden r bildet.

Vergleicht man diesen Werth der *eletromotorischen* Kraft mit dem in der Theorie zweier constanter Stromelemente, übereinstimmend mit Ampère's Gesetze, S. 334 gefundenen Werthe der *elektrodynamischen* Kraft, so ergiebt sich folgende einfache Relation zwischen beiden, dass nämlich die erstere Kraft aus der letzteren durch Multiplication mit dem constanten Factor $\frac{au'}{i'}$ erhalten wird, vorausgesetzt, dass die Richtung, nach welcher im Elemente α' die positive Elektricität strömt, in der letzteren Kraft, der Richtung gleich sei, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, in der ersteren Kraft, d. i.

$$\beta = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu,$$

wenn die von beiden Richtungen mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen gebildeten Winkel respective mit

$$\lambda, \mu, \nu \quad \text{und} \quad \beta, \gamma, \delta$$

bezeichnet werden; denn alsdann sind die Werthe von ε und θ' in beiden Ausdrücken gleich.

Hieraus leuchtet nun unter der gemachten Voraussetzung von selbst ein, dass die unter (1) angeführten Werthe der *elektrodynamischen* Kraft X, Y, Z auch nur mit dem constanten Factor $\frac{au'}{i'}$ multiplicirt zu werden brauchen, um die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der *elektromotorischen* Kraft zu erhalten, welche ein *geschlossener Strom* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (C \cos\gamma - B \cos\delta)$$

$$\mathfrak{Y} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (A \cos\delta - C \cos\beta)$$

$$\mathfrak{Z} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (B \cos\beta - A \cos\gamma)$$

worin A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie unter (1.).

4. *Das Gesetz der Magneto-Induction eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Aus der nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus bestimmten *elektromagnetischen Elementarkraft*, welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm \mu$ auf ein Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher die positive Elektricität in α' strömt, mit der Geraden r bildet, nämlich aus der unter (2) angeführten, normal auf die mit r und α' parallelen Ebene wirkenden Kraft

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin\varphi}{rr},$$

wird nach dem Grundgesetze der Magneto-Induction die *elektromotorische Elementarkraft* erhalten, mit welcher dieselbe magnetische Masse die positive und negative Elektricität in dem inducirten Elemente α', in normaler Richtung auf die mit r und α' parallele Ebene, zu scheiden sucht, wenn das inducirte

Element α' hier mit der Geschwindigkeit u' in der nämlichen Richtung bewegt wird, nach welcher dort die positive Elektricität im Elemente α' strömte, durch Multiplication mit dem constanten Faktor $\frac{ku'}{i'}$. Es ist also diese *elektromotorische Elementarkraft*

$$= \pm \frac{k\alpha' u'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin \varphi}{rr}.$$

Hierin bezeichnet k einen von u' unabhängigen constanten Faktor, dessen Werth jedoch bisher durch keine Messung näher bestimmt worden ist.

Bezeichnet man die Winkel, welche im einen Falle die Richtung, nach welcher die positive Elektricität im Elemente α', im anderen Falle die Richtung, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen bildet, respective mit

$$\lambda, \mu, \nu \quad \text{und} \quad 6, \gamma, \delta,$$

so ist, unter der eben vorausgesetzten Gleichheit genannter Richtungen,

$$6 = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu.$$

Es leuchtet auch hier von selbst ein, dass, unter vorausgesetzter Gleichheit der beiden erwähnten Richtungen, die unter (2) angeführten Werthe von X', Y', Z' nur mit dem constanten Facter $\frac{ku'}{i'}$ multiplicirt zu werden brauchen, um die Componenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ der elektromotorischen Kraft zu erhalten, welche ein *ganzer Magnet* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (C' \cos \gamma - B' \cos \delta)$$

$$\mathfrak{Y}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (A' \cos \delta - C' \cos 6)$$

$$\mathfrak{Z}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (B' \cos 6 - A' \cos \gamma),$$

worin A', B', C' dieselbe Bedeutung haben wie unter (2).

Es sollen nun die Relationen zwischen den hier aufgestellten Gesetzen an dem im Anfang erwähnten Erfahrungssatze geprüft werden. Es ergiebt sich nun aus den vorhergehenden Gesetzen, wenn die *elektrodynamischen* Kräfte zu den *elektromagnetischen* in dem Verhältnisse $1 : n$ stehen, d. h. wenn

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = n$$

ist, oder, indem man für X, Y, Z und X' Y' Z' ihre oben gefundenen Werthe substituirt, wenn

$$\frac{C' \cos \mu - B' \cos \nu}{C \cos \mu - B \cos \nu} = \frac{A' \cos \nu - C' \cos \lambda}{A \cos \nu - C \cos \lambda} = \frac{B' \cos \lambda - A' \cos \mu}{B \cos \lambda - A \cos \mu} = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot n,$$

folglich

$$A' = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot nA, \quad B' = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot nB, \quad C' = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot nC$$

ist, folgendes Verhältniss der durch *Volta-Induction* und durch *Magneto-Induction* gewonnenen *elektromotorischen* Kraft:

$$\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{C'\cos\gamma - B'\cos\delta}{C\cos\gamma - B\cos\gamma} = \frac{k}{a} \cdot n$$

$$\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{A'\cos\delta - C'\cos\beta}{A\cos\delta - C\cos\beta} = \frac{k}{a} \cdot n$$

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{B'\cos\beta - A'\cos\gamma}{B\cos\beta - A\cos\gamma} = \frac{k}{a} \cdot n$$

Hieraus ergiebt sich endlich folgendes Resultat:

$$\frac{X'}{X} : \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{Y'}{Y} : \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{Z'}{Z} : \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = a : k,$$

was mit dem im Anfang erwähnten Erfahrungssatze übereinstimmt, weil das Verhältniss $a : k$ *constant* ist. Jener Erfahrungssatz lehrt aber noch mehr als die Vergleichung obiger Gesetze, indem er dieses constante Verhältniss der *Einheit* gleich macht, wodurch sich der bisher noch durch keine Messung bestimmte constante Faktor im Grundgesetze der Magneto-Induction k dem constanten Faktor a im elektrischen Grundgesetze gleich ergiebt. Das nämliche müsste auch statt finden, wenn es in den Magneten keine magnetischen Fluida gäbe, sondern alle Wirkungen der Magnete nach Ampère von elektrischen Strömungen in ihnen herrührten.

26.

Vergleichung mit den von Fechner und Neumann aufgestellten Sätzen.

Fechner ist der erste gewesen, welcher eine *Erklärung* der Faraday'schen Inductionserscheinungen aus den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen, die mit einander vorher von Lenz blos durch eine empirische Regel in Beziehung gesetzt waren, durch Entwickelung ihres inneren Zusammenhangs zu geben versucht, und dieselbe in Poggendorff's Annalen 1845. Bd. 64. S. 337 veröffentlicht hat. Fechner hat sich dabei auf diejenige Art der *Volta-Induction* beschränkt, von welcher die vorhergehenden Artikel handeln, nämlich auf die eines ruhenden constanten Stromes auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht. Für diese Art der *Volta-Induction* ist es Fechnern wirklich gelungen, ihren *inneren Zusammenhang* mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen zu entdecken, und eine Erklärung derselben auf das für letztere Erscheinungen geltende etwas *verallgemeinerte* Ampère'sche Gesetz zu begründen. — Jener *innere Zusammenhang* besteht wesentlich darin, dass man bei jener Induction, auch abgesehen von dem durch die Induction erst erregten Strome, gleichwie bei den Ampère'schen Erscheinungen, mit *Wechselwirkungen elektrischer Ströme* zu thun habe, die Erklärung von beiderlei Erscheinungen folglich auf den Gesetzen dieser Wechselwirkungen beruhen müsse. Die Elektricität in dem inducirten Leitungsdrahte, sagt nämlich Fechner, befinde sich auch in Strömung, sobald dieser Leitungsdraht *fortbewegt* werde, weil sie nämlich an der Bewegung ihres Trägers Theil nehme.

Es unterscheiden sich nur die elektrischen Ströme solcher inducirten Leitungsdrähte von den galvanischen Strömen der inducirenden Drähte darin, dass gleiche Massen *positiver* und *negativer* Elektricität gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit in letzteren nach *entgegengesetzten* Richtungen, in ersteren nach *gleichen* Richtungen bewegt werden. — Die *Verallgemeinerung,* welche Fechner dem Ampère'schen Gesetze gegeben hat, besteht *erstens* darin, dass die nach Ampère auf den ponderabelen Träger wirkende Kraft in gleicher Stärke und nach gleicher Richtung ursprünglich auf die im Träger befindlichen elektrischen Massen wirke, und von diesen erst dem Träger mitgetheilt werde; *zweitens* darin, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für die Totalwirkung eines galvanischen Stroms auf einen anderen gelte, sondern auch für die beiden partiellen Wirkungen, welche der erstere Strom auf die *positive* und auf die *negative* Elektricität des letzteren ausübe.

Diese Erklärung stimmt mit der in den vorigen Artikeln entwickelten Theorie dieser Induction überein; denn man findet in letzterer das Recht zu der Verallgemeinerung des Ampère'schen Gesetzes begründet, auf welcher jene Erklärung bauet. Es lässt sich dies nachweisen, wenn man die beiden auf die *positive* oder *negative* Elektricität wirkenden Kräfte, wie sie S. 328 angegeben worden sind, besonders betrachtet, wo man findet, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für alle 4 Kräfte, sondern auch für diese oder jene beiden gültig ist.

Uebrigens hat Fechner selbst schon bemerkt, dass der Gesichtspunkt, unter welchem er den Zusammenhang der Faraday'schen Inductionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen aufgefasst hat, kein so allgemeiner ist, dass er über alle Faraday'schen Inductionserscheinungen erstreckt werden könnte. Sobald der inducirte Draht *ruhet,* können die Inductionserscheinungen nicht unter diesem Gesichtspunkte gefasst werden, weil dann von keiner Bewegung der Elektricität im inducirten Drahte die Rede sein kann. Fechner sagt hierüber a. a. O. S. 341: «Anstatt bei den Inductionsversuchen den (neutralen) Draht $a'b'$ nach dem ruhenden (erregten) Draht ab hin zu bewegen, könnte man umgekehrt verfahren, und die Induction würde immer noch bestehen Dies muss als ein *Erfahrungsdatum* zum Beweise angenommen werden, dass es hiebei blos auf die Relation der Bewegungen ankommt, und dass es erlaubt ist, für Bewegung des erregten Drahts und Ruhe des neutralen Drahts das Umgekehrte zu substituiren, um das Princip in der angegebenen Form anwenden zu können.»

Neumann hat die empirische Regel, durch welche Lenz die Faraday'schen Inductionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen in Beziehung gesetzt hat, seiner Untersuchung zum Grunde gelegt, und hat eine Ergänzung derselben in dem Satze gefunden, dass die Stärke der Induction proportional mit der Geschwindigkeit der Bewegung des inducirten Leiters sei, wenn die Induction durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht werde. Diese beiden empirischen Regeln ergänzen einander so, dass Neumann daraus die *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* hat ableiten können, indem die daraus zunächst für den Fall hervorgehenden Gesetze, wo die Induction durch eine Bewegung des inducirten Leiters hervorgebracht wird, von der Art sind, dass sie unmittelbar, ohne eine Modification zu erleiden, in

weiterem Kreise Anwendung finden und auf alle Arten der Induction ausgedehnt werden können. Diese von Neumann aufgestellten *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* dürften in Betracht sowohl ihres inneren Zusammenhangs unter einander, als auch der mit ihnen verflochtenen empirischen Regeln kaum einem Zweifel unterliegen, und es ist darum interessant, die Resultate der oben entwickelten Theorie mit diesen auf ganz anderen Wegen von Neumann abgeleiteten Gesetzen zu vergleichen.

Da Neumann's der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin übergebene Abhandlung noch nicht gedruckt ist, kann ich mich nur auf den so eben in Poggendorff's Annalen, im ersten Hefte dieses Jahres, erschienenen Auszug berufen, aus dem ich folgende Stelle anführe:

«§. 1. Aus dem Lenz'schen Satze: dass die Wirkung, welche der inducirende Strom oder Magnet auf den inducirten Leiter ausübt, immer, wenn die Induction durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht ist, einen hemmenden Einfluss auf diese Bewegung ausübt, in Verbindung mit dem Satze: dass die Stärke der momentanen Induction proportional mit der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist, wird das allgemeine Gesetz der linearen Induction abgeleitet:

$$E\,\mathrm{d}s = -\varepsilon v C\,\mathrm{d}s.$$

Hierin bedeutet $\mathrm{d}s$ ein Element des inducirten Drahts, und $E\mathrm{d}s$ die in dem Elemente $\mathrm{d}s$ inducirte elektromotorische Kraft; v ist die Geschwindigkeit, mit welcher $\mathrm{d}s$ bewegt ist, C die nach der Richtung, in welcher $\mathrm{d}s$ bewegt wird, zerlegte Wirkung des Inducenten auf $\mathrm{d}s$, dieses Element durchströmt gedacht von der Einheit des Stroms. Die Grösse ε, unabhängig von der Beschaffenheit des inducirten Leiters, kann bei der linearen Induction als eine Constante behandelt werden, ist aber eine solche Function der Zeit, die sehr rasch abnimmt, wenn ihr Argument einen merklichen Werth hat, und muss als solche bei der Flächeninduction und der Induction in Körpern behandelt werden.»

Aus der oben entwickelten Theorie hat sich am Schlusse des 24. Artikels folgender Ausdruck für die in dem Elemente α' inducirte *elektromotorische* Kraft ergeben, worin u' die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher α' bewegt wird:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} i\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).au'\cos\varphi.$$

Dieser Ausdruck war der nach der Richtung des Elements α' zerlegte Werth der ganzen von dem Inducenten α nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübten scheidenden Kraft, aus dem durch Weglassung des Factors $\cos\varphi$ die ganze Kraft wieder erhalten wird. Diese ganze Kraft nun ist im 25. Artikel unter (3) mit der durch Ampère's Gesetz bestimmten *elektrodynamischen* Kraft verglichen worden, welche der Inducent α auf das Element α' ausüben würde, wenn α' der Richtung parallel wäre, nach welcher das Element α' zum Zwecke der Induction bewegt wurde, und in dieser Richtung von einem Strome durchflossen würde, dessen Intensität $= i'$ wäre. Man erhält nämlich jene ganze nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübte *elektromotorische* Kraft durch Multiplication dieser *elektrodynamischen* Kraft mit dem Faktor

$\frac{a u'}{i'}$. Obigen Ausdruck selbst erhält man durch Multiplication derselben, *nach der Richtung des inducirten Elements α' zerlegten, elektrodynamischen* Kraft mit dem Factor $\frac{a u'}{i'}$. Bezeichnet man also diese, nach Richtung des inducirten Elements α' zerlegte, elektrodynamische Kraft mit

$$i'\alpha'.D,$$

so ist obiger Ausdruck

$$= - a u' D \alpha'$$

zu setzen. Hierin ist für u' und α' nach der Neumann'schen Bezeichnung v und ds zu schreiben; folglich giebt die oben entwickelte Theorie nach dieser Bezeichnung die Gleichung:

$$E ds = - a v D ds,$$

worin a einen von der Beschaffenheit des inducirten Leiters unabhängigen constanten Faktor bezeichnet, ebenso wie ε in der Neumann'schen Gleichung, weil hier von linearer Induction gehandelt wird. Beide Gleichungen stimmen also mit einander bis auf die Faktoren C und D überein. Auch haben diese Faktoren das mit einander gemein, dass sie, mit ds multiplicirt, die nach einer bestimmten Richtung zerlegte *elektrodynamische* Kraft ausdrücken, welche der Inducent auf ein an der inducirten Stelle befindliches von der Einheit des Stroms durchflossen gedachtes Element ds ausüben würde. Doch unterscheiden sich beide Faktoren von einander 1) durch die Richtung, welche dem an der inducirten Stelle gedachten Elemente ds zu geben sei, 2) durch die Richtung, nach welcher die auf dieses Element geübte elektrodynamische Kraft zerlegt werden soll. Es sind nämlich diese beiden Richtungen in dem Neumann'schen Gesetze *vertauscht.*

Das Neumann'sche Gesetz würde, wie man hieraus sieht, dem unsrigen *widersprechen,* wenn man es auf ein einzelnes Stromelement als Inducenten anwenden wollte, weil die Faktoren C und D dann ganz verschiedene Werthe haben. Es leuchtet aber ein, dass das Neumann'sche Gesetz seiner Herleitung gemäss zunächst nicht für jedes einzelne inducirende Stromelement, sondern nur für einen geschlossenen Strom oder für einen Magneten als Inducenten gelte, weil nämlich der Lenz'sche Satz, aus dem es hergeleitet worden ist, blos für geschlossene Ströme und Magnete als experimentell begründet gelten kann. Jener *scheinbare Widerspruch* löst sich nun von selbst, sobald man die Anwendung des Neumann'schen Gesetzes auf geschlossene, durch Magnete ersetzbare, Ströme als Inducenten beschränkt, wo sich dann die Idendität der Faktoren C und D auf folgende Weise beweisen lässt.

Nach Ampère sind die 3 Componenten X, Y, Z derjenigen Kraft, welche ein geschlossener Strom von der Intensität i, für welchen durch die Coordinaten x, y, z die Lage der Elemente bestimmt ist, auf irgend ein anderes Stromelement ds' von der Stromintensität i' ausübt, dessen Richtung mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν macht, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte des Elements ds' liegt,

$$X = -\tfrac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\mu . \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu . \int \frac{zdx - xdz}{r^3}\right)$$

$$Y = -\tfrac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\nu . \int \frac{ydz - zdy}{r^3} - \cos\lambda . \int \frac{xdy - ydx}{r^3}\right)$$

$$Z = -\tfrac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\lambda . \int \frac{zdx - xdz}{r^3} - \cos\mu . \int \frac{ydz - zdy}{r^3}\right).$$

Hieraus lassen sich nun die Werthe der Faktoren C und D für geschlossene Ströme als Inducenten ableiten.

Denn *erstens* den Faktor C in dem Neumann'schen Gesetze erhält man, wenn man mit X_1, Y_1, Z_1 die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$, und für λ, μ, ν die Winkel setzt, welche das inducirte Element mit den Coordinatenaxen bildet. Sind nämlich α, β, γ die Winkel, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den 3 Coordinatenaxen bildet, so ist

$$Cds' = X_1 \cos\alpha + Y_1 \cos\beta + Z_1 \cos\gamma.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein solches Coordinatensystem wählt, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung zusammenfällt, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird.* Es ist dann nämlich

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0,$$

folglich

$$Cds' = X_1 = -\tfrac{1}{2} ids' \left(\cos\mu \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu \int \frac{zdx - xdz}{r^3}\right).$$

Zweitens den Faktor D erhält man, wenn man mit X', Y', Z' die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$ und $\lambda = \alpha'$, $\mu = \beta'$, $\nu = \gamma'$ setzt, wo α', β', γ' die Winkel sind, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den 3 Coordinatenaxen bildet (die also mit α, β, γ identisch wären, wenn das nämliche Coordinatensystem gewählt würde). Sind nämlich nach dem jetzigen Coordinatensysteme λ', μ', ν' die Winkel, welche das inducirte Element mit den 3 Coordinatenaxen bildet (die also mit λ, μ, ν identisch wären, wenn das jetzige Coordinatensystem dem früheren gleich wäre) so ist:

$$Dds' = X' \cos\lambda' + Y' \cos\mu' + Z' \cos\nu'.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein anderes Coordinatensystem wie früher wählt, nämlich ein solches, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung *des inducirten Elements selbst* zusammenfällt, weil dann

$$\cos\lambda' = 1, \quad \cos\mu' = 0, \quad \cos\nu' = 0$$

ist, folglich:

$$Dds' = X' = -\tfrac{1}{2} ids' \left(\cos\beta' \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\gamma' \int \frac{zdx - xdz}{r^3}\right).$$

Nun können die beiden Coordinatensysteme, nämlich dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung parallel ist, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird,* und dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung *des inducirten Elements selbst* parallel ist, die Axe der y gemein haben, wenn die-

selbe auf beiden Richtungen, des inducirten Elements und seiner Bewegung, normal ist. Dies vorausgesetzt wird

$$\cos\mu = 0, \quad \cos 6' = 0, \quad \cos\nu = \cos\gamma',$$

und da man ausserdem beweisen kann, dass

$$\int \frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$$

nach beiden Coordinatensystemen gleichen Werth habe, so ergiebt sich

$$C = D,$$

was zu beweisen war. Dass $z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z$ nach allen rechtwinkeligen Coordinatensystemen, denen, wie den beiden obigen, der Anfangspunkt und die Axe der y gemein ist, gleichen Werth habe, leuchtet daraus ein, dass $\frac{1}{2}(z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)$ den auf eine gegen die gemeinsame Axe y normale Ebene projicirten Flächenraum desjenigen Dreiecks darstellt, welches von dem gemeinsamen Coordinaten-Anfangspunkt und von dem betrachteten Stromelemente gebildet wird. Die Gerade r, welche das betrachtete Stromelement mit dem inducirten Elemente verbindet, hat einen von dem gewählten Coordinatensysteme ganz unabhängigen Werth. Hieraus ergiebt sich der Werth des Quotienten $\frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$ für die beiden oben angenommenen Coordinatensysteme überall gleich, folglich auch der Werth des auf den ganzen geschlossenen Strom zu erstreckenden Integrals $\int \frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$.

Es geht hieraus hervor, dass das Neumann'sche Gesetz für den Kreis der Erscheinungen, auf den es sich seiner Herleitung nach bezieht, wo nämlich alle Inducenten entweder Magnete oder geschlossene Ströme sind, mit dem aus der oben entwickelten Theorie abgeleiteten Gesetze zusammenfalle; dass aber die Anwendung des Neumann'schen Gesetzes ausser jenem Kreise auf ungeschlossene Ströme als Inducenten nicht gestattet sei.

27.

Gesetz der Stromerregung in einem ruhenden Leiter, wenn ein constantes Stromelement ihm genähert oder von ihm entfernt wird.

Das Gesetz der *Volta-Induction* für diesen Fall, wo der inducirte Leiter ruhet, und das inducirende Stromelement bewegt wird, lässt sich eben so wie für den ersten Fall aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze ableiten. Es ist aber nicht nöthig, diese Ableitung zu geben, weil eine einfache Betrachtung lehrt, dass sie für den zweiten Fall wieder zu demselben Gesetze wie für den ersten führen müsse.

Das elektrische Grundgesetz, aus welchem alle Gesetze der *Volta-Induction* abgeleitet werden sollen, macht nämlich die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere blos von ihrer *relativen* Entfernung, Geschwindigkeit

und Beschleunigung abhängig. Diese bleiben aber durch eine beiden Massen beigelegte *gemeinschaftliche* Bewegung unverändert; folglich wird auch durch eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere nicht verändert. Man kann daher allen elektrischen Massen ohne Aenderung ihrer Wirkungen, folglich auch ohne Aenderung der von ihnen abhängigen Induction, eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung beilegen. Hat man also ein inducirendes Stromelement α, welches mit der *absoluten* Geschwindigkeit u' nach irgend einer Richtung bewegt wird, während das inducirte Element α' in *absoluter* Ruhe ist, so kann man, ohne die Induction zu ändern, beiden Elementen nebst den in ihnen enthaltenen elektrischen Massen noch eine *gemeinschaftliche* Bewegung von der Geschwindigkeit u' nach derjenigen Richtung beilegen, welche der Richtung gerade entgegengesetzt ist, nach welcher das Stromelement α sich wirklich bewegt Durch Hinzufügen dieser gemeinschaftlichen Bewegung wird das inducirende Element α zur Ruhe gebracht, während nun das inducirte Element α' sich mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, als in der Wirklichkeit das Stromelement. Es muss sich also aus dem aufgestellten Grundgesetze für gleiche *relative* Bewegung der beiden Elemente die nämliche Induction ergeben, unabhängig davon, ob bei dieser relativen Bewegung das eine oder das andere oder keines von beiden Elementen in *absoluter* Ruhe sich befinde. Mit diesem Resultate stimmt bekanntlich auch die Erfahrung überein.

28.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter durch Aenderung der Stromintensität in einem benachbarten Leiter.

Bezeichnet α und α' die Länge des inducirenden und des inducirten Elements, so sind in beiden Elementen wieder 4 elektrische Massen zu unterscheiden:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *veränderlichen* Geschwindigkeit u in der Richtung des ruhenden Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ macht, du bezeichne die Aenderung von u während des Zeitelements dt; die *zweite* $-\alpha e$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und $-du$ bezeichne die Aenderung dieser Geschwindigkeit während des Zeitelements dt; die *dritte* $+\alpha' e'$ bewege sich mit der constanten Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des ruhenden Elements α', welche mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel θ' macht; die *vierte* $-\alpha' e'$ bewege sich endlich, wiederum den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u'$, d. h. rückwärts. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich

in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r der beiden Elemente α und α' selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element α' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24, nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die Induction abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner gelten hierin für die ersten Differentialcoefficienten die nämlichen Werthe, welche Art. 22. gefunden wurden, nämlich:

$$\frac{dr_1}{dt}=-\frac{dr_2}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-\frac{dr_4}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'.$$

Es ist also $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8\,uu'\cos\theta\cos\theta'$,

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=0.$$

Da die Geschwindigkeit u jetzt aber veränderlich ist, so ergeben sich für die zweiten Differentialcoefficienten andere Werthe als Art. 22., wo sie constant war, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta\,.\,\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'\,.\,\frac{d\theta'_1}{dt}-\cos\theta\,.\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta\,.\,\frac{d\theta_2}{dt}+u'\sin\theta'\,.\,\frac{d\theta'_2}{dt}+\cos\theta\,.\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2}=+u\sin\theta\,.\,\frac{d\theta_3}{dt}+u'\sin\theta'\,.\,\frac{d\theta'_3}{dt}-\cos\theta\,.\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2}=-u\sin\theta\,.\,\frac{d\theta_4}{dt}-u'\sin\theta'\,.\,\frac{d\theta'_4}{dt}+\cos\theta\,.\,\frac{du}{dt}.$$

Es ergiebt sich also für

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$

derselben Werth wie Art. 22., nämlich, wenn man die dort S. 332 entwickelten Werthe von $\frac{d\theta_1}{dt}$, $\frac{d\theta'_1}{dt}$ u. s. w. substituirt,

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-8\,uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega.$$

Dagegen ist

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$
$$-4\cos\theta.\frac{du}{dt}.$$

Da aber nach S. 332 die Werthe

$$\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}=\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}=\frac{d\theta'_3}{dt}+\frac{d\theta'_4}{dt}=0$$

sind, so ist

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-4\cos\theta.\frac{du}{dt}.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, wie Art. 22.

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}.aeu.ae'u'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

d. h. die auf das Element α' wirkende Kraft wird bei veränderlicher Stromintensität eben so wie bei unveränderlicher bestimmt, und das Ampère'sche Gesetz findet in dieser Beziehung auch bei veränderlichen Strömen Anwendung.

Die *Differenz* jener beiden auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirkenden Kräfte, von welcher die *Induction* abhängt, ergiebt sich dagegen

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.aaee'.\cos\theta.\frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 323 $aeu=i$, folglich, weil u veränderlich, $ae.du=di$ ist,

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.ae'.\cos\theta.\frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements α' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' einschliesst. Zerlegt man also jene ganze Kraft, welche die beiden Elektricitäten in α' zu scheiden sucht, nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obige *Differenz* mit $\cos\theta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.ae'.\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Dividirt man diesen Werth noch mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente α auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft in dem gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24. S. 339)

$$=-\frac{a}{2}.\frac{\alpha\alpha'}{r}.\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Die *Induction* während des Zeitelements dt, d. h. das Product dieses Zeitelements in die wirkende elektromotorische Kraft, ist also

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \cos\theta \cos\theta' \cdot di,$$

folglich die *Induction* für irgend einen Zeitraum, in welchem die Intensität des inducirenden Stroms um i zunimmt, während r, θ und θ' unverändert bleiben,

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} i \cos\theta \cos\theta'.$$

Der *positive* Werth dieses Ausdrucks bezeichnet einen im Elemente α' inducirten Strom nach der Richtung von α', welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' macht, der *negative* Werth einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung.

Wenn die beiden Elemente α und α' einander parallel sind, und $\theta = \theta'$, so hat obiger Ausdruk für *wachsende* Stromintensität, oder für einen positiven Werth von i, einen *negativen* Werth, d. h. bei wachsender Stromintensität in α wird in α' ein Strom in entgegengesetzter Richtung erregt, als der inducirende Strom ist. Das Umgekehrte findet bei abnehmender Stromintensität statt. Beide Resultate stimmen mit bekannten Thatsachen überein. Auch die Proportionalität der Induction mit der Intensitätsänderung i des inducirenden Stroms entspricht der Erfahrung, so weit Schätzung ohne genaue Messung reicht.

29.

Vergleichung der Inductionswirkungen constanter Ströme auf bewegte Leiter mit denen variabeler Ströme auf ruhende Leiter.

Es sind in den vorhergehenden Artikeln aus dem elektrischen Grundgesetze die Gesetze der *Volta-Induction*, übereinstimmend mit der Erfahrung, nicht allein für den Fall abgeleitet worden, wo dieselbe durch *constante* Ströme in *bewegten* Leitern, sondern auch für den Fall, wo dieselbe durch *variabele* Ströme in *ruhenden* Leitern hervorgebracht wird. Die *Inductionsgesetze* für diese beiden Fälle sind sehr verschieden, und es ist darum sehr interessant, dass sich daraus dennoch sehr einfache Relationen zwischen den Wirkungen beider Inductionen ergeben.

Eine solche einfache Relation zwischen der Inductionswirkung *constanter* Ströme auf *bewegte* Leiter und der Inductionswirkung *variabeler* Ströme auf *ruhende* Leiter ergiebt sich aus den Art. 24. und 28. entwickelten Gesetzen selbst schon für einzelne inducirende und inducirte *Elemente*, wenn die Bewegung des inducirten Elements im ersteren Falle nach der Richtung der Geraden r geschieht. Denn berechnet man unter dieser Voraussetzung die gesammte Inductionswirkung, welche ein Stromelement von der *constanten* Intensität i hervorbringt, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage parallel mit sich selbst nach der Richtung der Geraden r unendlich weit entfernt wird,

oder aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage genähert wird, so findet man, dass diese gesammte Inductionswirkung derjenigen gleich ist, welche das inducirende Element, wenn seine Stromintensität um i abnähme oder zunähme, auf das inducirte Element hervorbringen würde, wenn es in der gegebenen Lage beharrte. Es ergiebt sich also, zunächst für diesen speciellen Fall, die Regel, *dass durch Entstehen oder Verschwinden eines Stroms in der Nähe eines Leiters in diesem Leiter derselbe Strom inducirt werde, wie wenn jener Strom gleichförmig fortgedauert hätte, aber entweder aus grosser Entfernung in jene Nähe des Leiters, oder umgekehrt aus jener Nähe in grosse Entfernung versetzt worden wäre.*

Für den angeführten speciellen Fall ergiebt sich dieser Satz leicht, wie folgt. Der am Ende des 24. Artikels gefundene Ausdruck der elektromotorischen Kraft ist mit dem Zeitelemente dt zu multipliciren, um die diesem Zeitelemente dt, oder dem in demselben durchlaufenen Wegelemente $u'dt$, entsprechende *Inductionswirkung* zu erhalten. Der Werth des Integrals von diesem Producte zwischen bestimmten Zeit- oder Wegegrenzen giebt dann die gesammte der Zwischenzeit oder dem in derselben durchlaufenen Wege entsprechende *Inductionswirkung*

$$= -ai\int\frac{\alpha\alpha'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\cos\varphi \,.\, u'\,dt.$$

In unserem Falle, wo die Bewegung in der Geraden r geschieht, ist nun

$$u'dt = dr, \text{ und } \cos\theta' = 1.$$

Nach Art. 24. ist $\cos\varepsilon = \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos\omega + \cos\theta\,\cos\theta'$, also hier:

$$\cos\varepsilon = \cos\theta.$$

Da endlich die Winkel θ und φ bei der Bewegung des mit sich stets parallelen Elements α' in der Richtung der Geraden r constante Werthe haben; so ist jene *Inductionswirkung*

$$= + \frac{ai}{2}\,.\,\alpha\alpha'\cos\theta\cos\varphi \,.\int\frac{dr}{rr}$$

Der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen $r = r$ bis $r = \infty$, d. h die *Inductionswirkung*, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage unendlich weit *entfernt* wird, ist

$$= + \frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi\,;$$

zwischen den Grenzen $r = \infty$ bis $r = r$, d. h. die *Inductionswirkung*, während das inducirte Element aus unendlicher Ferne bis zu einer gegebenen Lage *genähert* wird, ist dagegen

$$= - \frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi.$$

Beachtet man, dass φ hierin nach Art. 24. denselben Winkel bezeichnet, welchen θ' Art. 28., nämlich den Winkel, welchen das inducirte Element α' mit der verlängerten Geraden r macht; so sieht man, dass die gefundene Inductionswirkung derjenigen gleich ist, welche nach dem Art. 28. gegebenen Ge-

setze erhalten wird, wenn das inducirte Element α' in der gegebenen Lage beharrt und die Stromintensität i in dem inducirenden Elemente α verschwindet oder entsteht.

Die gefundene Relation beider Inductionswirkungen lässt sich allgemeiner aussprechen, zwar nicht für einzelne Elemente, aber für *geschlossene Ströme und Leiter*. Es möge zunächst der Fall betrachtet werden, wo alle Elemente des inducirten geschlossenen Leiters gleich und parallel bewegt werden.

Die *Inductionswirkung* des Stromelements α auf das inducirte Element α' ist wie vorher

$$= -ai\int\frac{\alpha\alpha'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\cos\varphi\,.\,u'\mathrm{d}t.$$

Bezeichnet man nun mit σ und σ' die Winkel, welche die beiden Elemente α und α' mit der von der Geraden r bei der Bewegung des Elements α' erzeugten Ebene machen, ferner mit γ und γ' die Winkel, welche die Projectionen von α und α' auf jene Ebene mit der Richtung der Bewegung machen, so ist

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\sigma\,\cos(\theta'-\gamma)\\ \cos\varphi &= \cos\sigma'\,\cos(\theta'-\gamma')\\ \cos\varepsilon &= \cos\sigma\,\cos\gamma.\end{aligned}$$

Die Projection des Wegelements $u'\mathrm{d}t$ auf die Gerade r giebt den Werth von $\mathrm{d}r$ für das Zeitelement $\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}r = u'\mathrm{d}t\,.\cos\theta' \text{ oder } u'\mathrm{d}t = \sec\theta'\,.\,\mathrm{d}r.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die *Inductionswirkung* von α auf α'

$$= -\int ai\alpha\alpha'\cos\sigma\cos\sigma'(\cos\gamma\sec\theta' - \tfrac{3}{2}\cos(\theta'-\gamma))\cos(\theta'-\gamma')\,.\,\frac{\mathrm{d}r}{rr},$$

oder, wenn $\cos(\theta'-\gamma)$ und $\cos(\theta'-\gamma')$ entwickelt werden,

$$= +\frac{ai}{2}\int\alpha\alpha'\cos\sigma\cos\sigma'\,.\,\mathrm{d}R,$$

worin Kürze halber mit $\mathrm{d}R$ folgender Ausdruck bezeichnet ist:

$$(\cos\gamma\cos\gamma' - 2\cos\gamma\sin\gamma'\tang\theta' - 3\cos(\gamma+\gamma')\sin\theta'^2 + 3\sin(\gamma+\gamma')\sin\theta'\cos\theta')\,.\,\frac{\mathrm{d}r}{rr}.$$

Beachtet man, dass bei der gleichen und parallelen Bewegung aller Elemente jedes derselben *parallel mit sich selbst* verschoben wird, folglich die Winkel σ, σ', γ, γ' constant sind, und setzt man

$$\sin\theta' = \frac{b}{r},\quad \cos\theta' = \frac{\sqrt{(rr-bb)}}{r},\quad \tang\theta' = \frac{b}{\sqrt{(rr-bb)}},$$

worin b das Penpendikel von α auf die Bahn des inducirten Elements α' bezeichnet, so lässt sich die Integration ausführen, und man erhält als *unbestimmtes Integral* folgenden Ausdruck:

$$-\frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi - \frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\sigma\cos\sigma'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'.$$

Die gesuchte *Inductionswirkung* ist das *bestimmte Integral* oder die Differenz der beiden Werthe, welche dieser Ausdruck annimmt, wenn man darin die beiden Grenzwerthe von r, θ, φ und θ' substituirt.

Bildet man den nämlichen Ausdruck, wie für die Elemente α und α', für *alle* Combinationen der inducirenden und inducirten Elemente, welche in dem geschlossenen Strome und Leiter enthalten sind, und bezeichnet die *Summe* aller mit

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta',$$

so ist die Inductionswirkung des geschlossenen Stroms auf den geschlossenen Leiter der Differenz der beiden Werthe gleich, welche diese Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und dem Ende der Induction entsprechenden Werthe von r, θ, φ und θ' substituirt.

Obige *Summe* besteht nun aus zwei Theilen, und es soll bewiesen werden, dass der *letztere Theil* für alle Werthe von r und θ' Null sei. Alsdann reducirt sich die *Inductionswirkung* eines *geschlossenen* Stroms auf einen *geschlossenen* Leiter auf die Differenz der beiden Werthe, welche der *erstere Theil* obiger Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und die dem Ende der Induction entsprechenden Werthe von r, θ, φ substituirt.

Dass der *letztere Theil* obiger Summe, nämlich

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0$$

sei, lässt sich leicht nachweisen, wenn man die inducirenden und die inducirten Elemente dem Satze gemäss zerlegt, dass zur Bestimmung der Wechselwirkung zweier Elemente für jedes derselben 3 andere gesetzt werden können, welche die 3 Kanten eines Parallelopipedums bilden, dessen Diagonale von dem gegebenen Elemente eingenommen wird. Ueber diesen Satz siehe unten Art. 31.

Zerlegt man hiernach die Elemente α und α', jedes in 3 Elemente, deren *erstes* der Richtung der Bewegung parallel sei, das *zweite* senkrecht gegen r, in der von r bei der Bewegung von α' erzeugten Ebene, das *dritte* senkrecht auf die beiden ersteren, und bezeichnet sie mit

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \text{und}\quad \alpha'_1,\quad \alpha'_2,\quad \alpha'_3,$$

so geht $\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'$ in eine Summe von 9 Theilen über. Für die beiden mit $\alpha_3\alpha'_2$ und mit $\alpha_3\alpha'_2$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos 6=0$; für die beiden mit $\alpha_1\alpha'_3$ und mit $\alpha_2\alpha'_3$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos 6'=0$; für den mit $\alpha_3\alpha'_3$ proportionalen Theil sind die beiden Faktoren $\cos 6=\cos 6'=0$; endlich ist für den mit $\alpha_1\alpha'_1$ und mit $\alpha_2\alpha'_2$ proportionalen 6ten und 7ten Theil der Faktor $\sin(\gamma'-\gamma)=0$. Es bleiben also nur 2 Theile übrig, welche nämlich mit $\alpha_1\alpha'_2$ und mit $\alpha_2\alpha'_1$ proportional sind, für welche $\cos 6=1$, $\cos 6'=1$, $\sin(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\theta'$ ist: diese beiden Theile sind also:

$$\pm\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\alpha'_2}{r}\cos\theta'\cot\theta' \text{ und } \pm\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_2\alpha'_1}{r}\cos\theta'\cot\theta',$$

und mögen Kürze halber mit A und B bezeichnet werden. Verfährt man nun gleichermaassen mit je zwei Elementen des geschlossenen Stroms und Leiters, so findet man, dass, unter den übrigen eben so gebildeten Theilen, zwei Theile

sich befinden, von welchen A und B aufgehoben werden, und die mit A' und B' bezeichnet werden sollen. Gilt dies allgemein, so geht daraus hervor, dass

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\theta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0$$

sei, was bewiesen werden sollte.

Den Theil A' nun, von welchem A aufgehoben wird, findet man auf folgende Weise. Durch die Mitte des *inducirenden* Elements α als Scheitel lege man zwei Kegelflächen, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung, d. i. mit α_1, parallel sei. Diese beiden Kegelflächen sollen das *inducirte* Element α' begrenzen. Es leuchtet ein, dass wenigstens noch ein *zweites* Element $\mathfrak{a}'$ des *geschlossenen Leiters* von den nämlichen Kegelflächen begrenzt sein müsse. Und zwar muss ein Strom, welcher in α' *von der äusseren Kegelfläche zur inneren* geht, in $\mathfrak{a}'$ umgekehrt *von der inneren zur äusseren gehen.* Der Werth von θ' ist für beide Elemente gleich. Zerlegt man nun das zweite Element $\mathfrak{a}'$ eben so, wie das erste α', und bezeichnet mit $\mathfrak{a}'_2$ dasjenige Seitenelement, welches, senkrecht auf der $\mathfrak{a}'$ mit α verbindenden r', in der von r' bei der Bewegung von $\mathfrak{a}'$ erzeugten Ebene liegt, so soll der mit $\alpha_1\mathfrak{a}'_2$ proportionale Theil der Theil A' sein, durch welchen A aufgehoben wird. Es ist aber

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\mathfrak{a}'_2}{r'}\cdot\cos\theta'\cot\theta',$$

und es verhalten sich $\alpha'_2:\mathfrak{a}'_2$ wie ihre Entfernungen von dem beiden Kegelflächen gemeinschaftlichen Scheitel, d. i. wie $r:r'$, folglich ist:

$$\frac{\mathfrak{a}'_2}{r'}=\frac{\alpha'_2}{r}.$$

Substituirt man diesen Werth, so ist

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\frac{\alpha_1\alpha'_2}{r}.\cos\theta'\cot\theta',$$

und ist, abgesehen vom Vorzeichen, dem Werthe von A gleich. Aus der *entgegengesetzten Richtung,* nach welcher, wie oben angegeben worden ist, die Elemente α' und $\mathfrak{a}'$, oder α'_2 und $\mathfrak{a}'_2$, von dem nämlichen Strome durchflossen werden, lässt sich leicht erkennen, dass wenn in A, $\sin(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\theta'$ ist, in A', $\sin(\gamma'-\gamma)=\pm\cos\theta'$ sei, dass also die Werthe von A und A' immer entgegengesetzte Vorzeichen haben; folglich heben beide einander auf.

Es kann vorkommen, dass ausser α' und $\mathfrak{a}'$ noch ein *drittes* Element des Leiters von den nämlichen Kegelflächen begrenzt wird; es muss dann aber nothwendig, wenn der Leiter *geschlossen* ist, auch noch ein *viertes* existiren, und es gilt vom dritten und vierten das nämliche wie vom ersten und zweiten u. s. w.

Auf ähnliche Weise findet man B', wodurch B aufgehoben wird, wenn man die Mitte des *inducirten* Elements α' zum Scheitel zweier Kegelflächen macht, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung parallel ist, und welche das *inducirende* Element α begrenzen. Dieselben Kegelflächen begrenzen dann von dem *geschlossenen Inducenten* noch ein zweites Element, aus dessen Zerlegung sich B' ebenso ergiebt, wie vorher A' aus der Zerlegung des Elements $\mathfrak{a}'$.

Aus der wechselseitigen Aufhebung aller mit A, A', B, B' u. s. w. bezeichneten Theile geht nun hervor, dass für *geschlossene Ströme und Leiter* die Gleichung gelte:

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0.$$

Hieraus folgt nun *erstens*, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel *immer nach einerlei Richtung* bewegt wird, die *Inductionswirkung*

$$=\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1,$$

worin die Werthe von r, θ, φ für den Anfang der Induction mit r_0, θ_0, φ_0, für das Ende mit r_1, θ_1, φ_1 bezeichnet sind. Setzt man hierin $r_1=\infty$, d. h. wird der geschlossene Leiter von einer gegebenen Lage unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt, so ist die gesammte dadurch hervorgebrachte Inductionswirkung,

$$=\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0,$$

die nämliche, welche sich nach dem vorhergehenden Artikel für denselben *inducirenden* Stromleiter und für denselben *inducirten* Leiter ergiebt, wenn sie in ihrer anfänglichen gegenseitigen Lage *beharren* und der Strom i im ersteren *verschwindet.*

Zweitens, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel nach irgend einer bestimmten Richtung nur wenig verschoben wird, darauf nach einer etwas *veränderten* Richtung wieder ein wenig, u. s. f., und wenn die Werthe von r, θ, φ beim Anfang der Induction mit r_0, θ_0, φ_0, am Ende der ersten oder Anfang der zweiten Wegstrecke mit r_1, θ_1, φ_1, am Ende der zweiten oder Anfang der dritten Wegstrecke mit r_2, θ_2, φ_2 u. s. w. bezeichnet werden, folgt die *ganze Inductionswirkung*

$$\begin{aligned}=&+\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1\\&+\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_2}\cos\theta_2\cos\varphi_2\\&+\text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit r_n, θ_n, φ_n die Werthe von r, θ, φ am Ende aller dieser nach einander in *verschiedenen* Richtungen ausgeführten Bewegungen, so reducirt sich der angegebene Werth der ganzen Inductionswirkung, weil alle Glieder mit Ausnahme des ersten und letzten sich aufheben, auf

$$\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_n}\cos\theta_n\cos\varphi_n,$$

woraus man ersieht, wenn $r_n=\infty$ gesetzt wird, dass die *Inductionswirkung* dieselbe ist, wenn ein geschlossener Leiter von einer gegebenen Lage zu einem geschlossenen Strome durch eine beliebig *gekrümmte* Bahn, aber so, dass alle Theile sich immer parallel bleiben, unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt wird, wie wenn das nämliche durch eine *geradlinige* Bahn geschähe,

oder wie wenn der geschlossene Leiter in seiner ursprünglichen Lage *beharrte* und der Strom i im inducirenden Leiter *verschwände,* nämlich

$$=\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0.$$

Wird *drittens* endlich der geschlossene Leiter ganz willkührlich bewegt, so lässt sich die Bewegung eines jeden seiner Elemente in irgend einem Augenblicke in eine *Drehung* um seinen Mittelpunkt und in eine parallele *Verschiebung* des ganzen Elements auflösen. Die Inductionswirkung der *Drehung* eines Elements um seinen Mittelpunkt ist $=0$, weil r dabei unverändert bleibt, folglich $dr=0$ ist. Die *Verschiebung* jedes Elementes lässt sich in 3 Verschiebungen nach den Richtungen von 3 Coordinatenaxen zerlegen. Für die parallelen Verschiebungen aller Elemente des geschlossenen Leiters nach *jeder* dieser Richtungen ist dann

$$\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos6\cos6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0,$$

woraus man leicht sieht, dass auch bei *willkührlicher Bewegung* des geschlossenen Leiters die *Inductionswirkung*

$$=\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_n}\cos\theta_n\cos\varphi_n$$

folgt, worin r_0, θ_0, φ_0 und r_n, θ_n, φ_n die Werthe von r, θ, φ im Anfange und am Ende der Induction bezeichnen.

Die hier erörterte Relation zwischen der Inductionswirkung eines geschlossenen *constanten* Stroms auf einen geschlossenen *bewegten* Leiter, und zwischen der Inductionswirkung eines geschlossenen *variabelen* Stroms auf einen geschlossenen *ruhenden* Leiter ist schon von Neumann a. a. O. in grosser Allgemeinheit aufgestellt worden. Neumann bauet nämlich auf die Art. 26. angeführte *empirische* Grundlage die Folgerung, dass die gesammte Inductionswirkung, welche der Versetzung des inducirten Leiters aus einer Lage in eine andere entspricht, unabhängig von den Zwischenlagen sei, welche er durchläuft, und von der Geschwindigkeit, mit welcher er sie durchläuft, und blos von der Differenz der *Potentialwerthe* des Inducenten im Anfang und am Ende der Bahn abhänge. Nachdem Neumann diesen Satz für die Inductionswirkung *constanter* Ströme auf *bewegte* Leiter festgestellt hat, fährt er a. a. O. S. 39 fort: «Aus der Unabhängigkeit der inducirten elektromotorischen Kraft von der Bewegung an sich wird gefolgert, dass *jede Ursache,* welche eine Veränderung im Werthe des *Potentials* eines geschlossenen Stroms in Beziehung auf einen geschlossenen Leiter hervorbringt, einen Strom inducirt, dessen elektromotorische Kraft durch die *Veränderung,* welche das *Potential* erlitten hat, ausgedrückt wird.» Mit Hülfe dieses Satzes hat Neumann die Bestimmung der zweiten Art der *Volta-Induction,* nämlich die eines *variabelen* Stroms auf einen ruhenden Leiter, auf die der ersten Art, nämlich eines *constanten* Stroms auf einen *bewegten* Leiter zurückgeführt. Die oben erwähnte Relation zwischen beiden Inductionswirkungen ergiebt sich daraus von selbst. Der letzte Grund aller dieser Verhältnisse lässt sich nun nach Obigem unmittelbar

in dem *elektrischen Grundgesetze* nachweisen, nach welchem je zwei elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken.

30.

Allgemeines Gesetz der Volta-Induction.

Nach der Betrachtung der beiden Hauptfälle der *Volta-Induction,* wo nämlich entweder der Strom *constant,* der Leiter aber *bewegt,* oder wo der Strom *variabel,* der Leiter aber *unbewegt* war, lässt sich das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter leicht entwickeln.

α und α' bezeichnen wieder die Länge zweier Elemente, von denen das erstere α *ruhend* angenommen wird. Diese Annahme beschränkt nach Art. 27. die Allgemeinheit der Betrachtung nicht, weil jede Bewegung des Elements α auf α' übertragen werden kann, indem man ihr in α' die entgegengesetzte Richtung beilegt. In diesen beiden Elementen werden, wie früher, folgende 4 elektrische Massen unterschieden:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des ruhenden Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $+du$. Die *zweite* Masse $-\alpha e$ bewege sich, den für einen galvanischen Strom gegebenen Bestimmungen gemäss, in der nämlichen Richtung, mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $-du$. Die *dritte* Masse $+\alpha' e'$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des Elements α', welche mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel θ' macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich in dem Zeitelemente dt um $+du'$. Ausserdem theile aber diese elektrische Masse die Bewegung des Elements α' selbst, welche mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung geschieht, die mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel η macht, und in einer durch diese Gerade gelegten Ebene enthalten ist, welche mit der durch dieselbe Gerade parallel mit dem Elemente α gelegten Ebene den Winkel ε einschliesst. Die Geschwindigkeit v ändere sich während des Zeitelements dt um dv. Die *vierte* Masse $-\alpha' e'$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in derselben Richtung des Elements α' mit der Geschwindigkeit $-u'$, die sich in dem Zeitelement dt um $-du'$ ändert; theile aber ausserdem mit der vorigen Masse die Geschwindigkeit v des Elements α' selbst in der schon bezeichneten Richtung. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich, in dem betrachteten Augenblicke, der Entfernung r der beiden Elemente selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden. Legt man durch die von α nach α' gezogene Gerade zwei Ebenen,

die eine mit α, die andere mit α' parallel, so bezeiche ω den von diesen beiden Ebenen eingeschlossenen Winkel.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element α' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24. nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die *Induction* abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner findet man, wenn man ausser den Bewegungen der elektrischen Massen in ihren Leitern auch die ihnen mit ihren Leitern gemeinschaftlichen Bewegungen in Rechnung bringt, die ersten Differentialcoëfficienten auf die Art. 22. angegebene Weise, indem man zu den dort gefundenen Werthen die nach der Richtung der Geraden r zerlegte Geschwindigkeit des Elements α', nämlich $v\cos\eta$, hinzugefügt. Man erhält dann:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\theta\cos\theta',$$

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uv\cos\theta\cos\eta.$$

Die zweiten Differentialcoefficienten erhält man wie Art. 22., wenn man dabei noch die Variabilität der Geschwindigkeiten u, u', v berücksichtigt, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'\frac{d\theta'_1}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_1}{dt}-\cos\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_2}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_2}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_2}{dt}+\cos\theta\frac{du}{dt}-\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2}=+u\sin\theta.\frac{d\theta_3}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_3}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_3}{dt}-\cos\theta\frac{du}{dt}-\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_4}{dt}-u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_4}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_4}{dt}+\cos\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$
$$-v\sin\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt}+\frac{d\eta_2}{dt}-\frac{d\eta_3}{dt}-\frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

und

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$
$$-v\sin\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt}-\frac{d\eta_2}{dt}+\frac{d\eta_3}{dt}-\frac{d\eta_4}{dt}\right)$$
$$-4\cos\theta.\frac{du}{dt}.$$

Zur Bestimmung der Differentialcoefficienten $\frac{d\theta_1}{dt}$, $\frac{d\theta'_1}{dt}$, $\frac{d\eta_1}{dt}$ u. s. w. verfahre man nun wie S. 329 ff. oder wie in der Note S. 332. Es ergiebt sich nämlich die Aenderung der Richtung der Geraden r_1

in der Ebene des Winkels $\theta = +\frac{udt}{r_1}.\sin\theta$

in der Ebene des Winkels $\theta' = -\frac{u'dt}{r_1}.\sin\theta'$

in der Ebene des Winkels $\eta = -\frac{vdt}{r_1}.\sin\eta$.

Zieht man nun mit der Linie r_1 und mit den Richtungen der Geschwindigkeit u, u' und v Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche Fig. 21. in R, U, U' und V schneiden, und verbindet R mit U, U' und

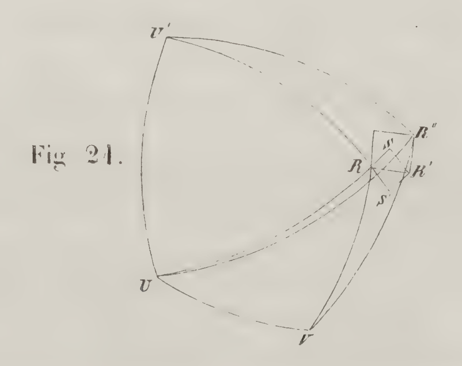


Fig. 21.

V durch grösste Kreisbögen; so bildet die Ebene, welche den Bogen $UR = \theta$ enthält, mit der Ebene des Bogens $U'R = \theta'$ den mit ω bezeichneten Winkel, mit der Ebene des Bogens $VR = \eta$ den mit ε bezeichneten Winkel.

Man verlängere den Kreisbogen UR nach S, $U'R$ nach S' und VR nach T und mache

$$RS = +\frac{udt}{r_1}\sin\theta,\quad RS' = -\frac{u'dt}{r_1}\sin\theta',\quad RT = -\frac{vdt}{r_1}\sin\eta.$$

Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S, S' und T liegen, kann nun, wie S. 334, als ein Element der die Kugel bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS, RS' und RT als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$, zieht die Diagonale RR' und vollendet das zweite Parallelogramm $RR'R''T$; so geht eine durch den Mittelpunkt gezogene Parallellinie mit der Geraden r_1, welche die beiden *positiven* Massen $+\alpha e$ und $+\alpha' e'$ am Ende des Zeitelements dt verbindet, durch den Punkt R''.

Verbindet man endlich R'' mit U, U' und V durch grösste Kreisbögen, so ist

$$\begin{aligned} UR'' &= \theta + d\theta_1 = UR + d\theta_1 \\ U'R'' &= \theta' + d\theta'_1 = U'R + d\theta'_1 \\ VR'' &= \eta + d\eta' = VR + d\eta_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= UR'' - UR = RS + RS'\cos\omega + RT\cos\vartheta \\ d\theta'_1 &= U'R' - U'R = RS' + RS\cos\omega + RT\cos(\omega+\vartheta) \\ d\eta_1 &= VR'' - VR = RT + RS\cos\vartheta + RS'\cos(\omega+\vartheta). \end{aligned}$$

Substituirt man hierin die oben angegebenen Werthe von RS, RS' und RT, so erhält man:

$$\begin{aligned} r_1\frac{d\theta_1}{dt} &= +u\sin\theta - u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_1\frac{d\theta'_1}{dt} &= -u'\sin\theta' + u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ r_1\frac{d\eta_1}{dt} &= -v\sin\eta + u\sin\theta\cos\vartheta - u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-\alpha e$ und $-\alpha' e'$:

$$\begin{aligned} r_2\frac{d\theta_2}{dt} &= -u\sin\theta + u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_2\frac{d\theta'_2}{dt} &= +u'\sin\theta' - u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta), \\ r_2\frac{d\eta_2}{dt} &= -v\sin\eta - u\sin\theta\cos\vartheta + u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta); \end{aligned}$$

ferner für die *positive* $+\alpha e$ und für die *negative* $-\alpha' e'$:

$$\begin{aligned} r_3\frac{d\theta_3}{dt} &= +u\sin\theta + u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_3\frac{d\theta'_3}{dt} &= +u'\sin\theta' + u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ r_3\frac{d\eta_3}{dt} &= -v\sin\eta + u\sin\theta\cos\vartheta + u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta); \end{aligned}$$

endlich für die *negative* $-\alpha e$ und für die *positive* $+\alpha' e'$:

$$r_4 \frac{d\theta_4}{dt} = -u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\varepsilon$$

$$r_4 \frac{d\theta'_4}{dt} = -u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \varepsilon)$$

$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = -v \sin\eta - u \sin\theta \cos\varepsilon - u' \sin\theta' \cos(\omega + \varepsilon).$$

Da nun für den betrachteten Augenblick $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$ ist, so erhält man hieraus:

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = -4\, u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = -4\, v \sin\eta \cos\varepsilon\,;$$

ferner:

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = +4\, u \sin\theta \cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0,$$

endlich:

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = +4 u \sin\theta \cos\varepsilon.$$

Substituirt man diese Werthe in den oben angegebenen Aggregaten der zweiten Differentialcoefficienten, so erhält man

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = -8\, uu' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = -8\, uv \sin\theta \sin\eta \cos\varepsilon - 4r \cos\theta . \frac{du}{dt}.$$

Mit diesen Werthen endlich ergiebt sich die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} . aeu . ae'u' (\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\theta'),$$

d. h. die auf das ponderabele Element α' wirkende elektrodynamische Kraft wird bei bewegten Leitern und veränderlichen Stromintensitäten ebenso wie bei ruhenden Leitern und constanten Stromintensitäten bestimmt, und das Ampère'sche Gesetz findet in Beziehung auf diese Kräfte für gegebene Lage der Stromelemente und gegebene Stromintensitäten allgemeine Anwendung. Nur erfordert die Anwendung dieses Gesetzes, dass die Stromintensitäten *für jeden einzelnen Augenblick* gegeben seien, mit Einschluss des in Folge der *Induction* hinzugekommenen Theiles.

Ebenso ergiebt sich die *Differenz* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} . aeu . ae'v (\sin\theta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\eta) - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} aaee' . \cos\theta . \frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 323 $aeu = i$, und, weil u veränderlich, $ae \,.\, du = di$ ist,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta)\,.\,ae'v - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} ae'\,.\,\cos\theta\,.\,\frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements α' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' macht. Zerlegt man also jene ganze Kraft nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obigen Werth mit $\cos\theta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta)\,.\,ae'v\cos\theta' - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} ae'\cdot\cos\theta\cos\theta'\,.\,\frac{di}{dt}.$$

Dividirt man diesen Werth mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente α auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft im gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24. S. 339)

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta)\,.\,av\cos\theta' - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a\cos\theta\cos\theta'\,\frac{di}{dt}.$$

Setzt man hierin die Aenderung der Stromintensität

$$\frac{di}{dt} = 0,$$

so findet man dasselbe Gesetz wieder, welches Art. 24. für die Induction eines *constanten* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta)\,.\,av\cos\theta',$$

worin dieselben Winkel, welche Art. 24. mit θ', ω, φ bezeichnet wurden, η, ε und θ' benannt sind, und die Geschwindigkeit, welche dort u' hiess, mit v bezeichnet ist.

Setzt man dagegen in dem allgemeinen Werthe

$$v = 0,$$

so erhält man das nämliche Gesetz, welches Art. 28. für die Induction eines *variabelen* Stromelements auf das *ruhende* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a\cos\theta\cos\theta'\,.\,\frac{di}{dt}.$$

Die elektromotorische Kraft eines *variabelen* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters ist also die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche statt finden würden 1) wenn das Element des Leiters in dem betrachteten Augenblicke *nicht bewegt* würde, 2) wenn das Element des Leiters zwar bewegt würde, aber die *Stromintensität* des inducirenden Elements in dem betrachteten Augenblicke sich *nicht änderte*.

Es würde hiermit das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter, und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter vollständig gegeben sein, wenn angenommen werden dürfte, dass alle unter dem Namen *galvanischer Ströme* begriffenen elektrischen Bewegungen in linearen Leitern den S. 308. 311 gegebenen Bestimmungen wirklich genau entsprächen. Wenn aber auch nicht bezweifelt werden sollte, dass alle *galvanischen Ströme* jenen Bestimmungen nahe kommen, so lassen sich doch, bei der grossen Verschiedenheit der *Quellen des Galvanismus,* kleinere Abweichungen mit Recht erwarten. Diese Abweichungen und ihr Einfluss auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* sollen hier noch erörtert werden.

Nach den S. 308. 311 gegebenen Bestimmungen soll in jedem Stromelemente *gleich viel* positive und negative Elektricität enthalten sein, und beide sollen mit *gleicher Geschwindigkeit,* aber in entgegengesetztem Sinne, das Element durchströmen. Bestände ein *constanter* Strom aus lauter solchen Elementen, deren gegenseitige Lage unverändert bliebe, so würden dieselben wechselseitig auf einander gar keine *elektromotorischen* Kräfte ausüben. Siehe Art. 24. S. 337. Die *elektromotorischen* Kräfte, welche die Widerstände der einzelnen Elemente überwänden, und dadurch nach S. 309 die Fortdauer des Stromes in allen Elementen gleichzeitig bewirkten, müssten dann *unabhängig von den Stromelementen* existiren, und auf alle Stromelemente nach Proportion ihrer Widerstände vertheilt sein, wenn die gleichmässige Fortdauer der Strömung in allen Elementen bestehen soll.

Nach Beschaffenheit der *Quellen des Galvanismus,* von welchen die *ursprünglichen,* von der Wechselwirkung der Stromelemente selbst unabhängigen, *elektromotorischen* Kräfte herrühren, wird bald jenes gleiche Verhältniss zwischen den Kräften und den von ihnen zu überwindenden Widerständen in allen Elementen des Leiters statt finden, bald nicht. Es diene für den ersteren Fall als Beispiel ein homogener Leiter von der Form eines Kreises, in welchem ein galvanischer Strom dadurch inducirt wird, dass ein Magnet in der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Normale auf die Kreisebene bewegt wird. In diesem Falle wird durch *Magneto-Induction* eine auf alle Kreiselemente gleichmässig wirkende *elektromotorische* Kraft gewonnen, und da der *Widerstand,* bei der Homogeneität des kreisförmigen Leiters, für alle Elemente ebenfalls gleich ist, so sind hierdurch die Bedingungen für das gleichmässige Bestehen des Stroms in allen Theilen erfüllt. Es kommt aber ein solcher Fall der Natur der Sache nach selten vor; in der Regel wird kein gleiches Verhältniss der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte mit den *Widerständen* in allen Elementen statt finden, und die Ungleichheiten müssen dann durch *Wechselwirkung* der Elemente ausgeglichen werden. Soll nun eine solche in elektromotorischen Kräften bestehende Wechselwirkung der Elemente eines constanten Stroms nicht ausgeschlossen sein, so muss die Definition galvanischer Ströme erweitert werden.

Unter einem *galvanischen Strome,* im Gegensatze zu anderen unter diesem Namen nicht mit begriffenen elektrischen Bewegungen, sei eine solche Bewegung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter zu verstehen, dass alle Querschnitte des letzteren gleichzeitig von gleichen Mengen positiver und ne-

gativer Elektricität in entgegengesetztem Sinne durchflossen werden. Diese Gleichheit der *durchfliessenden* positiven und negativen Massen setzt nicht nothwendig die Gleichheit der *strömenden* positiven und negativen Massen voraus, die bisher angenommen wurde, sondern kann auch bei ungleicher Grösse der letzteren bestehen, wenn die *grössere* Masse *langsamer*, die *kleinere schneller* fliesst. Bei einem galvanischen Strome der letzteren Art entspringen aus der Wechselwirkung der Elemente *neue* elektromotorische Kräfte, von welchen die ungleichen Verhältnisse der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte zu den Widerständen ausgeglichen werden können. Denn sobald die *positive* Elektricitätsmenge der *negativen* in einem Elemente nicht gleich ist, d. h. sobald das Element, in Folge eines Ueberschusses an einer Elektricität, mit *freier Elektricität* geladen ist, wird diese *freie Elektricität* selbst, *nach den Gesetzen der Elektricitätserregung durch Vertheilung*, zu einer Quelle *elektromotorischer* Kräfte für alle anderen Elemente, welche durch Verstärkung jener Ladung so gesteigert werden können, dass sie, den *ursprünglichen* elektromotorischen Kräften hinzugefügt, in allen Elementen den Widerständen proportional werden, wozu in den bekannten galvanischen Ketten ein sehr geringer Grad elektrischer Ladung genügt.

Die Untersuchung, wie diese Ladung der einzelnen Elemente in einer geschlossenen galvanischen Kette durch anfängliche Ungleichheit der Strömung in den verschiedenen Theilen der Kette von selbst *entsteht* und so lange wächst, bis der angegebenen Bedingung eines in allen Theilen gleichmässigen Stromes genügt wird, führt zu der *inneren Mechanik der galvanischen Kette* und gehört nicht in das Bereich dieser Abhandlung, weil dabei die Wirkung elektrischer Massen auf *benachbarte* Massen in Rechnung gezogen werden muss, während hier blos die *in der Ferne* ausgeübten Wirkungen betrachtet werden sollen. Unabhängig von der Untersuchung der Entstehung dieser Ladungen, und der daraus sich ergebenden Gesetze ihrer Stärke und Vertheilung, soll hier nur der Einfluss erörtert werden, welchen sie, *wenn sie vorhanden sind*, auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* haben. Die Erörterungen dieses Einflusses ist darum wichtig, weil das Vorhandensein solcher Ladungen als Regel anzusehen ist, von welcher nur selten Ausnahmen vorkommen. Ist dieser Einfluss auch gering, wie daraus hervorgeht, dass, auch ohne auf ihn Rücksicht zu nehmen, die Rechnung mit der Erfahrung in den meisten Fällen übereinstimmt, so kann doch die Kenntniss davon, worin dieser Einfluss bestehe und wie er merklich werden könne, von Nutzen sein.

Man denke sich unter den S. 362 angegebenen Verhältnissen die *positive* Masse $+\alpha e$ in dem Elemente α um $m\alpha e$ vermehrt, wo m einen kleinen Bruch bezeichne, zugleich denke man sich aber die Geschwindigkeit dieser Masse $+u$ um die kleine Grösse $+mu$ vermindert; ebenso denke man sich die *positive* Masse $+\alpha' e'$ um $n\alpha' e'$ vermehrt, ihre Geschwindigkeit $+u'$ um nu' vermindert. Es sollen die auf beide elektrischen Massen im Elemente α' wirkenden Kräfte bestimmt werden, welche durch diese Veränderungen hinzukommen.

Die beiden Kräfte, welche die *positive* Masse $+\alpha e$ in dem Elemente α auf die *positive* und *negative* Masse $+\alpha' e'$ und $-\alpha' e'$ im Elemente α' ausübte, waren

$$+\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr_1}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr_3}{dt^2}\right),$$

worin nach S. 363 zu setzen ist:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta$$
$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta,$$

und nach S 363 und 365:

$$r\frac{ddr_1}{dt^2}=+uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2+vv\sin\eta^2$$
$$-2(uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+uv\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))$$
$$-r\left(\cos\theta\frac{du}{dt}-\cos\theta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right)$$

$$r\frac{ddr_3}{dt^2}=+uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2+vv\sin\eta^2$$
$$+2(uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-uv\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))$$
$$-r\left(\cos\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right).$$

Die *Differenz* obiger beiden Kräfte, von welcher die *elektromotorische* Kraft abhängt, kann

$$=2\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}$$

gesetzt werden, weil die übrigen Glieder gegen dieses erste sehr klein sind. Setzt man hierin nun $(1+m)e$ statt e, multiplicirt mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$, und zieht den ursprünglichen mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$ multiplicirten Werth ab, so erhält man nach S. 339. 367 die durch Ladung des Elements α mit freier Elektricität hinzukommende, auf das Element α' wirkende, *elektromotorische* Kraft

$$=2m\frac{\alpha\alpha'}{rr}e\cos\theta'.$$

Durch Ladung des Elements α' selbst, auf welches gewirkt wird, ändert sich die elektromotorische Kraft nicht; denn setzt man in obiger Differenz $(1+n)e'$ statt e', multiplicirt mit $\frac{\cos\theta'}{(1+n)e'}$, und zieht den ursprünglichen mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$ multiplicirten Werth ab, so bleibt kein Rest.

Die *Summe* obiger beiden Kräfte, von welcher die auf den ponderabeln Träger wirkende *elektrodynamische* Kraft abhängt, erhält man durch Substitution der angeführten Werthe

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,.\,ae\,.\,ae'\left[\begin{array}{l}uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-u'v\sin\theta\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)\\-\tfrac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta'+\tfrac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta-\tfrac{1}{4}r\cos\theta'.\frac{du}{dt}\end{array}\right].$$

Hieraus erhält man 1) den durch Vermehrung der Masse $+\alpha e$ hinzukommen-

den Theil der Kraft, mit welcher die Elemente α und α' einander abstossen, wenn man $(1+m)e$ statt e setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= -\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+8) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + u'v\cos\theta'\cos\eta - \frac{1}{4}r\cos\theta'\frac{du}{dt} \end{array}\right];$$

2) den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-m)u$ statt u setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= +\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - \frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta\right];$$

3) den durch Vermehrung der Masse $+\alpha'e'$ hinzukommenden Theile der Kraft, wenn man $(1+n)e'$ statt e' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= -\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+8) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + \frac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta - \frac{1}{4}r\cos\theta'\frac{du'}{dt} \end{array}\right];$$

4) den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u'$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-n)u'$ statt u' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= +\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta'\cos(\omega+8) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + \frac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta \end{array}\right].$$

Fügt man alle diese hinzukommenden Theile zusammen, so erhält man den Einfluss, welchen die Ladung der Elemente α und α' mit freier *positiver* (wenn m und n positive Werthe haben), oder *negativer* (wenn m und n negative Werthe haben) Elektricität auf die *elektrodynamische* Abstossungskraft, welche α auf α' ausübt, hat; es ist nämlich die daraus hevorgehende Vergrösserung dieser Abstossungskraft, wenn man

$$aev = \varkappa, \quad ae'u' = \iota' \text{ und } ae'du' = d\iota' \text{ setzt,}$$

$$= +\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}\varkappa\iota'\left(\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+8) - \frac{1}{2}\cos\theta'\cos\eta\right) + \frac{m+n}{8}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae\cos\theta'.\frac{d\iota'}{dt}.$$

Dieser Einfluss verschwindet also gänzlich, wenn man die Wirkung auf ein *ruhendes constantes* Stromelement betrachtet, für welches $v = 0$ und $d\iota' = 0$ ist. Ferner verschwindet dieser Einfluss auch bei einem *bewegten constanten* Stromelemente α', wenn das darauf wirkende Element α keine freie Elektricität besitzt, weil dann $m = 0$ und $d\iota' = 0$ ist. Es besteht endlich, wenn im Elemente α freie Elektricität vorhanden ist, jener Einfluss in einer Kraft, welche derjenigen gleich ist, welche auf das Stromelement α' von einem anderen an der Stelle von α befindlichen Stromelemente ausgeübt werden würde, wenn die in demselben enthaltenen Massen $+\frac{1}{2}m\alpha e$ und $-\frac{1}{2}m\alpha e$ mit den Geschwindigkeiten $-v$ und $+v$ in der Richtung strömten, nach welcher das Stromelement α' mit der Geschwindigkeit $+v$ bewegt wird. Die Nothwendig-

keit dieses Einflusses liess sich auch nach Fechner's Ansicht Art. 26. S. 347 einsehen. Hierzu kommt noch endlich für den Fall, dass die Stromintensität i' in dem Stromelemente α', auf welches gewirkt wird, sich ändert, ein mit dieser Aenderung di', und mit der Summe der in beiden Elementen α und α' vorhandenen freien Elektricitäten proportionaler Einfluss, welchen der letztere Theil der Formel bestimmt.

31.

Nach den im 19. Artikel von galvanischen Strömen gegebenen Bestimmungen, welche der Betrachtung über das elektrische Gesetz zweier aus der Ferne auf einander wirkender Massen zum Grunde gelegt worden sind, ist an die Stelle des *wirklichen* Stroms, in welchem die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem ponderabelen Theilchen zum andern wahrscheinlich einem *stetigen Wechsel* unterworfen ist, ein *idealer* Strom von *gleichförmiger* Geschwindigkeit gesetzt worden. Diese Substitution war zur Vereinfachung der Betrachtung nöthig und schien gestattet zu sein, weil es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelte. Es lässt sich nun diese im Anfange gemachte Voraussetzung an dem elektrischen Gesetze, zu dem wir gelangt sind, prüfen.

Es seien zwei elektrische Massen e und e' gegeben, welche am Ende der Zeit t in der Entfernung r von einander sich befinden. Ihre relative Geschwindigkeit sei bis zu diesem Augenblicke constant $= \gamma$ gewesen. Die Abstossungskraft beider Massen war also in dem letzten Zeitelemente des angegebenen Zeitraums t, dem elektrischen Grundgesetze gemäss,

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\gamma\gamma\right).$$

In dem folgenden Zeitelemente ε trete eine Beschleunigung

$$\frac{ddr}{dt} = \alpha$$

ein, wodurch die Abstossungskraft für die Dauer dieses Zeitelements

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\gamma\gamma\right) + \frac{aa}{8} \cdot \frac{ee'}{r}\,\alpha$$

wird. Multiplicirt man nun den Zuwachs an Kraft, der in diesem Zeitelemente im Vergleich mit dem vorhergehenden statt findet, mit diesem Zeitelemente ε selbst, so erhält man den Betrag, um welchen die Abstossungswirkung auf dem Wege dr, um welchen die Massen e und e' in dem Zeitelemente ε sich weiter von einander entfernt haben, durch jene Beschleunigung vermehrt worden ist,

$$= \frac{aa}{8} \cdot \frac{ee'}{r} \cdot \alpha\varepsilon.$$

Die relative Geschwindigkeit beider Massen, welche vor dem Zeitelemente ε $= \gamma$ gewesen war, ist nach demselben

$$=\gamma+\alpha\varepsilon$$

geworden. Bleibt nun diese unverändert, so ist die Abstossungskraft beider Massen, wenn sie zur Entfernung ϱ gelangt sind,

$$=\frac{ee'}{\rho\rho}\left(1-\frac{aa}{16}(\gamma+\alpha\varepsilon)^2\right)$$

wofür, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$=\frac{ee'}{\rho\rho}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Zeit

$$\frac{d\rho}{\gamma+\alpha\varepsilon},$$

in welcher beide Massen um das Wegelement $d\varrho$ sich von einander entfernen, und integrirt zwischen den Grenzen $\varrho=r$ bis $\varrho=r_1$, so erhält man die Abstossungswirkung beider Massen auf dem Wege r_1-r,

$$=\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Tritt endlich in dem Augenblicke, wo die beiden Massen in der Entfernug r_1 von einander sich befinden, eine Verlangsamung

$$\frac{ddr}{dt^2}=-\alpha$$

ein, welche eben so wie die frühere Beschleunigung blos während eines Zeitelements $=\varepsilon$ dauert, so wird die relative Geschwindigkeit beider Massen dadurch wieder auf ihren ursprünglichen Werth

$$=\gamma$$

gebracht, und auf dem in diesem Zeitelemente ε zurückgelegten Wege tritt eine Verminderung der Abstossungswirkung

$$=-\frac{aa}{8}\cdot\frac{ee'}{r_1}\cdot\alpha\varepsilon$$

ein. Man erhält hieraus die Totalsumme der Abstossungswirkung für den ganzen Weg r_1-r mit Einschluss der beiden Zeitelemente ε, in denen die Beschleunigung und Verlangsamung statt fand,

$$=+\frac{aa}{8}\frac{ee'}{r}\alpha\varepsilon+\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{aa}{8}\cdot\frac{ee'}{r_1}\alpha\varepsilon,$$

oder, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$=\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Die Zeit, für welche diese Totalsumme gilt, ist aber

$$=\frac{r_1-r}{\gamma+\alpha\varepsilon}.$$

Dividirt man jene Summe mit dieser Zeit, so erhält man die mittlere Abstossungskraft während dieser Zeit

$$=\frac{ee'}{rr^1}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma\right),$$

d. i. den nämlichen Werth, wie wenn der Weg $r_1 - r$ mit der ursprünglichen Geschwindigkeit γ zurückgelegt worden wäre. Es folgt also hieraus, dass wenn die relative Geschwindigkeit zweier elektrischen Massen in zwei verschiedenen Entfernungen, in welche sie successive kommen, die nämliche ist, ihre mittlere Abstossungskraft für die Zwischenzeit derjenigen mittleren Abstossungskraft gleich ist, welche ihnen zugekommen sein würde, wenn sie mit der anfänglichen relativen Geschwindigkeit von der ersteren Entfernung zur letzteren übergegangen wären.

Von diesem Satze lässt sich nun eine Anwendung zur Prüfung obiger Voraussetzung machen. Denn wenn ein Elektricitätstheilchen in einem galvanischen Strome von einem ponderabelen Molecule zum anderen übergeht, so wird es vor und hinter dem Molecüle in Lagen kommen, wo seine Geschwindigkeit gegen ein anderes einem anderen Strome angehörige Elektricitätstheilchen dieselbe ist. Die mittlere Abstossungskraft beider Theilchen für die Dauer des Uebergangs des ersten Theilchens aus der einen Lage in die andere, ist dann also die nämliche, wie wenn beide Theilchen mit ihrer anfänglichen relativen Geschwindigkeit den Zwischenraum gleichförmig durchlaufen hätten, d. h. wie wenn kein Wechsel in der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem Molecüle des ponderabelen Leiters zum andern statt fände.

Ausser dem Geschwindigkeitswechsel der Elektricitätstheilchen beim Uebergange von einem Molecüle des ponderabelen Leiters zum andern, kommt auch noch der Richtungswechsel ihrer Bewegung in Betracht, wodurch die sich begegnenden Theilchen einander ausweichen. Man sieht aber leicht, dass hierdurch bei messbaren Entfernungen der betrachteten Stromelemente keine in Betracht kommenden Variationen der Entfernungen hervorgebracht werden, dass folglich nur die durch diese Richtungsänderungen bedingten periodischen Variationen der relativen Geschwindigkeit übrig bleiben, die schon im Vorhergehenden mit eingeschlossen sind.

Es leuchtet hieraus ein, dass statt eines Stroms, in welchem die Geschwindigkeit und Richtung der strömenden Elektricität einem periodischen Wechsel unterworfen sind, mit Recht ein *gleichförmiger* Strom gesetzt werden könne, wie es Art. 19. geschehen ist.

Auch ist es gestattet, statt eines geraden Stromelements ein gekrümmtes zu setzen, wenn nur Anfangs- und Endpunkt unverändert bleiben, und dazwischen keine wahrnehmbare Entfernung von der geradlinigen Verbindungslinie statt findet. Endlich können auch, wie Art. 29. geschehen ist, für ein Element 3 Elemente gesetzt werden, welche sich zu jenem verhalten, wie die Kanten eines Parallelopipedums zur Diagonale.

32.

Das gefundene elektrische Grundgesetz lässt sich auf verschiedene Weise aussprechen, was an einigen Beispielen erläutert werden soll.

1) Weil die Entfernung r eine stets positive Grösse ist, so kann man dafür $\varrho\varrho$ schreiben. Es ergiebt sich dann

$$dr = 2\varrho d\varrho, \quad ddr = 2\varrho dd\varrho + 2d\varrho^2,$$

folglich ist:

$$r = \varrho\varrho, \quad \frac{dr^2}{dt^2} = 4\varrho\varrho\frac{d\rho^2}{dt^2}, \quad \frac{ddr}{dt^2} = 2\varrho\frac{dd\rho}{dt^2} + 2\frac{d\rho^2}{dt^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{\rho^4}\left(1 + \frac{aa}{4}{}^3\varrho\frac{dd\rho}{dt^2}\right).$$

2) Man verstehe unter *reducirter relativer Geschwindigkeit* der Massen e und e' diejenige relative Geschwindigkeit, welche diese Massen, denen am Ende der Zeit t die Entfernung r, die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, und die relative Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ zukommt, *wenn die letztgenannte constant wäre*, in dem Augenblicke $(t - \theta)$ besitzen würden, in welchem beide, dieser Voraussetzung gemäss, in einem Punkte zusammen träfen. Bezeichnet nun v diese *reducirte relative Geschwindigkeit*, so ist nach den bekannten Gesetzen der *gleichförmig beschleunigten* Bewegung:

$$\frac{dr}{dt} - v = \frac{ddr}{dt^2}.\theta$$

$$r = v\theta + \frac{1}{2}\frac{ddr}{dt^2}.\theta\theta.$$

Durch Elimination von θ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}vv = \tfrac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} - r\frac{ddr}{dt^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}vv\right),$$

welche sich auf folgende Weise in Worten aussprechen lässt: *Die von der Bewegung herrührende Verminderung der Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken würden, wenn sie nicht bewegt wären, ist dem Quadrate ihrer reducirten relativen Geschwindigkeit proportional.*

3) Wenn $\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)$ die *absolute Kraft* ist, mit welcher die Masse e auf die Masse e', und umgekehrt e' auf e wirkt und abstösst, so folgt hieraus die *beschleunigende Kraft* für die Masse e

$$=\frac{e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

für die Masse e'

$$=\frac{e}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Es resultirt hieraus folgende *relative Beschleunigung* beider Massen:

$$\frac{e+e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Fügt man hierzu noch diejenige *relative Beschleunigung*, welche für dieselben Massen theils aus der Fortdauer ihrer Bewegung in ihren bisherigen Bahnen, theils aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt, welche zusammen mit f bezeichnet werde, so erhält man für die *ganze relative Beschleunigung*, d. i. für $\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}$, folgende Gleichung:

$$\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{e+e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)+f.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann der Differentialcoefficient $\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}$ bestimmt und sein Werth in die Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)$ gesetzt werden, welche dann in folgenden, die Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken, unabhängig von ihrer *relativen Beschleunigung* darstellenden, Ausdruck übergeht:

$$\frac{ee'}{rr-\frac{aa}{8}(e+e')r}\cdot\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}rf\right).$$

Hiernach hängt also diese Kraft von der Grösse der Massen, von ihrer Entfernung, von ihrer relativen Geschwindigkeit, und ausserdem endlich von derjenigen relativen Beschleunigung f ab, welche ihnen zukommt theils in Folge der Fortdauer der in ihnen schon vorhandenen Bewegung, theils in Folge der von *anderen Körpern* auf sie wirkenden Kräfte.

Es scheint hieraus zu folgen, dass die *unmittelbare Wechselwirkung zweier elektrischen Massen* nicht ausschliesslich von diesen Massen selbst und ihren Verhältnissen zu einander, sondern auch von der Gegenwart *dritter* Körper abhängig sei. Nun ist bekannt, dass Berzelius eine solche *Abhängigkeit der unmittelbaren Wechselwirkung zweier Körper von der Gegenwart eines dritten* schon vermuthet hat, und die daraus resultirenden Kräfte mit dem Namen der *katalytischen* bezeichnet hat. Bedienen wir uns dieses Namens, so kann hiernach gesagt werden, dass auch die *elektrischen Erscheinungen* zum Theil von *katalytischen* Kräften herrühren.

Diese Nachweisung *katalytischer* Kräfte für die *Elektricität* ist jedoch keine *strenge* Folgerung aus dem gefundenen elektrischen Grundgesetze. Sie würde es nur dann sein, wenn man mit diesem Grundgesetze nothwendig die *Idee* verbinden müsste, dass dadurch nur solche Kräfte bestimmt wären, welche elektrische Massen aus der Ferne *unmittelbar* auf einander ausübten. Es lässt sich aber auch *denken*, dass die unter dem gefundenen Grundgesetze begriffenen Kräfte zum Theil auch solche Kräfte sind, welche zwei elektrische Massen auf einander *mittelbar* ausüben, und welche daher *zunächst* von dem *vermittelnden Medium*, und *ferner* von allen *Körpern welche auf dieses Medium wirken* abhängen müssen. Es kann leicht geschehen, dass solche *mittelbar* ausgeübten Kräfte, wenn sich das vermittelnde Medium unserer Betrachtung entzieht, als *katalytische Kräfte erscheinen*, wiewohl sie es nicht sind. Man müsste wenigstens, um in solchen Fällen von *katalytischen* Kräften zu sprechen, den Begriff von *katalytischer* Kraft wesentlich modificiren. Man müsste nämlich unter *katalytischer* Kraft eine solche *mittelbar* ausgeübte Kraft verstehen, welche sich nach einer *allgemeinen Regel* bestimmen lässt, durch eine gewisse Kenntniss von den Körpern, deren Einflusse das *vermittelnde* Medium unterworfen ist, jedoch ohne Kenntniss dieses *Mediums selbst*. Das gefundene elektrische Grundgesetz giebt eine allgemeine Regel zur Bestimmung *katalytischer* Kräfte in diesem Sinne.

Eine andere noch nicht entschiedene Frage ist es aber, ob nicht die Kenntniss des *vermittelnden* Mediums zur Bestimmung der Kräfte, wenn auch nicht nothwendig, doch *nützlich* sein würde. Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Kräfte liesse sich nämlich vielleicht noch *einfacher* aussprechen, wenn das vermittelnde Medium in Betracht gezogen würde, als es ohnedem in dem *hier aufgestellten elektrischen Grundgesetze* möglich war. Die *Erforschung des vermittelnden Mediums*, die vielleicht noch über viele andere Dinge Aufschluss geben würde, ist selbst nun aber zur Entscheidung dieser Frage nöthig.

Die *Idee von der Existenz* eines solchen vermittelnden Mediums findet sich schon in der *Idee des überall verbreiteten elektrischen neutralen Fluidums* vor, und wenn sich auch dieses *neutrale Fluidum*, ausser den Conductoren, den bisherigen Beobachtungen der Physiker fast gänzlich entzogen hat; so ist jetzt doch Hoffnung, dass es gelingen werde, über dieses allgemein verbreitete Fluidum auf mehreren neuen Wegen näheren Aufschluss zu gewinnen. Vielleicht kommen in anderen Körpern, ausser den Conductoren, keine Strömungen, sondern nur *Schwingungen* vor, die man erst künftig mit den Art. 16. erörterten Mitteln genauer wird beobachten können. Ferner brauche ich nur an Faraday's neueste Entdeckung des Einflusses *elektrischer Strömungen auf Lichtschwingungen* zu erinnern, welche es nicht unwahrscheinlich macht, dass das überall verbreitete elektrische neutrale Medium selbst derjenige überall verbreitete Aether sei, welcher die Lichtschwingungen mache und fortpflanze, oder dass wenigstens beide so innig mit einander verbunden seien, dass die Beobachtungen der Lichtschwingungen Aufschluss über das Verhalten des elektrischen neutralen Mediums zu geben vermöchten.

Auf die Möglichkeit einer *mittelbaren* Wirkung der elektrischen Massen auf einander hat, wie in der Einleitung S. 214 angeführt worden ist, schon

Ampère aufmerksam gemacht, «wonach nämlich die *elektrodynamischen Erscheinungen* den von den elektrischen Strömen *dem Aether mitgetheilten Bewegungen*» zuzuschreiben wären. Ampère erklärt aber selbst die Prüfung dieser Möglichkeit für eine ausserordentlich schwierige Untersuchung, der er sich zu unterziehen keine Zeit gehabt habe.

Sollten auch neue Aufschlüsse der Erfahrung, wie sie z. B. aus weiterem Verfolg der nach Art. 16. über *elektrische Schwingungen* auszuführenden Versuche, und aus der Faraday'schen Entdeckung vielleicht hervorgehen werden, vorzüglich geeignet erscheinen, um die von Ampère nicht überwundenen Schwierigkeiten allmählig zu beseitigen, so dürfte doch dabei auch das elektrische Grundgesetz in der hier gegebenen, von dem vermittelnden Medium unabhängigen, Form einen nicht unwichtigen Anhaltspunkt gewähren, um dieses Gesetz auch in anderer, von dem vermittelnden Medium abhängigen, Form auszudrücken.

ZUSÄTZE

ZUR

LEHRE VOM BAUE UND DEN VERRICHTUNGEN

DER

GESCHLECHTSORGANE,

VON

E. H. WEBER.



I.

DAS RUDIMENT DES UTERUS BEIM MÄNNLICHEN GESCHLECHTE DER SÄUGETHIERE UND DES MENSCHEN.

Dass der Mann Brustdrüsen und Brustwarzen besitzt, Theile die bei ihm keinen Nutzen zu haben scheinen, und dass diese Theile nicht nur im Kindesalter denselben Organen bei dem weiblichen Geschlechte in ihrer äusseren Form in ihrer Lage und Zahl gleich sind, sondern auch bisweilen bei Erwachsenen so gebildet sind, dass sie wirklich Milch absondern und ausscheiden, ist eine Thatsache, welche anatomisch und physiologisch noch viel sorgfältiger erörtert werden sollte, als es bis jetzt geschehen ist. Ich hoffe darauf ein andermal zurückzukommen. Jetzt theile ich eine Reihe von Beobachtungen mit, aus welchen folgt, *dass der Mann und viele von mir untersuchte männliche Säugethiere auch ein Rudiment des Uterus besitzen.*

Ich habe die Auffindung desselben schon im Jahre 1836 in einem Programme angekündigt*) und werde jetzt die Beweise mittheilen, auf welche sich die Annahme stützt, dass der von mir beschriebene Theil wirklich das Rudiment des Uterus sei. Man hat diese Behauptung nicht für eine gewagte Deutung und Vergleichung zu halten, sondern für einen Satz, der sich durch die vergleichende Anatomie, durch die Geschichte der Bildung des Körpers der Säugethiere und durch die Lehre von den Missbildungen erweisen lässt.

Ueber den Uterus des männlichen Bibers.

Bei dem weiblichen Biber bildet die Bauchhaut zwischen der Harnblase und dem Mastdarme eine Falte, in welcher in der Mitte der Uterus liegt, der sich in zwei Hörner, *cornua,* theilt, welche oben zugespitzt endigen. In der nämlichen Falte (Siehe Taf. VI. *uu*) an derselben Stelle zwischen dem Mastdarme und der Harnblase liegt nun auch bei dem männlichen Biber ein dem Uterus ähnliches, in zwei Hörner getheiltes, unpaares, hohles Organ. Zu beiden Seiten desselben in der nämlichen Falte gehen die beiden *Vasa deferentia* herab, die vor ihrer Einmündung in die Harnröhre eine grosse drüsenartige

*) De vesica prostatica rudimento uteri Programma Dissert. Davidis Eduardi Kretzschmar Lineamenta physiologica morborum. Lipsiae d. 22. Martii 1836. 8. adjunctum.

Anschwellung *D D* bilden. Ich habe diesen *Uterus masculinus* der physiologischen und pathologischen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher, welche im Jahre 1841 in Braunschweig stattfand, vorgezeigt, und die anwesenden Naturforscher und unter ihnen Professor Lichtenstein aus Berlin, überzeugten sich davon, dass dieses Organ seiner Lage und Gestalt nach dem Uterus entspreche [1]).

Es fehlt bei dem Biber keiner der andern Theile des männlichen Geschlechtsapparates, welcher in dieser Gegend liegen könnte. Neben den *Vasis deferentibus* befinden sich nämlich die Saamenblasen, *Vesiculae seminales, s* welche bei dem erwähnten Biber sehr gross und mit einer weisslichen, dicken, durch Spiritus gerinnenden Flüssigkeit erfüllt waren. An der Stelle, wo die Prostata zu liegen pflegt, sieht man eine Zahl sehr länglicher Blasen mit dünnen Wänden, von denen bisweilen mehrere durch einen gemeinschaftlichen langen engen Ausführungsgang *p* untereinander verbunden sind. In der Nähe des Ortes, wo sich die *Corpora cavernosa* vereinigen, sieht man die *Glandulas Cowperi C.* die hier sehr gross sind.

Der *Uterus masculinus* öffnet sich mit einer einzigen Mündung in die Urethra auf einem kleinen Vorsprunge (*Caput gallinaginis*), und neben dieser Mündung sah ich auf der einen Seite eine Oeffnung, die die gemeinschaftliche Mündung des *Vas deferens* und der Saamenblase dieser Seite war. Ueber die Oeffnung des *Vas deferens* und der Saamenblase der andern Seite bin ich nicht zur Gewissheit gekommen. Die länglichen Blasen, die ich zusammengenommen für eine unvollkommen entwickelte Prostata halte, öffnen sich mit vielen Gängen in die Harnröhre, in derselben Gegend wo der *Uterus masculinus* sich in dieselbe einmündet.

Ueber den Uterus des männlichen ausgewachsenen Kaninchens.

Das erwachsene weibliche Kaninchen zeichnet sich dadurch aus, dass der Uterus keinen einfachen Körper hat, sondern nur aus zwei Hörnern besteht, die sich einzeln in den Grund der Scheide öffnen, so dass also ein doppelter Muttermund existirt. Die Scheide ragt bei ihm zwischen Mastdarm und Harnblase höher hinauf als bei manchen andern Säugethieren, und ein Theil derselben liegt in der nämlichen Falte der Bauchhaut, wo beim Biber und bei andern Säugethieren der Körper des Uterus gefunden wird. Derselbe Theil, der bei andern Säugethieren den Körper des Uterus darstellt, bildet hier den obersten Theil der Scheide. Dieser oberste Theil der Scheide ist daher mit Muskelfasern versehen und wie sonst der Körper des Uterus fähig durch Reizung in Zusammenziehung zu gerathen. Es reicht dazu schon eine mechanische Reizung hin, z. B. wenn man den Theil mit der Messerspitze kratzt, noch sicherer und stärker wirkt nach meines Bruders Versuchen die Reizung dieses Theils durch den magneto-galvanischen Rotationsapparat.

---

1) Amtlicher Bericht über die neunzehnte Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Braunschweig im September 1841. Braunschweig 1842. 4. p. 65.

Beim männlichen Kaninchen liegt nun an derselben Stelle das Rudiment des männlichen Uterus und der Scheide. Es besteht in einem zwischen Mastdarm und Harnblase liegenden unpaaren, mit Fleischfasern versehenen Organe, welches wie der Grund der Scheide des Kaninchens, eine von vorn nach hinten plattgedrückte Blase bildet.

Der oberste Theil des männlichen Uterus hat zwei stumpfe kurze Spitzen. Taf. V. Fig. 1 *u.* Die Wände desselben besitzen, wie gesagt, deutliche Muskelfasern, die an manchen Stellen ein Netz bilden. Bei so eben getödteten Kaninchen zieht sich der *Uterus masculinus,* wenn er mechanisch gereizt wird, zusammen und geräth in einem *Motus peristalticus,* und dasselbe sieht man, wenn man ihn mittelst des magneto-galvanischen Rotationsapparats reizt. Jedes *Vas deferens d. d.* bildet in der Nähe seines Endes eine längliche Anschwellung *D* und mündet in dem untersten Theil des *Uterus masculinus* an seiner vorderen Wand. Diese Mündungen beider *Vasa deferentia* lagen bei den auf der angeführten Figur abgebildeten Geschlechtstheilen, die von einem sehr grossen in der Brunst stehenden Kaninchen herrührten, 3 Linien über dem *Ostium uterinum* an der vorderen Wand desselben, dicht neben einander, jede auf einer kleinen Papille. Ob das Kaninchen Saamenblasen besitze oder nicht, ist zweifelhaft. Der *Uterus masculinus* ist nämlich an seinem unteren Theile hinten von einer Drüsenmasse der Prostata *p* bedeckt, welche, wenn ihre Ausführungsgänge mit Luft erfüllt werden, die Form einer guten Kastanie hat. Man sieht dann an ihr eine Menge aufgeblasener, mit unbewaffnetem Auge wahrnehmbarer geschlängelter und in Aeste getheilter Gänge. Ausser dieser Drüsenmasse liegen an der hinteren Wand des *Uterus masculinus* 2 grössere Organe die den Saamenblasen sehr ähnlich sind, und die ich daher mit *s* bezeichnet habe, die vielleicht aber auch noch als Theile der Prostata betrachtet werden können. Auf Taf. V. Fig. 1. sieht man bei *s* dieses Organ an der rechten Seite, während das der linken nicht sichtbar ist. Es besteht aus einem ziemlich weiten, dünnhäutigen Gange, der sich in eine Anzahl geschlängelte und hin und hergebogene Aeste theilt, welche mit geschlossenen Enden aufhören. Die Gänge der Prostata und diese 2 Gänge, die ich mit den Saamenblasen vergleiche, liessen sich durch Luft, die man gegen die Stelle der aufgeschnittenen Harnröhre blies, wo sie sich öffneten, so anfüllen, dass dieselbe bis in die Enden der Gänge drang. Der Gang, den ich mit der Saamenblase vergleiche, hatte im aufgeblasenen Zustande einen Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ bis $1\frac{3}{4}$ P. Lin. Ausser diesem den Saamenblasen ähnlichen Organen lag an der Seite des *Uterus masculinus* noch ein Gang, der sich in 2 geschlossene Enden theilte, von welchem ich aber nicht glaube, dass er constant ist. An der Harnröhre lagen tiefer unten zwei Cowper'sche Drüsen von länglicher Gestalt *C,* deren Ausführungsgänge sich in die Harnröhre *Ur* mündeten.

Ueber den Uterus des männlichen neugeborenen Kaninchen.

Bei dem neugeborenen Kaninchen gehört Kenntniss und Uebung dazu, um weibliche und männliche Individuen von einander unterscheiden zu können, auch dann, wenn man sie öffnet und die innern Geschlechtstheile bloslegt.

Taf. V. Fig. 2. und 3. stellen die männlichen und weiblichen Geschlechtstheile neugeborener Kaninchen in doppelter Grösse dar. Man sieht hier, dass der Uterus und die Scheide bei dem männlichen Individuo Fig. 2, *u* dieselbe Lage und Gestalt haben, als bei den weiblichen. Fig. 3, *u*. Die Scheide mündet bei beiden Geschlechtern mit der Harnröhre *Ur* an derselben Stelle zusammen und bildet dadurch einen Gang, der zugleich Urethra und Scheide, und mit Joh. Müller *Sinus uro-genitalis* zu nennen ist. Derselbe hat seine äussere Oeffnung an dem unteren Theile eines kurzen dicken Gliedes *p* und *c* (Penis und Clitoris). Das Ende der *Vasa deferentia d* des männlichen Thieres entsprechen den Hörnern des Uterus in ihrer Lage, in ihrer Gestalt und in ihrem Durchmesser, und unterscheiden sich von ihnen nur dadurch, dass sie sich nicht wie die Hörner des weiblichen Uterus am obersten Theile der Scheide, sondern tiefer unten, nahe an dem Orte, wo sich das Rudiment des Uterus und der Scheide mit der Harnröhre vereinigen, in das erstere öffnen, und dass da, wo bei dem weiblichen Thiere die Hörner in den Grund der Scheide eintreten, bei dem männlichen Thiere zwei kleine Zipfel bemerklich sind, welche wohl Andeutungen der Einmündungsstellen der Hörner des Uterus sind. Die *Vasa deferentia dd* Fig. 2. Taf. V. entsprechen offenbar den Trompeten und Hörnern des weiblichen Uterus *uu* Fig. 3. Bei dem weiblichen neugeborenen Kaninchen bilden jedes Horn des Uterus und jede Tuba einen einzigen gleichmässigen Canal, so dass man keine Grenze zwischen ihnen zu bestimmen im Stande sein würde, könnte man sie nicht ungefähr durch den Ort bestimmen, an welchem sich das *Ligamentum uteri rotundum l* ansetzt. Das *Vas deferens* unterscheidet man aber da, wo es das Ende des Nebenhoden *Epididymis* (*ep*) bildet, leicht von der Tuba an den vielen Windungen, die es daselbst macht, während die Tuba weniger gekrümmt ist.

Ungefähr an dem nämlichen Orte, wo bei dem neugeborenen weiblichen Kaninchen von dem Horne des Uterus das *Ligamentum uteri rotundum* als ein dünner Faden zum Inguinalcanale geht, geht bei dem männlichen Kaninchen das viel dickere *Gubernaculum Hunteri gu* zu demselben Canale. Die Hoden *TT* und Ovarien *oo* liegen bei den neugeborenen Kaninchen unter den Nieren, sind durch ihre Grösse und Gestalt wenig von einander verschieden und haben eine solche Stellung, dass ihr Längendurchmesser dem Längendurchmesser des Leibes parallel ist.

Da nun dasselbe Organ, das wir bei dem neugeborenen weiblichen Kaninchen Taf. V. Fig 3. mit *u* bezeichnet sehen, sich bei dem älteren Kaninchen in die Scheide verwandelt, die hier die Stelle des Körpers des Uterus mit vertritt, da ferner diesem Organe der mit *u* bezeichnete Theil bei dem neugeborenen männlichen Kaninchen Taf. V. Fig. 2. genau entspricht, und da endlich bei dem ausgebildeten männlichen Kaninchen der Fig. 1. mit *u* bezeichnete Theil offenbar wieder derselbe ist, so kann kein Zweifel darüber obwalten, dass der Theil *u* Fig. 1. und 2. die Scheide und den Körper des Uterus darstellt. In der That ist auch seine Verrichtung bei dem männlichen Kaninchen eine ähnliche als die des Uterus bei dem weiblichen. Denn, so wie der weibliche Uterus bestimmt ist, den in den Ovarien gebildeten weiblichen Zeugungsstoff, der ihn durch die Tubas zugeführt wird, aufzunehmen und bei der Ge-

burt die Frucht auszutreiben, so ist der männliche Uterus des Kaninchens dazu bestimmt, den im Hoden bereiteten männlichen Zeugungsstoff aufzunehmen, den er durch die *Vasa deferentia* zugeführt erhält, und ihn bei der Begattung durch seine Zusammenziehung auszutreiben. Man findet daher in ihm männlichen Saamen, und wenn man in die *Vasa deferentia* bläst, so dringt die Luft zunächst in den *Uterus masculinus* und von da in die Harnröhre. Dennoch kann man aber nicht behaupten, der Theil *u* Fig. 2. sei also eine Saamenblase. Die Saamenblasen sind doppelt vorhanden, nicht einfach, und haben, weil sie Secretionsorgane sind, einen anderen Bau. Sie sind mit Zellen besetzt oder in Aeste getheilt. Der männliche Uterus des Kaninchens dagegen hat nicht die Einrichtung eines Secretionsorgans. Er ist ein hohles muskulöses, nicht mit Drüsenzellen besetztes Organ. Auch werden wir sehen, dass bei einigen anderen Thieren ein männlicher Uterus vorhanden ist, und ausser ihm die Saamenblasen existiren, was auch vielleicht bei den Kaninchen der Fall ist, wenn man nämlich den Theil *s* Fig. 1. Taf. V. für eine Saamenblase halten darf. Uebrigens werden wir uns durch die nun folgenden Beobachtungen überzeugen, dass der männliche Uterus bei vielen Thieren in keiner solchen Verbindung mit den *Vasis deferentibus* steht, dass der männliche Saamen in ihn ergossen wird.

Ueber den Uterus des männlichen Pferdes.

Auch bei dem ausgewachsenen männlichen Pferde giebt es einen Uterus, eine unpaare Blase, an deren Seite die *Vasa deferentia* hinlaufen. Letztere münden sich jedoch nicht, wie bei dem Kaninchen, in dem Uterus, auch nicht, wie beim Biber, neben ihm und also unmittelbar in der Harnröhre, sondern jedes *Vas deferens* geht in das kurze, verengte, dennoch aber ziemlich weite Ende der Saamenblase in der Nähe der weiten Oeffnung, durch welche die Saamenblase ihren Saft in die Harnröhre ergiesst. Die Gestalt dieses *Uterus masculinus* ist bei verschiedenen Individuen nicht immer die nämliche. Bei dem Pferde, von welchem die Abbildung *uu* Fig. 1. Tab. IV. entnommen ist, war nur 3 Par. Zoll lang. Hier mündete sich der Uterus an der hinteren Wand der Harnröhre und bildete dadurch das *Caput Gallinaginis.* Auf der Figur ist ein Stück dieser Wand abgebildet und man sieht bei *u* den Körper des Uterus, bei *u'* den Muttermund. Zu beiden Seiten liegen die Mündungen der beiden Saamenblasen, in die sich, wie man bei *d* sieht, das *Vas deferens* öffnet. Bei einem andern Pferde, Taf. III. Fig. 1. *uuu,* fand ich den *Uterus masculinus* an der nämlichen Stelle, aber ganz verschlossen, so dass die Luft, die ich in ihn einblies gar nicht in die Urethra dringen konnte. Er war in seinem untersten Theile *u* sehr erweitert und verlängerte sich aufwärts in einen langen Canal, der sich endlich in 2 Hörner theilte, von denen das linke kürzer als das rechte war. Im Ganzen war er reichlich 9 Par. Zoll lang. Um daher die wesentlichen Theile desselben in natürlicher Grösse abbilden zu können, ohne die Tafel zu gross nehmen zu müssen, ist zwischen dem oberen und mittleren Theile desselben ein ungefähr 2 Zoll langes dünnes Stück weggelassen worden. Auch hier liegt der *Uterus masculinus* zwischen den *Vasis deferentibus d D D,* die sich an seiner Seite in die Saamenblasen münden, wie man auf der linken Seite deutlich

sieht, wo die Saamenblase *s* nicht weggenommen worden ist, wie auf der rechten Seite, sondern so gezeichnet worden ist, wie sie sich ausnimmt, wenn sie aufgeblasen wird. Das kurze noch immer ziemlich weite Ende der Saamenblase vertritt demnach bei dem Pferde die Stelle eines *Ductus ejaculatorius*.

Die Anschwellung *DD*, welche jedes *Vas deferens* in der Nähe seiner Einmündung bildet, ist hier ungefähr in ihrer Mitte quer abgeschnitten, und nur die untere Hälfte davon gezeichnet.

Bei einem dritten Pferde war der *Uterus masculinus* dem Taf. III. Fig. 1. *uu* abgebildeten ähnlich, mit dem Unterschiede, dass er sich in die Urethra öffnete, nicht ganz so lang, unten minder angeschwollen war, und oben nur ein Horn und die Spur eines zweiten verkümmerten Horns hatte.

Ueber den Uterus des männlichen Schweins.

Ich habe nur Gelegenheit gehabt, ein kastrirtes Schwein zu untersuchen. Auch bei ihm befand sich zwischen dem unteren Theile der Harnblase und dem Mastdarme eine Falte der Bauchhaut, in welcher in der Mittellinie der *Uterus masculinus* Tab. IV. Fig. 5. *uuu* lag, der also dieselbe Lage hatte, welche bei dem weiblichen Geschlechte der Uterus besitzt und, wie er, in 2 Hörner getheilt war. Der Körper desselben war 9 Par. Linien lang und fast 1 Linie dick, jedes Horn war 14 Linien lang, so dass also die Länge des ganzen Uterus fast 2 Zoll betrug. Dicht neben ihm lagen die *Vasa deferentia dd*, über deren Endigung ich ein andermal die nöthigen Untersuchungen anstellen werde, wenn ich ein nicht kastrirtes männliches Schwein zergliedern kann. Zu beiden Seiten der *Vasa deferentia*, nahe an ihrem Ende, war bei *p* eine Drüse (Prostata oder Saamenblase) sichtbar, von denen jede mit einem Ausführungsgange in die Harnröhre mündete. Besondere Saamenblasen und Cowper'sche Drüsen sahe ich nicht. Wohl aber war der sehr lange muskulöse Theil der Harnröhre mit zahlreichen einfachen Drüsen besetzt.

Ueber den Uterus des männlichen Hundes und des Katers.

Auch bei dem männlichen Hunde und beim Kater finde ich zwischen beiden *Vasis deferentibus*, nahe an ihrer Einmündung in die Harnröhre, einen *Uterus masculinus*, der hier in einer sehr kleinen länglichen Blase besteht. Es ist mir nicht gelungen darzuthun, dass sich die Blase in die Harnröhre öffnet, entweder weil die Oeffnung zu eng ist, oder weil sie, wie das bisweilen beim Pferde und Menschen der Fall ist, durch Verwachsung geschlossen ist. Taf. VII. Fig. 1. *u* stellt diese Blase dar, wie sie zwischen den *Vasis deferentibus DD* liegt. Auch hier nimmt sie den nämlichen Ort zwischen der Harnblase und dem Mastdarme in einer Falte der Bauchhaut ein, welchen der Uterus bei dem weiblichen Thiere hat.

Ueber den Uterus des Mannes

Schneidet man die Harnblase und die Harnröhre, wie auf Taf. I. Fig. 2. abgebildet ist, an ihrer der *Symphysis ossium pubis* zugekehrten Wand auf, so bemerkt man bekanntlich auf der gegenüberliegenden Wand des in der Prostata eingeschlossenen Stücks der Harnröhre das sogenannte *Caput Gallinaginis* oder den *Colliculus seminalis,* d. h. eine in der Mittellinie liegende längliche Erhabenheit, die am *Isthmus urethrae* schmal anfängt, allmählig breiter und höher wird und sich oben kolbig endigt. Von diesem kolbigen Ende gehen mehrere auseinanderweichende erhabene Linien zu dem *Corpus trigonum* der Harnblase. Den Haupttheil des Colliculus bildet eine unpaare, längliche Blase *u*, welche hier abgebildet ist, wie sie sich ausnimmt, während sie durch eingeblasene Luft ausgedehnt wird. Ihre Einmündung in die Harnröhre ist nach vorn, ihr geschlossenes Ende nach hinten und oben gekehrt. Zu beiden Seiten derselben bemerkt man etwas höher oben 2 engere Oeffnungen, die Einmündungsstellen *e e* des rechten und linken *Ductus ejaculatorius* in die Harnröhre. Drückt man die Prostata zusammen, so quillt noch weiter nach aussen neben jener Blase an verschiedenen ihrer Zahl und Lage nach nicht bestimmten Stellen der prostatische Saft hervor und die hier abgebildeten Tröpfchen desselben zeigen uns den Ort, wo sich die Gänge der Prostata in die Harnröhre öffnen. In der Regel findet man also an dem *Colliculus seminalis* eine mittlere unpaare und grössere Oeffnung, die dem *Uterus masculinus* angehört, und zwei seitliche engere, höher oben und nicht immer genau symmetrisch gelegene Oeffnungen, für die *Ductus ejaculatorios.* Ausnahmsweise kann die Oeffnung des *Uterus masculinus,* wie wir weiterhin sehen werden, verschlossen, oder sehr eng sein. Bei dieser Art der Darstellung sieht man aber nur einen Theil jener Blase. Um sie in ihrer ganzen Länge zu sehen, muss man sie aufblasen und ihre Mündung zubinden und dann die Prostata und Harnröhre so halbiren, dass man die unverletzte aufgeschwellte Blase auf der Durchschnittsfläche der Prostata liegen sieht. Das ist auf Taf. I. Fig. 1. dargestellt. Man nimmt hier wahr, dass der hinterste Theil der erwähnten Blase, die in diesem Falle sehr gross, in der Substanz der Prostata verborgen liegt. An ihrer Seite und auf ihrer Oberfläche läuft der gemeinschaftliche Ausführungsgang des *Vas deferens* und der Saamenblase, der *Ductus ejaculatorius e* hin, der sich nach vorn sehr verengt und sich mit einer engen Oeffnung in die Urethra einmündet. Diese prostatische Blase, *Vesicula prostatica,* ist nun der nämliche Theil, den ich bei dem Biber, Kaninchen, Pferde, Schweine, Hunde und der Katze beschrieben habe, und von dem ich beim Biber und Kaninchen bewiesen habe, dass er ein Rudiment des Uterus und der Scheide des männlichen Thiers ist.

Auch beim Menschen stimmt die Lage dieses Organs hiermit überein. Zunächst hinter und unter der *Symphysis ossium pubis* liegt die Harnröhre, hinter ihr dieser *Uterus masculinus* und hinter diesem der Mastdarm. Bei dem Biber und Kaninchen lässt sich dieser *Uterus masculinus* von dem vordern Ende der Harnröhre aus aufblasen oder auch mit Injectionsmasse erfüllen. Beim Menschen gelingt das nicht. Die Mündung wird hierbei zugedrückt und der Rand derselben wirkt also wie ein Ventil, und dasselbe gilt von den *Ductibus ejaculato-*

riis. Um den *Uterus masculinus* aufzublasen, muss man erst den prostatischen Theil der Harnröhre öffnen und dann in passender Richtung gegen die Oeffnung des *Uterus masculinus* blasen, oder man muss ein enges Röhrchen in die Oeffnung desselben einbringen und einbinden. Eine Ansicht von dem mit erstarrender Flüssigkeit erfüllten *Uterus masculinus* des Menschen gewährt. Taf. II. Fig. 1. Man sieht hier die untere Hälfte der Harnblase von hinten, bedeckt von den beiden Saamenblasen *s s* und den *Vasis deferentibus d d.* Der *Uterus masculinus u* liegt zwischen den beiden *Ductibus ejaculatoriis.* Die Prostata ist bis auf einige kleine Reste, in welche die Injectionsmasse von der Harnröhre aus eingedrungen ist, weggenommen. Die Harnröhre ist durch die eingespritzte Flüssigkeit sehr ausgedehnt.

Fragt man nach dem Nutzen des *Uterus masculinus,* so lässt sich eben so wenig etwas Bestimmtes darüber anführen, als vom Nutzen der Brustdrüsen und Brustwarzen beim Manne. Das ist gewiss, dass diese in der Prostata verborgene Blase nicht dazu dient, den prostatischen Saft aufzunehmen, und dass sie sich also nicht zur Prostata verhält, wie die Gallenblase zur Leber, denn niemals habe ich prostatische Gänge in die Blase einmünden gesehen. Vielmehr ist es hinreichend bekannt, dass diese Gänge in nicht geringer Zahl sich in den von der Prostata umschlossenen Theil der Harnröhre unmittelbar öffnen.

Der Uterus weiblicher und männlicher Embryonen beim Schweine und Schaafe.

Schon Rathke[1]) hat, als er die allmählige Entwickelung der Geschlechtstheile bei Embryonen vom Schweine und Schaafe untersuchte, gefunden, dass zu einer gewissen Zeit die männlichen Thiere mit einem Organe versehen sind, das dem Körper des Uterus und dem Grunde der Scheide entspricht und denselben Theilen bei weiblichen Embryonen von gleichem Alter so ähnlich ist, dass man anfangs gar nicht oder nur durch eine sehr sorgfältige Untersuchung unterscheiden kann, ob man einen *Uterus masculinus* oder *foemininus* vor sich hat. Ich verweise hier zur Erläuterung auf Taf. V. Fig. 6. und 7., dann auf Fig. 4. und 5., die ich aus seinem Werke habe copiren lassen.

Taf. V. Fig. 6. stellt die Harnblase und die Geschlechtstheile eines weiblichen, Fig. 7. die eines männlichen Schaafembryos von demselben Alter in zweimaliger Vergrösserung vor. Bei beiden ist *v* die Harnblase, *ur* der Ureter, *u* der *Uterus foemininus* und *masculinus, ug* der *Sinus uro-genitalis* d. h. ein Canal in welchem die Scheide und die Urethra vereinigt sind. Der Penis *p* in Fig. 7. entspricht offenbar der Clitoris *c* in Fig. 6., und die *Vasa deferentia d d* Fig. 7. entsprechen den Hörnern des Uterus *u' u'* in Fig. 6.

Bei Schweinsembryonen, welche Rathke untersuchte, fand er dieselbe Uebereinstimmung und Aehnlichkeit zwischen den männlichen und weiblichen Geschlechtstheilen, nur war hier der Penis *p* Fig. 4. beträchtlich grösser als die Clitoris *c* Fig. 5. und der weibliche Uterus *u* Fig. 5. grösser als der männliche

1) H. Rathke, Abhandlungen zur Bildungs- und Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Thiere. Thl. I. Leipzig. 1832.

u Fig. 4. Alle übrige Buchstaben bezeichnen gleichfalls dieselben Theile wie in Fig. 6. und 7. Die Geschlechtstheile der Schweineembryonen sind 2½ Mal im Durchmesser vergrössert. Rathke's Beobachtungen bei sehr jungen Embryonen von Schaafen und Schweinen stimmen daher mit den von mir bei neugebornen Kaninchen gemachten vollkommen überein, nur sind bei den Kaninchen noch geringere Verschiedenheiten zwischen dem männlichen und weiblichen Gliede (Penis und Clitoris) zu finden als hier. Rathke würde daher die Existenz eines *Uterus masculinus* auch bei ausgebildeten Thieren gesucht und gefunden haben, hätte er nicht zu beobachten geglaubt, dass derselbe bei weiter vorrückender Entwickelung verschwände.

Der Uterus, welcher bei männlichen Zwittern bisweilen vorkommt, entspricht in seiner Lage der Vesicula prostatica.

Nicht nur durch die vergleichende Anatomie und durch die Bildungsgeschichte der Geschlechtstheile, sondern auch durch die pathologische Anatomie wird meine Behauptung, dass die *Vesicula prostatica* des Mannes das Rudiment des Uterus sei, bestätigt. Bei männlichen Zwittern, bei welchen ein Uterus vorkommt, ist derselbe offenbar die vergrösserte *Vesicula prostatica*, und der Canal, den man Scheide nennt, ist ein *Sinus uro-genitalis*. Um dieses durch eine Figur deutlich zu machen, benutze ich einige von Ackermann[1]) gegebene Abbildungen. Sie beziehen sich auf die Geschlechtstheile eines 1803 in Mainz gebornen, etwas über 1 Monat alten Knaben. Taf. V. Fig. 8. stellt die äusseren, Fig. 9. die inneren Geschlechtstheile desselben dar. Auf Fig. 9. ist die Harnblase mitten durchschnitten und in 2 Hälften *vv* getheilt, die seitwärts gelegt sind, dadurch wird der hinter dem unteren Ende der Harnblase liegende, gleichfalls aufgeschnittene *Uterus masculinus u* sichtbar. *ur ur* sind die beiden Hälften der gleichfalls in ihrer Mitte durchschnittenen Urethra, in der Gegend, wo sie in den *Sinus urogenitalis ug* übergeht. Neben dem Muttermunde bei *ee* öffnen sich die *Ductus ejaculatorii* oder *Vasa deferentia*, die man bei *ddd* bis zum Hoden verfolgen kann. Um nun diese Theile noch mehr im Einzelnen durchzugehen, ist zu bemerken, dass Taf. V. Fig. 8. *P* das 3 Centimeter lange und 1 Centimeter dicke Glied ist, von welchem die Eichel den dritten Theil bildete. Es trug dasselbe keine geschlossene Harnröhre, sondern das Praeputium ging an der unteren Seite der Eichel in die beiden Lippen über, welche die Schaamspalte begränzten, und neben diesen mit den Nymphen zu vergleichenden Lippen der Schaamspalte lagen nach aussen die beiden Hälften des Hodensacks, in welchen die beiden normal gebildeten Hoden eingeschlossen waren, an demselben Orte, den die grossen Schaamlippen bei dem weiblichen Geschlechte einnehmen. Der Urin floss aus der ganzen Schaamspalte ab, denn die Mündung der Harnröhre war von aussen nicht sichtbar, weil die Schaamspalte zunächst in einen *Sinus urogenitalis ug* Fig. 9. führte, den Ackermann mit dem Worte *Vagina urethralis* bezeichnete, und der in einem erweiterten

---

1) Infantis androgyni historia et ichnographia auctore Jacobo Fidele Ackermann Jenae 1805. Fol. Taf. I. und V.

Canale bestand, in welchen sich höher oben die Harnröhre *ur* und der Uterus *u* einmündeten. Der Uterus hatte im Kleinen die Form die der schwangere Uterus anzunehmen pflegt, und war, den Abbildungen und der von Ackermann gegebenen Beschreibung nach zu urtheilen, nichts anders als die vergrösserte *Vesicula prostatica*, die ich für das Rudiment des Uterus im männlichen Körper erklärt habe[1]). Denn der Uterus mündete hinter der *Symphysis ossium pubis* in den von der Prostata Fig. 9. *PP* umgebenen Theil des Canals mit der Harnröhre zusammen, und durch diese Einmündung entstand ebendaselbst der Anfang des erwähnten *Sinus uro-genitalis*. Der vorspringende Muttermund und der untere Theil des Uterus bildeten offenbar denselben Theil in grösserem Maassstabe, den man bei dem männlichen Geschlechte das *Caput Gallinaginis* nennt. Die *Vasa deferentia*, oder wenn man lieber will, die *Ductus ejaculatorii*, mündeten sich nicht wie die *Tubae Fallopii* in den Uterus *f* ein, sondern liefen an und in der Wand desselben bis zum *Ostium uterinum externum* herab und öffneten sich am Muttermunde durch ein paar enge Oeffnungen *ee* Fig. 9. in den *Sinus urogenitalis*, d. h. sie verhielten sich ganz so, wie bei normal gebildeten männlichen Individuen, wo die *Ductus ejaculatorii* bekanntlich an der *Vesicula prostatica*, dem Rudimente des Uterus, herabgehen und sich am *Caput Gallinaginis* neben der Oeffnung der *Vesicula prostatica* und dem von der Prostata eingeschlossenen Canale endigen. Ob in diesem Falle wirkliche Saamenblasen vorhanden gewesen sind, ist noch zweifelhaft. Es fand sich zwar in der Nähe des *Uterus masculinus* auf jeder Seite eine rundliche mit dem *Vas deferens* in Verbindung stehende Masse, die Ackermann selbst für die Saamenblase hielt; indessen scheint dieselbe nicht aus einem Anhange am *Vas deferens*, sondern aus Windungen des *Vas deferens* selbst bestanden zu haben. Denn Ackermann sagt S. 42: «Si accuratiori hos glomeres indagini subjiciamus et cultello cellulosam, quae eos involvit, removeamus, in aperto est, eosdem nihil esse aliud, nisi ductum deferentem, variis circumvolutionibus juxta se positum et cellulosa unitum, cui nihilominus granula quaedam glandulosa in eodem celluloso contextu sita adhaerescere conspiciuntur; si enim parva haec corpuscula destructa cellulosa diducamus, in unum unicum ductum eosdem extendere licet. Cum ergo haec structura prorsus cum illa vesicularum seminalium conveniat, (??) quae praeter quaedam diverticula nihil aliud sunt, nisi ductus deferens in fasciculum congestus, hos glomeres, licet revera inter duplicatam peritonaei membranam recepti ovariorum occupant locum, vesiculas seminales appellare liceat, cum, quamvis a vesica urinaria remotae sint, tamen haec receptacula spermatis constituunt, continuato ductu in uterum desinentia.»

---

1) Ackermann selbst kannte zwar die *Vesicula prostatica* nicht, dennoch aber sagt er p. 43: «Haec partium genitalium structura androgyna hunc nobis proprium ostendit characterem: ejaculatoria seminis orificia in eadem circiter urethrae regione aperiri, quo id in perfecti viri urethrali isthmo observatur, uterique orificium in vaginam urethralem hic protendi duobusque ostiis perforatum esse colliculi seminalis ad instar, qui eodem in loco, licet exiguae plicae forma emineat parva columella versus anteriora productus, eadem plane ratione ac in nostro exemplari, quod et colliculi seminalis et portionis uteri vaginalis formas medias imitatur.»

Ackermann führt in seinem Werke noch zwei Hermaphroditen an, bei welchen die Section Aufklärung über das Verhalten der inneren Geschlechtstheile gab. Der eine war ein männlicher mit Hoden versehener, der andere ein weiblicher mit Eierstöcken versehener Zwitter. Beide Fälle bestätigen es gleichfalls, dass eine stärker entwickelte *Vesicula prostatica* einem minder ausgebildeten Uterus sehr ähnlich ist. Er theilt über den männlichen von Maret beschriebenen Hermaphroditen folgendes mit [1]): «Androgynus, quem Maret [2]) describit, eo magis attendi meretur, quod et internas ejusdem genitalium partes perlustrare licuerit Penis illi erat imperforatus. Sub eodem rima duplici labio cincta, in cujus sinistro exteriore corpus ovale testi non absimile tactu deprehensum fuit. Abdomini in parte dextra compresso et ibidem similis tumor prodibat. Urethra inter labia interna superius hiabat; subter illam orificium in vaginam exstitit hymene coarctatum; ibidem et carunculorum myrtiformium apparebant vestigia. *Inter intestinum rectum et vesicam saccus latuit membranaceus, qui ultra pollicem longus dimidium latitudine aequabat in veru montanum terminatus, ubi vesicularum seminalium ostia excretoria reperta fuere.* Testiculus sinister ductu deferente instructus erat; vesiculae verum semen continere videbantur. Tumor sero sanguinolento repletus, in quo corpus colore et forma hippocastani semen repraesentans situm erat; in eodem latere tuba Fallopii ad saccum usque membranaceum protendebatur. En notas organorum genitalium utriusque sexus imperfectius evolutorum in eodem individuo sibi junctas.»

Der weibliche Hermaphrodit *Anna Begault* wurde von Chevreul [3]) während seines Lebens beobachtet und nach seinem Tode secirt, war erwachsen, hatte einen schwarzen Bart, männliche Sitten und weibliche Kleidung. Ackermann sagt von ihm: «Instructa erat pene clitorideo septem ad octo linearum diametri, pollicem unum et dimidium longo, glande terminato praeputio cincta; sub glande sulcus aderat, qui pro recipienda urethra destinatus videbatur. Canalis urethrae tenuis sed dilatatus sub virgae medium orificio desiit; ex sulco glandis ad urethram usque frenulum apparuit cutaneum. Ab orificio urethrae in dextro latere descendit plica cutanea major, quae pudendi labium simulabat; in sinistro latere haec cutis plica a tumore, qui cutim distenderat, deleta erat. Vaginae ostium nullum, sed anus infra patuit. Ex annulo prodiit tumor, qui capitis infantilis magnitudine ab ilii ossis spina superiore versus pubis arcum obliquo ductu procedens in imi ventris cavo versus hypochondrium sinistrum et epigastrium ascendit. Post mortem aegrotae a D. Chevreul cadaver aperiebatur, qui sub tumore vesicam deorsum urgente *uterum cavum pollicem longum et uteri cervicem detexit, qui in urethram ostio ovali hiabat,* superius labio rubente obtecto. In latere dextro ligamentum rotundum adhaesit et inter lati laminas *ovarium* et *tubae* recipiebantur; in sinistro latere observatus fuit tumor hydropicus ovarii, cui tuba sinistra imponebatur, pars hujus tumoris in abdomine erat, pars ejus autem per annulum transiit

1) Ackermann l. l. p. 21. Obs. XXXIII.

2) Maret siehe Mémoires de l'Ac. de Dijon 1772. T. II. p. 157.

3) Journal de médecine. Tom LI. Paris 1779. p. 441.

et tumorem exterius visendum constituit; in abdomine mesenterium in massam scirrhosam ab ilii regione ad processum sterni xyphoideum usque coaluerat.»

Diese Beispiele reichen hin, um den Satz zu erläutern, dass die Geschlechtstheile bisweilen, in ihrer weiteren Entwickelung gehemmt, zwar an Grösse zunehmen, die Form aber, die sie in einer gewissen Periode des Embryolebens hatten, beibehalten, und dass unter solchen Umständen männliche Zwitter entstehen können, bei welchen die *Vesicula prostatica* einem Uterus ähnlich ist, oder auch weibliche Zwitter gebildet werden können, bei welchen der Uterus einer *Vesicula prostatica* ähnlich ist.

Geschichtliche Bemerkungen über das Rudiment des Uterus

Sowohl bei dem Manne als bei einigen männlichen Säugethieren ist der Theil, von welchem ich bewiesen habe, dass er das Rudiment des Uterus sei, der Aufmerksamkeit der Anatomen nicht ganz entgangen. Ueber die Kenntniss, welche frühere Anatomen von der Existenz der *Vesicula prostatica* oder des *Sinus prostatae* gehabt haben, hat Huschke[1]) die Literatur zusammengestellt. Morgagni scheint die *Vesicula prostatica* oder den *Sinus prostatae* entdeckt zu haben. Denn bei Cowper[2]), den Huschke in dieser Hinsicht anführt, finde ich zwar das *Caput Gallinaginis* abgebildet und mit den Worten *Caruncula vesiculas seminales claudens* erklärt, aber, dass in dieser Erhabenheit eine Blase liege, sagt er nicht. Dagegen beschreibt sie Morgagni[3]) unter dem Namen *Sinus prostatae* und bildet sie ab. In 15 Leichen fand er die Blase bei 12. Auch J. F. Meckel[4]) erwähnt dieselbe, indem er in seiner Uebersetzung von Cuvier's Vorlesungen über vergleichende Anatomie den Morgagni in dieser Hinsicht anführt, und dennoch hat er später in seinem Handbuche der menschlichen Anatomie[5]) die *Vesicula prostatica* zu erwähnen unterlassen, eben so wie andere Anatomen. Huschke sagt zwar, in neuerer Zeit wären die Chirurgen Lisfranc, Velpeau und Guthrie auf diese Blase aufmerksam geworden und hätten ihre chirurgische Wichtigkeit ins Licht gesetzt. Allein Velpeau und Lisfranc sprechen daselbst nicht von der *Vesicula prostatica*, sondern von einer ausgehöhlten Stelle, welche zwischen dem verengten Anfange der Harnröhre und einer Verengung bemerkt wird, die da befindlich ist, wo der von der Prostata eingeschlossene Theil der Harnröhre in den *Isthmus urethrae* übergeht, also von der ausgehöhlten Stelle, die man Taf. I. Fig. 1 zwischen *p'* und *u* sieht. Velpeau

---

1) S. Th. v. Sömmerring Lehre von den Eingeweiden und Sinnesorganen des menschlichen Körpers, umgearbeitet und beendigt von E. Huschke. Leipzig 1844. p. 407.

2) Glandularum quarundam nuper detectarum ductuumque earum excretoriorum descriptio cum figuris a Guilielmo Cowper Londinensi. Londini 1702. 4. p. 10 L. Tab. I.

3) Morgagni Advers. anat. IV. Animad. 3.

4) Band IV. p. 423 und 436.

5) J. F. Meckel Handbuch der menschlichen Anatomie Bd. IV. p. 554.

sagt[1]): «L'espèce d'excavation qui se remarque entre ce rétrécissement et celui qui se trouve en avant renferme la crête urétrale ou le *veru montanum*, qui divise la parois inférieure de l'urètre en deux portions égales, sur lesquelles la sonde est obligée de glisser avant d'arriver dans la vessie. Comme la membrane muqueuse y est très mince, et que l'excavation est quelquefois assez profonde, il importe, pour éviter sûrement de faire fausse route, de tenir le sommet de l'instrument (cathéter) contre la parois opposée. M. Lisfranc dit avoir observé des sujets chez lequels cette excavation avait jusqu'a trois et quatre lignes de profondeur. J'y ai souvent observé des lacunes assez larges pour recevoir le bec d'une sonde. La crête elle-même est un organe essentiel, qui mérite beaucoup de précautions lors du cathétérisme, surtout lorsqu'on porte le caustique dans le conduit excréteur de l'urine, attendu que son irritation se transmet avec la plus grande facilité aux testicules par le canal déférent. Elle se termine à dix lignes en avant du col de la vessie et *forme là une sorte de tubercule plus ou moins renflé, sur le milieu du quel les canaux éjaculateurs viennent s'ouvrir.* C'est sur ces côtés que se voient les orifices des conduits excréteurs de la prostate, placés sur deux lignes de manière à circonscrire un V dont la point serait en avant. Il n'est pas très rare *de voir ce tubercule déprimé dans son centre.* On a pensé, que l'extrémité des instruments s'y engageait souvent, au point d'entrainer d'assez graves dangers par rapport à la lésion des conduits de la semence. Mais, s'il est vrai que cet obstacle se rencontre réellement quelquefois, il faut convenir cependant que les difficultés tiennent bien plus souvent à ce que la sonde s'est arrêtée dans le fond des excavations latérales se prolongeant en arrière pour former la luette vésicale, *le veru montanum donne quelquefois naissance en s'épanouissant a deux replis latéraux concaves* en avant et qui offrent les apparences de deux valvules a peine distinctes. Plus développés par une cause quelconque ils pourraient apporter d'assez grandes difficultés à l'opération du cathétérisme.» Ich finde in diesen Worten keine Beschreibung der *Vesicula prostatica,* denn an der einen Stelle, wo der Verfasser von *Veru montanum* spricht, sagt er nur, man sehe nicht selten dieses Tuberculum niedergedrückt, an der andern Stelle spricht er von 2 concaven Falten, die sich am *Veru montanum* bisweilen finden sollen, womit aber die *Vesicula prostatica* durchaus nicht gemeint sein kann. Auch auf den von Cowper und Velpeau gegebenen Abbildungen ist die *Vesicula prostatica* nicht dargestellt.

Im Jahre 1836 machte ich meine Beobachtungen über die *Vesicula prostatica* des Menschen bekannt[2]) und suchte zu beweisen, dass sie das Rudiment des Uterus beim männlichen Geschlechte wären, und theilte in der im Jahre 1841 zu Braunschweig gehaltenen Versammlung der deutschen Naturforscher Beobachtungen über den *Uterus masculinus* des Bibers mit[3]).

1) Velpeau Traité complet d'Anatomie chirurgicale. Tome. II. Paris 1833. 8. p. 286.

2) In meinem Programme Annotationes anatomicae et physiologicae zu Dav. Ed. Kretzschmar Disp. inaug. circa lineamenta physiologiae morborum. Lipsiae d. XXII. Martii 1836.

3) Amtlicher Bericht über die 19. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Braunschweig im September 1841. Braunschweig 1842. 4. p. 64. — S. Th. v. Sömmerring Lehre von den Eingeweiden und Sinnesorganen des menschlichen Körpers, umgearbeitet und beendigt von E. Huschke. Leipzig 1844. 8. p. 409—412.

Huschke hält die Behauptung, dass der von mir angegebene Theil das Rudiment des Uterus sei, für begründet, indem er sich unter andern auch auf die Beschaffenheit des *Uterus masculinus* bei dem von Ackermann beschriebenen Zwitter und bei andern Zwittern und auf den von ihm selbst untersuchten *Uterus masculinus* des erwachsenen Kaninchens stützt.

II.

ÜBER DIE DRÜSENARTIGEN GEBILDE IN DER NÄHE DER EINMÜNDUNGSSTELLE DER SAAMENCANÄLE IN DIE HARNRÖHRE.

An dem *Vas deferens* bemerkt man in der Nähe seiner Einmündung in die Urethra theils eine drüsenartige Erweiterung, theils einen mit drüsenartigen Wänden versehenen Anhang. Man schreibt diesen Theilen entweder den Nutzen zu, dass sich in ihnen der Saame sammeln und anhäufen könne, oder man behauptet, sie hätten die Verrichtung eines Absonderungsorgans, nämlich einen Saft zu liefern, der sich wie der der Prostata mit dem Saamen vermenge und vielleicht einen besonderen Nutzen bei der Zeugung habe, jedenfalls aber denselben verdünne und das Volumen desselben vermehre. Man wird auf dem letzteren Gedanken durch die Experimente von Spallazani über die künstliche Befruchtung bei Fröschen geführt, welche beweisen, dass der Saame verdünnt werden müsse um seine befruchtende Wirkung vollkommen zu äussern, sowie auch durch die Ueberlegung, dass um den Saamen mit der nöthigen Gewalt aus der Harnröhre auszutreiben, das Volumen desselben nicht zu klein sein dürfe.

Das Drüsenende des Vas deferens bei dem Pferde.

Das Organ, welches ich das *Drüsenende des Vas deferens, finis glandulosus vasis deferentis* nenne, ist von den Anatomen beim Menschen wenig beachtet worden. Beim Pferde finden wir dasselbe so sehr ausgebildet, dass man sich überzeugt, dass es ein eigenthümliches Organ sei.

Auf Taf. III. Fig. 2. sieht man diese drüsenartige Anschwellung des *Vas deferens* von einem Hengste abgebildet, nachdem dieselbe mit erstarrender Materie erfüllt worden war. Das $1\frac{1}{3}$ Par. Linien dicke *Vas deferens* schwillt plötzlich zu einem etwa 8 Par. Zoll und darüber langen und 7—9 Linien dicken cylindrischen drüsigen Körper an, wird dann beinahe wieder so eng wie es oben ist und mündet sich in den sehr weiten Gang, durch welchen die Saamenblase mit der Urethra zusammenhängt, nahe an der Mündung desselben. Dieses Organ besteht, wie man Taf. IV. Fig. 2. und 3. in natürlicher Grösse abgebildet sieht, aus einem Canale, in welchem sich dicht nebeneinander unzählige dreieckige abgeplattete Drüsenläppchen öffnen, die den Canal strahlenförmig umgeben und ihre Spitze nach dem Canale, ihre Basis nach der

Peripherie des cylindrischen Organs hinkehren. Jedes dreieckige Läppchen theilt sich nach der Peripherie zu in kleinere gleichfalls dreieckige und abgeplattete Läppchen. Diese Theilung geht so weit, dass sie nicht mit unbewaffnetem Auge verfolgt werden kann. Wenn man von einer Drüsenanschwellung des *Vas deferens*, in das man vor kurzem erstarrende Flüssigkeit eingespritzt hat, die äussere und mittlere Haut möglichst entfernt, dann das Präparat trocknet, dasselbe durch Bestreichen mit Oel oder mit Lack durchsichtiger macht und es nun unter dem Mikroskope bei auffallendem Sonnenlichte betrachtet; so sieht man die gegen die Peripherie gerichteten geschlossenen Enden der kleinsten Bläschen durchschimmern, aus den jene grösseren Läppchen bestehen. Ich fand ihren Durchmesser im Mittel ungefähr 0,034 Par. Linien, also reichlich $^1/_{29}$ Par. Linien. Nimmt man die Injectionsmasse aus der Höhle des aufgeschnittenen *Vas deferens* heraus, so sieht man, dass das *Vas deferens* keine continuirliche Wand hat, sondern dass die untereinander verwachsenen, dicht gedrängt liegenden, zugespitzten, inneren Enden der Bläschen, die das *Vas deferens* strahlenförmig umgeben, die Wand desselben bilden. Siehe Taf. IV. Fig. 3., wo die Schnittfläche des der Länge nach in 2 Hälften getheilten Organs abgebildet ist.

Ich habe die Anfüllung der *Vasa deferentia* und ihrer *Drüsenanschwellung* beim Pferde zweimal unternommen und beide Male sind die das *Vas deferens* strahlenförmig umgebenden Läppchen so vollkommen und überall erfüllt worden, dass ich annehmen muss, dass der vom *Vas deferens* dahin gebrachte Saamen gleichfalls in die beschriebenen Läppchen leicht eindringen könne.

Bestände der Zweck dieser Erweiterung des *Vas deferens* nur darin, dass sich eine grössere Menge Saamen daselbst ansammeln könne, so würde es viel zweckmässiger gewesen sein, wenn dieser angeschwollene Theil des *Vas deferens* einfache dünne Wände gehabt hätte, denn dann hätte er viel mehr Saamen fassen können. Dringt der Saame wirklich in die Bläschen ein, so darf man vermuthen, dass die innige Berührung, in die er daselbst mit so vielfachen gefässreichen Wänden kommt, nicht ohne Nutzen ist, entweder um dem Saamen die nöthige Reife zu geben, oder auch um ihn zu gewissen Zeiten wieder zu resorbiren. Dieser drüsenartige Bau kann zu gewissen Zeiten zur Secretion einer Flüssigkeit dienen, womit der Saame verdünnt wird, zu andern Zeiten aber kann er bewirken, dass die Blut- und Lymphgefässe in eine vielfache, innige, die Aufsaugung begünstigende Berührung mit dem Safte kommen, der im *Vas deferens* und seinen Bläschen eingeschlossen ist. Denn so wie die vielfache Vergrösserung der Oberfläche einer mit Blutgefässen überzogenen Schleimhaut den Mechanismus einer reichlichen Absonderung in einem kleinen Raume bildet, eben so muss dieselbe Einrichtung, wenn eine Flüssigkeit in die kleinen so fein eingetheilten Räume eindringen kann, unter andern Umständen dazu dienen können, dass in einem kleinen Raume eine reichliche Resorption dieser Flüssigkeit stattfinde. So ist z. B. die Lunge, in deren Zellen von aussen die atmosphärische Luft eindringt, nicht blos ein Secretionsorgan, sondern anerkannterweise zugleich auch ein Resorptionsorgan, und nirgends werden Gifte und Arzneien schneller resorbirt als in den Lungen, wenn sie durch dis Luftröhre eingespritzt werden. Dass hier aber in der Drüsenan-

schwellung des *Vas deferens* ausserdem eine Absonderung eines den Saamen verdünnenden Saftes geschieht, lässt sich, wie wir weiter unten sehen werden, bestimmt nachweisen.

Das Drüsenende des Vas deferens beim Menschen, Biber, Kaninchen und Hunde.

Das letzte etwa 2 Zoll lange Stück des *Vas deferens* des Menschen, hat vor seinem Uebergange in die Saamenblase und in den *Ductus ejaculatorius* eine beträchtlich weitere Höhle als der grössere, dem Hoden nähere Theil des *Vas deferens.* Seine Wand ist nicht nur mit kleinen Zellen besetzt, sondern auch mit grösseren und kleineren knospenartigen hohlen Auswüchsen oder Aesten, welche selbst Wände besitzen, die aus kleinern untereinander verwachsenen Zellen bestehen. Um diesen Bau wahrzunehmen, muss man das *Vas deferens* mit erstarrender Flüssigkeit erfüllen und die äusseren Häute abpräpariren und dann trocknen. Ein solches Präparat stellt vom Menschen Taf. II. Fig. 1. vor, an welchem man aber die kleinsten Zellen nicht so klein abzubilden im Stande gewesen ist als sie sind, weil man, um dieses zu thun, das Präparat vergrössert hätte abbilden müssen. Auf derselben Tafel Fig. 2. und Fig. 3. *D* sieht man das *Drüsenende des Vas deferens* bei zwei andern Menschen mit erstarrender Flüssigkeit erfüllt, im getrockneten Zustande, ohne dass die äussere Haut vorher entfernt wurde. Auf Taf. IV. Fig. 1. *D D* ist das *Drüsenende des Vas deferens* beim Biber mit erstarrender Flüssigkeit erfüllt dargestellt. Bei einem zweiten jungen Biber mass ich die kleinsten Bläschen des Drüsenendes und fand ihren Durchmesser ungefähr 0,13‴. Mehrere dieser Bläschen bildeten ein Läppchen, und manche von den Bläschen waren durch seichte Furchen in noch kleinere Zellen getheilt. Auf Taf. V. Fig. 1. *D* ist das Drüsenende des *Vas deferens* beim Kaninchen abgebildet, ohne dass etwas in dasselbe eingespritzt worden ist. Am kleinsten ist das Drüsenende des *Vas deferens* beim Hunde, welches Taf. VII. Fig. 1. *D D*, wo es in dem Zustande abgebildet worden, wenn in seine Höhle keine Flüssigkeit eingespritzt ist.

Die sehr grosse Erweiterung der *Vasa deferentia* bei *Cricetus vulgaris* hat schon Joh. Müller bemerkt.

Ueber den Bau und dem Nutzen der Saamenblasen des Menschen.

Fallopia, der die Saamenblasen beim Menschen entdeckte, schrieb ihnen eine ähnliche Verrichtung in Beziehung auf den Saamen zu, als die Gallenblase in Beziehung auf die Galle hat, nämlich die, den ihr vom *Vas deferens* zugeführten Saamen zu sammeln, und also einen hinreichenden Vorrath davon für die Begattung aufzubewahren. Dagegen hielten sie Wharton, Van Horne und neuerlich J. Hunter für ein Absonderungsorgan, welches einen vom Saamen verschiedenen Saft absondere. Die Ansicht des Fallopia ist hauptsächlich von Brugnone[1]) vertheidigt worden.

Nach meinen Untersuchungen ist es gewiss, dass bei manchen Thieren wirklich kein Saame in die Saamenblasen gelange, sondern dass dieselben mit

1) Mém. de l'Acad. roy. de Turin Ann. 1786—1787. p. 609.

einer von ihnen abgesonderten, vom Saamen verschiedenen Flüssigkeit erfüllt sind, während bei andern Thieren wirklich eine geringe Menge Saame in die Saamenblasen kommt, daselbst aber durch die von der Saamenblase abgesonderte Flüssigkeit sehr verdünnt wird. Dieses ist auch beim Menschen der Fall. Beim Kaninchen und Hasen, wo sich die *Vasa deferentia* in ein unpaares, muskulöses, nicht drüsiges Organ, den *Uterus masculinus,* einmünden, kann dieser zu gewissen Zeiten wirklich Saamen enthalten, der hier, wie es scheint, nicht durch die Absonderung eines neuen Saftes verdünnt wird; allein es wäre Unrecht, dieses Organ für eine Saamenblase in der Bedeutung zu halten, die dieses Wort beim Menschen hat. Wharton, Van Horne und J. Hunter sind also der Wahrheit näher gekommen als Fallopia und Brugnone. Denn es steht fest, dass die Saamenblase jeder Zeit, wenn sie überhaupt vorhanden ist, einen eigenthümlichen Saft absondert. Mit diesem Safte mengt sich nun bei manchen Thieren der in die Saamenblase in geringer Menge übergehende Saame, bei andern Thieren dagegen findet diese Mengung erst bei der Begattung in der Harnröhre statt, und die Saamenblase enthält gar keinen Saamen.

Da die Saamenthierchen, wenn sie vorhanden sind, ein charakteristischer Bestandtheil des vom Hoden abgesonderten Saftes sind, und in keinem der andern, zu dem Geschlechtsapparate gehörenden Absonderungsorganen gebildet werden; so fehlt es uns in den Fällen, wo der Saame Saamenthierchen enthält, nicht an einer guten Gelegenheit, zu erkennen, ob der Saame in die Saamenblase übergehe oder nicht. Ich habe mich bei der Ratte und bei dem Biber überzeugt, dass der Saft der Saamenblasen gar keine Saamenthierchen enthält, während der im *Vas deferens* enthaltene Saft davon wimmelt. Dagegen habe ich im Safte der Saamenblase des Menschen, den ich an einem Orte aus derselben nahm, der von der Einmündungsstelle des *Vas deferens* möglichst entfernt lag, Saamenthierchen in geringer Menge gefunden. Beim Pferde wurde ein Tröpfchen Saamen aus dem *Vas deferens* an einem über dem Drüsenende liegenden Theile desselben genommen. Es wimmelte so von Saamenthierchen, dass sie einander verdeckten, und dass der Saame aus ihnen hauptsächlich zu bestehen schien. Hierauf wurde ein Tröpfchen aus dem Drüsenende des *Vas deferens* herausgenommen und untersucht. Hier war der Saame offenbar durch einen anderen thierischen Saft verdünnt, denn die Saamenthierchen waren zwar daselbst auch sehr zahlreich, aber bei weitem nicht so, dass sie einander verdeckt hätten. Aber in viel höherem Grade verdünnt, als im Drüsenende des *Vas deferens,* war der Saame in der Saamenblase, so dass hier der hinzugekommene Saft bei weitem das Uebergewicht über den Saamen hatte, und dieser nur einen kleinen Zusatz zu jenem bildete.

Schon Henle fand, dass die Saamenthierchen in den menschlichen *Vesiculis spermaticis* in geringer Menge vorhanden wären, und Huschke[1]) sah sie sogar im verschlossenen Ende derselben in beträchtlicher Zahl und schliesst daraus, dass die Saamenblasen zwar Receptacula des Saamens wären, noch mehr aber eignes Secret enthielten.

---

1) Huschke in seiner Umarbeitung von Sömmerring's Eingeweidelehre. S. 403.

Die Saamenblasen haben bei verschiedenen Menschen eine verschiedene Gestalt. Bisweilen bestehen sie aus einem einzigen Canale, der nicht in längere Aeste getheilt ist, sondern nur hier und da einen sehr kleinen hohlen Auswuchs hat, den man seiner Gestalt nach mit der Knospe eines Zweigs vergleichen kann. Die Taf. II. Fig. 1. abgebildete Saamenblase liefert ein Beispiel dieser Art der Bildung. Ich erfüllte sie erst mit erstarrender Flüssigkeit, und legte dann ihre Biegungen durch Wegnahme des zwischen denselben gelegenen Zellgewebes und der Muskelfasern, die sie bedecken, aus einander. Sie ist ein langer, dicker, ziemlich gleichmässiger Canal, der, ehe die Biegungen von einander getrennt, und, so weit es nöthig schien, gerade gelegt wurden, ungefähr dieselbe Form hatte, welche die linke Saamenblase in der Figur zeigt.

In andern Fällen, wie auf Fig. 2. und Fig. 3., theilt sich der Hauptcanal der Saamenblase in mehrere Aeste, die bisweilen selbst wieder Aeste oder knospenförmige hohle Auswüchse haben. Haller fand einmal eine Saamenblase, die 17 Aeste hatte, und mit Unrecht haben Brugnone und Caldani die an dem Canale der Saamenblase wahrnehmbaren Aeste für ein Erzeugniss der bei der Untersuchung angewendeten Pressung gehalten, welche entstünde, wenn der Gang mit Quecksilber erfüllt würde. Ich getraue mich nicht zu entscheiden, welche dieser Formen öfter vorkomme, die ästige oder die nichtästige. Immer hing nach meinen vielfachen Versuchen der Canal der Saamenblase so mit dem *Vas deferens* zusammen, dass Flüssigkeit, die man in das *Vas deferens* einspritzt, ausserordentlich leicht in die Saamenblase eindringt und daher eher in dieselbe gelangt, als sie zur Oeffnung der Harnröhre an der Eichel heraustritt.

Der drüsenartige Bau an den Wänden der Saamenblase ist in alter Zeit von De Graaf geläugnet worden. Die Wände derselben, sagt er, wären nur membranös. Allerdings sind die Wände der menschlichen Saamenblasen nicht in der Weise mit Drüsen versehen, wie der Magen und die Gedärme, d. h. es gehen von der innern Oberfläche nicht Gänge aus, die in längere Schläuche oder Beutelchen führen, sondern die Wände derselben bestehen aus dicht neben einanderliegenden, einander berührenden, grösseren und kleineren Zellen, die sich unmittelbar in die Höhle der Saamenblase öffnen. Die grösseren Zellen sind äusserlich durch Furchen, denen inwendig niedrige Scheidewände entsprechen, von neuem in kleinere Zellen abgetheilt. Spritzt man in den Magen oder in das Stück eines Darms eine nachher erstarrende Flüssigkeit, so zersprengt man eher die Wand, als dass die Flüssigkeit in die Magendrüsen, in die Lieberkühn'schen Drüsen, oder in die Drüsen des Dickdarms eindringt. Nur ausnahmsweise ist es mir einmal gelungen, die Drüsen des Dickdarms auf diese Weise zu erfüllen. Dagegen gelingt es jedesmal durch eine solche Injection, die Zellen zu erfüllen, aus welchen die Wand der Saamenblase zusammengesetzt ist. Die Saamenblase (Taf. II. Fig 1. *s*) hat in dieser Hinsicht den nämlichen Bau als das Drüsenende des *Vas deferens* (ebendaselbst *D*). Der Bau der Lungen bei den verschiedenen Thieren, namentlich bei den Amphibien, überzeugt uns aber, dass diese Einrichtung einer aus dicht nebeneinander liegenden Zellen bestehenden Wand ganz geeignet ist für den Zweck eines Absonderungsorgans. Die Lungen der Frösche z. B., sind bekanntlich nur ein-

fache Säcke, deren Wand aus dicht nebeneinander liegenden, in die Höhle derselben offenstehenden Zellen besteht, und die Lungenbläschen des Menschen sind selbst nicht anders gebildet, sie sind sehr kleine Säckchen, deren Wände aus einer Anzahl noch kleinerer dicht nebeneinander liegender, mit weiten Oeffnungen in eine gemeinschaftliche Höhle mündender Zellen bestehen, und dieselbe Einrichtung finden wir an den geschlossenen Enden der Milchgänge der Brustdrüse und der Ausführungsgänge vieler anderen Drüsen. Um diesen Bau bei den Saamenblasen sichtbar zu machen, kann man auf eine doppelte Weise verfahren. Man kann die auf die angegebene Weise erfüllten Saamenblasen von aussen zergliedern, indem man das Zellgewebe, die Fleischfasern, die nicht nur die Windungen bedecken, sondern auch von einer Windung über die Spalte hinweg, auf benachbarte Windungen hinüber gehen, entfernt, und endlich auch die grösseren Blutgefässe hinwegnimmt, so dass nur noch die Schleimhaut übrig bleibt. So ist das Taf. II. Fig. 1. *s* abgebildete Präparat gemacht. Oder man kann von den Saamenblasen mit der Scheere ein Stückchen der Wand herausschneiden, unter Wasser ausbreiten, und so die innere Oberfläche der auf einer schwarzen Unterlage ausgebreiteten Wand mit dem Mikroskope bei auffallendem Sonnenlichte beobachten. Man sieht dann ein gröberes Netz von Scheidewänden, welche in die Höhle hinein vorspringen und grössere Zellen einschliessen, deren Höhle selbst wieder durch kleinere und niedrigere Scheidewändchen in noch kleinere Zellen eingetheilt wird.

Es ist sehr schwer, etwas über den Durchmesser der Zellen zu bestimmen, weil sie sehr verschieden gross sind. Es kommen einzelne vor, die wohl 0,3 Par. Linien und mehr im Durchmesser haben, ohne dass man da schon eine Eintheilung in kleinere Zellen gewahr wird, andere sind 0,2 und 0,1 Par. Linien, und noch kleiner bis zu 0,07 und 0,05 Par. Linien, und man kann nicht gewiss sein, dass keine noch kleineren existiren. Da nun die Zellen bei der zweiten von Huschke angewendeten Methode nicht ausgedehnt werden, so ist nicht daran zu zweifeln, dass, wie er angiebt, in dem feinsten Netz der Scheidewände Maschen vorkommen, die nur 0,05 Lin. im Durchmesser haben[1]). Die Saamenblasen sind hinsichtlich der an ihren Wänden befindlichen, durch Scheidewände abgetheilten Zellen der Gallenblase ähnlich. Nur sind dort die Zellen viel grösser und nicht so vielfach durch kleinere Scheidewände in kleinere und noch kleinere Zellen abgetheilt. Die beschriebenen Zellen haben in einem kleinen Raume eine desto grössere absondernde Oberfläche, je mehr sie durch Scheidewände in kleinere und noch kleinere Zellen abgetheilt werden. Auch der Gallenblase ist die Verrichtung der Absonderung eines eigenthümlichen Saftes und der Resorption nicht ganz abzusprechen. Ich fand, dass die Gallenblase eines Menschen, deren *Ductus cysticus* durch einen grossen Gallenstein so verschlossen war, dass nichts herein und heraustreten konnte, zwar mit Flüssigkeit ziemlich angefüllt war, aber nicht mit Galle, sondern mit einer farblosen, nicht bittern, sondern salzig schmeckenden Flüssigkeit, die auch chemisch untersucht, keine Aehnlichkeit mit der Galle hatte.

---

1) Sömmerring's Eingeweidelehre, umgearbeitet und beendigt von E. Huschke. Leipzig 1844. p. 407.

Nach alle dem, was bis jetzt vorgetragen worden, ist zwar nicht zu zweifeln, dass die Saamenblasen des Menschen und mancher Säugethiere auch Saamen aufnehmen, aber es ist zugleich gewiss, dass derselbe von ihnen nur in geringer Menge aufgenommen wird. Der grösste Theil der in ihnen enthaltenen Flüssigkeit ist vom Saamen verschieden und also unstreitig ein Secret der *Saamenblasen* und des *Drüsenendes* des *Vas deferens*.

Dass die *Vasa deferentia* und die Saamenblasen auch mit Muskelfasern versehen sind, die äusserlich der Länge nach laufen, habe ich schon früher in dem nämlichen Programme auseinandergesetzt, in welchem ich die Zellen der Wände der Saamenblasen und des Drüsenendes des *Vas deferens* beschrieb [1]).

Bei den von meinem Bruder Eduard angestellten Versuchen hat sich bei mehreren Säugethieren die muskulöse Natur der von mir beobachteten Fasern bestätigt. Er reizte nämlich die *Vasa deferentia* bei einem ausgebildeten, soeben getödteten Hunde, bei einem Kater und bei einem Kaninchen, indem er sie mit den Schliessungsdrähten eines galvano-magnetischen Rotationsapparats berührte. Dabei geriethen sie in eine deutliche, lebhafte, peristaltische Bewegung. Huschke [2]) macht darauf aufmerksam, dass schon Leeuwenhoek [3]) am *Vas deferens* sowohl Längen- als Ringfasern erkannt habe, dass J. F. Meckel [4]) wenigstens Ringfasern beobachtete, und dass Cooper an dem unteren Stücke des Saamenganges eines Bullen die Beobachtung von Leeuwenhoek bestätigt habe. Er selbst hat 3 Faserlagen gefunden, nämlich 2 Schichten von Längenfasern, zwischen welchen eine Schicht von Kreisfasern liegt, aber er blieb noch darüber zweifelhaft, ob sie wirklich die Natur der Muskelfasern hätten, und war mehr geneigt, sie für elastische Fasern zu halten.

Ueber die Prostata und ihre Structur.

Die Prostata scheint eine ähnliche Bestimmung zu erfüllen als die Saamenblasen, inwiefern sie Secretionsorgane sind, nämlich einen Saft zu liefern, der sich mit dem Saamen mengt und das Volumen desselben vermehrt und dadurch sowohl seine befruchtende Kraft als auch seine Fortbewegung unterstützt. Man darf sich daher nicht wundern, dass die Prostatadrüsen bei Säugethieren in ihrem Baue den Saamenblasen so ähnlich sind, dass man nicht selten zweifelhaft bleibt, ob die vorhandenen Drüsen für Saamenblasen oder für Prostatadrüsen zu halten sind.

Prostata des Menschen, des Hundes und des Pferdes.

Bei dem *Menschen*, bei dem *Hunde* und beim *Pferde* hat die Prostata nicht die geringste Aehnlichkeit mit den Saamenblasen. Dieselbe besteht bei jenen aus einer dichten Drüsenmasse, die viele ästige, untereinander nicht

---

1) Programma resp. D. E. Kretzschmar Dissert. inaug. Lineamenta physiologiae morborum d. 22. M. Martii 1836. p. 8.

2) Huschke Eingeweidelehre. p. 382.

3) Leeuwenhoek Epist. physiol. 41, 390. fig. 2.

4) Meckel Handbuch d. Anat. IV. S. 552.

communicirende Ausführungsgänge besitzt. Bei einem Hunde zählte ich bis auf 40 sich in die Harnröhre mündender Gänge. Wenn man die Harnblase an ihrem Uebergange in die Harnröhre zubindet und nun in die letztere mit Gewalt eine geeignete erstarrende Injectionsmasse einspritzt, so dringt dieselbe beim Menschen oder bei einem grossen Hunde nicht selten in einige Ausführungsgänge der Prostata und erfüllt sie bis an ihre Enden. Werden nun auf diese Weise einzelne Ausführungsgänge injicirt, während die benachbarten leer bleiben, so lässt sich der injicirte Theil der Drüse, durch Hinwegnahme des nichtinjicirten, isolirt darstellen. Man sieht dann, *dass die Prostata aus vielen dicht aneinander liegenden und durch Zellgewebe verwachsenen pyramidalen Läppchen besteht, die ihre Basis nach der Peripherie, ihre Spitze nach der Harnröhre kehren, und deren Seitenflächen uneben sind, weil die benachbarten Läppchen in einander eingreifen.* Taf. IV. Fig. 4. stellt einen solchen Lappen von der Prostata des Menschen 10 Mal vergrössert dar. Das charakteristische dieser baumförmigen Drüsengänge besteht darin

1) dass sie im Verhältnisse zu ihrer geringen Länge sehr weit sind;

2) dass ihre Wände fast überall mit Drüsenläppchen besetzt sind, die nicht durch einen engeren Gang und also durch eine Art von Stiel, sondern unmittelbar auf ihnen aufsitzen;

3) dass die Wände und die angeschwollenen Enden der Ausführungsgänge aus untereinander verwachsenen Zellen bestehen, die ungefähr 0,0255‴ bis 0,0338‴ d. h. $1/_{39}$ bis $1/_{29}$ Par. Linien im Durchmesser haben.

Ich habe bei früheren Untersuchungen den Durchmesser der kleineren Zellen der Prostata zu $1/_{16}$ bis $1/_{12}$ Par. Lin. gefunden und der grösseren von $1/_{12}$ bis $1/_{5}$ Linie. Meine neueren Injectionen zeigen, dass jene Zellen durch kleinere Einschnürungen in noch kleinere Zellen getheilt sind. Ich muss aber, um diese kleineren Zellen zu sehen, die injicirte Prostata im frischen Zustande unter dem Mikroskope betrachten. Im getrockneten Zustande werden sie undeutlich. Es ist wohl möglich, dass auch diese kleineren Zellen abermals durch Einschnürungen in noch kleinere Zellen abgetheilt sind. Aber ich bin nicht im Stande gewesen, an der injicirten Prostata des Hundes und des Menschen eine noch feinere Eintheilung der Zellen zu unterscheiden. Die von mir gemessenen kleinen Zellen sind beim Hunde und Menschen gleich gross, aber die aus diesen Zellen bestehenden angeschwollenen Enden der Gänge und diese Gänge selbst sind beim Hunde dünner als beim Menschen. Taf. VII. Fig. 1. *p* zeigt die Prostata des Hundes in natürlicher Grösse, wenn sie nicht injicirt ist.

Taf. III. Fig 1. *p* stellt einen Lappen von der *Prostata des Pferdes* in natürlicher Grösse vor, dessen Ausführungsgang bis an seine Enden mit erstarrender Flüssigkeit erfüllt worden ist. Der nicht injicirte Theil der Prostata ist weggenommen. Die Aeste des Ausführungsganges sind fast überall von Drüsenläppchen bedeckt, welche nicht durch engere Gänge, sondern so unmittelbar auf der Wand derselben aufsitzen, dass man die Wand der Ausführungsgänge meistens nicht sehen kann, und doch ist dieser Lappen von einer Seite

gezeichnet, wo er noch am wenigsten mit Drüsenläppchen bedeckt war. Man kann sagen, dass die kleineren Aeste selbst längliche Drüsenläppchen sind, die durch Einschnitte in noch kleinere Läppchen getheilt werden, welche selbst wieder durch weniger tiefe Furchen in noch kleinere Läppchen zerfallen, die dann endlich durch die seichtesten Einschnitte oder Furchen in Zellen eingetheilt sind, welche nur noch durch das Mikroskop erkannt werden können. Um die letzteren zu sehen, muss man, wie gesagt, das Präparat im frischen Zustande, ehe es getrocknet ist, unter dem Mikroskope betrachten. Diese Zellen, welche die Wände der Gänge bilden und in die Höhle derselben weit offen stehen, haben ungefähr einen Durchmesser von $^1/_{21}$ Par. Linie, oder in Decimalen ausgedrückt, etwa 0,0468‴. Es ist möglich, dass auch sie durch noch kleinere Furchen von neuem in noch kleinere Zellen eingetheilt werden. Wenigstens glaubte ich bei einem Läppchen, in welches die Injectionsmasse Luft vor sich her gedrängt hatte, an jenen Zellen noch kleinere Zellen zu unterscheiden, die 0,0094 Par. Lin., d. h. ungefähr $^1/_{106}$ Par. Lin. im Durchmesser hatten, deren Existenz ich aber nicht mit Sicherheit behaupten kann. Enge Aeste, an welchen angeschwollene Enden bemerklich wären, giebt es nicht. Die Zahl der prostatischen Ausführungsgänge, welche sich in die Harnröhre begeben, ist beim Pferde viel geringer als beim Menschen und beim Hunde.

Den Hunden fehlen die Saamenblasen ganz, und bei den Pferden sind sie gross, aber zugleich einfacher gebildet als bei irgend einem andern mir bekannten Säugethiere. Weil nun bei den Hunden jene drüsenartige Anschwellung am *Vas deferens*, die ich das *Drüsenende* desselben nenne (Taf. VII. Fig. 1. *DD*), auch sehr klein ist, scheint bei ihnen die Begattung sehr lange dauern zu müssen, denn es scheint eine längere Zeit nöthig zu sein, ehe eine hinreichende Menge von Zeugungsstoff in die Harnröhre gebracht wird. Zu der so lange dauernden Begattung werden die Hunde unstreitig durch die eigenthümliche Anschwellung genöthigt, die das *Corpus cavernosum* jenseits der Mitte des Gliedes nach der Eichel zu bildet (Taf. VII. Fig. 1. *C* und Fig. 3., wo sie im Querschnitte gezeichnet ist), denn unstreitig können sie, so lange die Erection dauert, wegen dieser Anschwellung das Glied nicht so leicht zurückziehen.

Bei dem *Pferde* sind die Saamenblasen zwei einfache, ziemlich weite, mit dünnen Wänden versehene Blasen, die wenige Linien vor ihrer gleichfalls sehr weiten Ausmündung in die Harnröhre das *Vas deferens* aufnehmen. (Siehe Taf. III. Fig. 1., wo *s* die linke durch Luft ausgedehnte Saamenblase ist, in die sich das *Vas deferens* einmündet, und wo auf der rechten Seite die Saamenblase weggenommen und das *Vas deferens* allein übrig gelassen worden ist; oder auch Taf. IV. Fig. 1., wo sich bei *u* der *Uterus masculinus* an der hinteren Wand der Harnröhre öffnet, während daneben bei *s* die gemeinschaftliche Oeffnung der Saamenblase und des *Vas deferens* sichtbar ist, und zwar auf der rechten Seite, wie sie sich ausnimmt, während man in sie Luft hineinbläst, auf der linken, wenn sie aufgeschnitten ist, so dass man das sich mündende *Vas deferens* sehen kann.)

Da beim Pferde das *Vas deferens* die oben S. 394 beschriebene sehr lange und dicke drüsige Anschwellung bildet (Taf. III. Fig. 2.), da fer-

ner bei ihm die Cowper'sche Drüse sehr gross ist (siehe Taf. III., Fig. 1. *C*), so konnten die Saamenblasen sehr einfach und die Prostata verhältnissmässig klein sein.

Die Prostata einiger Säugethiere, bei denen man sie von den Saamenblasen nicht mit Sicherheit unterscheiden kann.

Ueber den Streit, welche von den am Anfange der Harnröhre vorkommenden drüsigen Organen man für Prostatadrüsen oder Saamenblasen zu halten habe, würde man leicht hinwegkommen, wenn man, wie Brugnone[1]) und neuerlich Lamperhoff[2]) nur diejenigen Drüsen Saamenblasen nennte, die sich vor ihrer Einmündung in die Harnröhre mit dem *Vas deferens* vereinigen, und also ihren Saft durch dieselbe Oeffnung in die Harnröhre ergiessen, durch welche der Saame in dieselbe ausfliesst. Bestände der Nutzen der Saamenblasen hauptsächlich darin, dass sich in ihnen der Saame anhäufe, so wäre eine solche Bestimmung ganz zweckmässig. Denn es ist nicht wahrscheinlich, dass der Saame auch dann aus dem *Vas deferens* in grösserer Menge in die Saamenblasen gelangen könne, wenn diese beiden Organe sich, wie beim Rinde und manchen andern Säugethieren, getrennt in die Harnröhre öffnen.

Da nun aber die mit dem *Vas deferens* zusammenhängenden Saamenblasen des Menschen und des Pferdes den charakteristischen Bestandtheil des Saamens (die Saamenthierchen), auch zu der Zeit nur in sehr geringer Menge enthalten, wo er sich in sehr grosser Menge in dem *Vas deferens* findet, und da der Saame im Drüsenende des *Vas deferens* und in den Saamenblasen durch einen andern daselbst abgesonderten Saft sehr verdünnt wird, so ist es die Frage, ob auf die Vereinigung des *Vas deferens* und der Saamenblase ein so grosses Gewicht gelegt werden dürfe, um darnach allein zu bestimmen, ob ein Theil für eine Saamenblase zu halten sei oder nicht. Vereinigen sich diese Organe, so können sich der Saame und der eigenthümliche Saft der Saamenblasen schon vorher, ehe sie in die Harnröhre ergossen werden, vermengen, öffnen sie sich getrennt in die Harnröhre, so können sie sich vermengen, nachdem sie sich in die Harnröhre ergossen haben. In beiden Fällen kann der nämliche Zweck erreicht werden. Der *Succus pancreaticus* und die Galle sind auch bestimmt, sich zu vermengen. Gewöhnlich vereinigen sich die Ausführungsgänge der Leber und des Pancreas bei dem Menschen, und ergiessen ihre Säfte durch eine gemeinschaftliche Oeffnung, ausnahmsweise öffnen sie sich aber auch bei ihm getrennt, und es mengt sich ihr Saft, erst nachdem er in den Zwölffingerdarm ergossen worden.

Wir wollen hier drei Beispiele von Thieren anführen, bei welchen man zweifelhaft sein kann, ob man gewisse Organe für die Prostata oder für Saamenblasen zu halten habe.

---

1) Brugnone in Mém. de l'acad. roy. de sc. à Turin 1738. p. 629.

2) C. J. Lamperhoff de vesicularum seminalium quas vocant natura atque usu. Berolini 1835. 8.

Die Prostata, Saamenblasen und Cowper'schen Drüsen des Bibers.

In die Harnröhre des Bibers münden sich

1) in der Mittellinie, der den *Colliculus seminalis* bildende *Uterus masculinus*, Taf. VI. *u*;

2) daneben das Drüsenende des *Vas deferens DD*, nebst der Saamenblase *ss*;

3) viele von Joh. Müller entdeckte sehr einfache blasenartige Drüsen *p*, die zusammen die Prostata bilden;

4) die beiden Cowper'schen Drüsen *C*.

Dass das unpaare Organ *u*, welches in seiner Gestalt und Lage dem Uterus des weiblichen Geschlechts entspricht, wirklich für das Rudiment des Uterus zu halten sei, ist oben S. 382 bewiesen worden. Es ist derselbe Theil, der als ein einfaches, hohles, muskulöses Organ auch bei dem Kaninchen und Hasen vorhanden ist, und bei diesen Thieren von Brugnone, Lamperhoff und Anderen irriger Weise für eine Saamenblase gehalten worden ist, weil die *Vasa deferentia* in ihn einmünden. Auf der einen Seite schien mir auch bei dem Biber das Drüsenende des *Vas deferens* in den untersten Theil des *Uterus masculinus* einzumünden, doch bin ich dessen nicht gewiss; auf der andern dagegen sah ich, dass sich das Drüsenende des *Vas deferens* und die Saamenblase durch eine gemeinschaftliche Oeffnung in die Harnröhre neben dem *Colliculus seminalis* mündete, denn wenn ich in den einen oder in den andern dieser Theile Luft einblies, so kam dieselbe durch die nämliche Oeffnung in die Harnröhre. J. Hunter sagt von den Saamenblasen des Bibers: «ihre Gänge haben mit den Saamengängen keine Communication, aber beide öffnen sich am *Veru montanum*» (*Colliculus seminalis*).

Es scheint demnach, als ob diese Organe nicht immer auf dieselbe Weise in die Harnröhre übergingen. Der *Uterus masculinus* hat keine drüsigen Wände. Das Drüsende des *Vas deferens* dagegen ist mit Drüsenlappen besetzt, die selbst wieder aus kleinen Läppchen bestehen, welche bei einem jungen Biber 0,5 oder 0,13 Par. Lin. Durchmesser hatten und bisweilen flache Furchen zeigten, welche eine Eintheilung in noch kleinere Zellen andeuteten, von denen etwa 3 ein Läppchen ausmachten.

Die injicirte *Saamenblase* eines jungen Bibers hatte einen einzigen Ausführungsgang, der sich nach und nach in viele ziemlich lange geschlängelte Aeste theilte, die in noch kleinere Aestchen zerfielen, welche geschlossene Enden und hier und da knospenartige Auswüchse hatten. Nach dem geschlossenen Ende der Saamenblase zu waren die Zweige dünner als in der Nähe des Ausführungsganges Dieses Organ hatte daher gar keine Aehnlichkeit mit einer Prostata, sondern würde auch dann für eine Saamenblase zu halten sein, wenn es sich unmittelbar in die Harnröhre einmündete, ohne vorher mit dem *Vas deferens* in Verbindung zu treten, worüber ich bei diesem jungen Biber nicht ins Klare gekommen bin. Auf gleiche Weise war die Saamenblase eines alten brünstigen Bibers beschaffen, die auf der einen Seite sich mit dem Drüsenende des

Vas deferens vereinigte, ehe sie sich in die Harnröhre öffnete, dennoch aber gar keine Saamenthierchen enthielt, während der Saft des *Vas deferens* voll davon war und fast ganz daraus bestand. Siehe Taf. VI. *s.*, die linke Saamenblase.

Die *Prostata des Bibers* besteht, wie Joh. Müller[1]) zuerst gezeigt hat, aus vielen sehr grossen, einfachen Folliculis, deren oft mehrere sich zu einem Ausführungsgange vereinigen und dann in die Harnröhre einmünden. Eine Anzahl dieser Follikel ist Taf. VI. *pp* in natürlicher Grösse dargestellt. Müller hat die Prostata bei *Hystrix prehensilis* auf eine ähnliche Weise gebildet gefunden, und auch bei diesem, ausser solchen Follikeln, Saamenblasen gefunden.

Die Saamenblasen, Prostata und Cowper'schen Drüsen des Kaninchen.

Es ist schon oben erwähnt worden, dass es zweifelhaft ist, für was die Drüsenmassen zu halten sind, die den *Uterus masculinus* des Kaninchens umgeben. Ich habe die beiden längeren Drüsenmassen, von welchen auf Taf. V. Fig. 1. *s* die der einen Seite gezeichnet ist, einstweilen als Saamenblasen, die mittlere kleinere Masse als Prostata *p* bezeichnet, habe aber nichts dagegen einzuwenden, wenn man alle 3 Massen als Prostata ansieht. Indessen ist nicht zu leugnen, dass die dünnwandigen, verhältnissmässig weiten, nicht vielfach in Zweige getheilten, geschlängelten Canäle *s* Aehnlichkeit mit einer Saamenblase haben. Die Theile *cc* sind offenbar die Cowper'schen Drüsen.

Ueber das Verhalten der Organe, die bei dem Maulwurfe als Saamenblase und Prostata anzusehen sind, haben J. F. Meckel[2]) und Joh. Müller[3]), über die bei *Cricetus vulgaris, Dasiprocta Aguti, Cavia cobaya, Erinaceus europaeus* und *Mus rattus* hat Joh. Müller feine Zergliederungen ausgeführt, sowie auch über *Erinaceus europaeus* G. R. Treviranus[4]).

1) Joh. Müller de glandularum secernentium structura penitiori earumque prima formatione. Lipsiae 1840 Fol. p. 46. Tab. III. Fig. 1.

2) F. Meckel Beiträge zur vergleichenden Anatomie. Bd. I. Hft. 2. Leipzig 1809. 8. p. 132. Tab. VII. Fig. 25, 26, 27.

3) Joh. Müller a. a. O.

4) G. R. Treviranus Beobachtungen aus der Zootomie und Physiologie, nach dessen Tode herausgeg. von L. Ch. Treviranus. Heft. 1. Bremen 1839. 4. p. 120. Tab. XVII. und XVIII.

III.

ÜBER DIE SCHLAUCHARTIGEN DRÜSEN (GLANDULAE UTRICULARES) DES UTERUS DES MENSCHEN UND EINIGER SÄUGETHIERE.

Structur der Tunica decidua.

Die *hinfällige Haut, Tunica decidua,* nennt man diejenige Lage der innern Haut des menschlichen schwangern Uterus, welche sich bei der Geburt von derselben loslöst und theils verbunden mit den Eihäuten und dem Mutterkuchen abgeht, theils während des Lochienflusses abgestossen wird.

Viele Anatomen sind der Meinung gewesen, dass diese Membran, wie die beim Croup in der entzündeten Luftröhre sich bildende Haut, aus ausgeschwitzter gerinnbarer Lymphe bestehe, und weder Blutgefässe noch andere Organe besitze. Unter den Neuern sind noch Velpeau und Breschet dieser Meinung gewesen. Meine Untersuchungen haben das Gegentheil bewiesen. Nach der Conception wächst die Schleimhaut, in so weit sie den Grund und Körper des Uterus überzieht, in ihrer Dicke und wird zu einer sehr weichen, durch ihre Röthe sich auszeichnenden, anfangs an manchen Stellen 1 Par. Linie, an andern ½ oder ¼ Linie dicken Lage, die, wenn das Ei in den Uterus übergegangen ist, wohl 3 Linien und darüber misst. Dieses Wachsthum ist, wie aus der mikroskopischen Untersuchung der *Tunica decidua* hervorgeht, theils ein *inneres* Wachsthum der Schleimhaut, welches auf der Bildung neuer kernhaltiger Zellen, auf der weiteren Ausbreitung und Vergrösserung der Blutgefässnetze und auf der Vergrösserung der in der Schleimhaut des Uterus in grosser Menge liegenden schlauchartigen Uterindrüsen beruhet, theils ein *äusseres,* in der Entstehung neuer Zellen an der Oberfläche begründetes. Zur Erläuterung dieses Gegenstandes theile ich hier zuvörderst die von mir im Jahre 1829 gefertigten, aber noch nicht bekannt gemachten Abbildungen der *Tunica decidua* unverändert mit, deren Bau ich gemeinschaftlich mit meinem Bruder Eduard[1]) bei einem 22jährigen Mädchen untersuchte, von dem es sich mit grosser Wahrscheinlichkeit darthun liess, dass es sechs Tage und einige Stunden vorher, ehe es sich ins Wasser stürzte, concipirt hatte. Die näheren Umstände sind folgende: Das Mädchen war schon im 15ten und 20sten Jahre schwanger geworden und vor ihrem Tode mit Voranstalten zur Verheirathung mit ihrem letzten Schwängerer beschäftigt, der in einer 7 Stunden von Leipzig entfernten Stadt lebte. Am 29. September 1829 kam derselbe von dort nach Leipzig, um seine Braut zu besuchen, und war von 2 bis ungefähr um 9 Uhr bei ihr. Der Hausherr, welcher nicht wünschte, dass er auch des Nachts bei dem Mädchen bleiben möchte, untersuchte das Schlafgemach des Mädchens und fand

---

1) Siehe dessen Inauguraldisputation: Disquisitio anatomica uteri et ovariorum puellae septimo a conceptione die defunctae instituta a D. Eduardo Weber. Halis 1830. 8. in Commiss. Lipsiae apud L. Voss.

ihn hinter einer an der Wand aufgehangenen Decke versteckt. Er musste nun das Haus verlassen, das der Hausherr sogleich verschliessen liess, und am folgenden Tage reiste er nach der Stadt zurück, wo er zu Hause war. Das Mädchen aber, mit welchem die Herrschaft früher sehr zufrieden gewesen war, zeigte sich zerstreuet und unbrauchbar. Aus diesem Grunde wurde demselben am 5. October Abends ungefähr um 8 Uhr angekündigt, dass es den Dienst zu Weihnachten verlassen müsse. Das Mädchen vollendete seine häuslichen Geschäfte, bat dann um die Erlaubniss ausgehen zu dürfen, um sich einen Brief schreiben zu lassen, und stürzte sich, als ihm das abgeschlagen wurde, ungefähr Abends um 9 Uhr in den benachbarten Fluss, zu dem es, angeblich um Wasser zu holen, gegangen war. Der Leichnam wurde 15 Tage lang in einem Bleikasten in Eis conservirt und dann untersucht. Der Uterus und die Eierstöcke hatten sehr an Umfang zugenommen und waren, so wie die Trompeten und runden Mutterbänder, roth und vom Blute strotzend. Die Graaf'schen Follikel waren sehr vergrössert und bildeten auf der Oberfläche der Eierstöcke weiche, dunkelrothe Erhabenheiten. Zwar wurde auf der Mitte der oberen Oberfläche des linken Eierstocks eine Oeffnung gefunden, die $\frac{1}{2}$ Linie im Durchmesser hatte und zu einer mehr als erbsengrossen Höhle führte; aber der die Oeffnung umgebende Theil des Eierstocks war nicht roth und zeigte sich nicht in einem entzündeten Zustande. Es war deshalb wohl nicht anzunehmen, dass sich an dieser Stelle vor Kurzem ein Graaf'scher Follikel geöffnet habe. An der innern Spitze des rechten Eierstocks befand sich eine 3 Linien lange, 2 Linien breite Geschwulst von schwärzlichrother Farbe. Diese Farbe rührte von daselbst extravasirtem Blute her. Da aber diese Geschwulst keine Oeffnung hatte, so konnte man sie auch nicht für einen in der Bildung begriffenen gelben Körper halten. Da nun auch kein Körper in den Tuben oder im Uterus angetroffen wurde, der die Beschaffenheit eines regelmässig gebildeten Eies gehabt hätte, dennoch aber unzweifelhafte Merkmale der Schwangerschaft am Uterus vorhanden waren, so muss man annehmen, dass es zu dieser Zeit noch nicht zum Austritte des Eies aus den Ovarien gekommen sei, sondern nur eine Vorbereitung der Graaf'schen Follikel dazu stattgefunden habe. Zwar fand mein Bruder an der hinteren Wand des Uterus ein rundliches, durchscheinendes, perlfarbenes Körperchen, in welchem ein gelbliches Pünktchen sichtbar war, das man unter dem Mikroskope für ein durchsichtiges Bläschen halten konnte. Allein, da dieses Körperchen mit der Schleimhaut verwachsen und viel grösser war, als das Ei am Anfange des 7. Tages nach der Conception sein kann, und da sich nicht durch die Section darthun liess, dass es Flüssigkeit enthalte, so habe ich die Ueberzeugung, dass es kein Ei gewesen sei, und dass überhaupt in diesem Falle sich noch kein Graaf'scher Follikel geöffnet hatte.

Taf. VIII. Fig. 1. stellt also ein Stück der *Tunica decidua* dieses seit 6 Tagen und einigen Stunden geschwängerten Mädchens ein wenig vergrössert dar. So kurze Zeit nach der Befruchtung ist sie nur 1 Linie dick. Die freie, der Höhle des Uterus zugekehrte Oberfläche derselben ist bei *a* mit einer dünnen Oberhaut bedeckt, die durch die Berührung mit verdünntem Spiritus eine weisse Farbe angenommen hatte und sich sehr durch eine Menge kleiner Löcherchen auszeichnete, die ihr ein siebförmiges Ansehen gaben,

wie man auf Fig. 2. *a* noch deutlicher sieht, wo ein kleineres Stückchen dieser Haut etwas mehr vergrössert dargestellt worden ist. Unter dieser dünnen, im frischen Zustande durchsichtigen Oberhaut befindet sich eine ziemlich durchsichtige, viel dickere Lage, die aus unzähligen, senkrecht, bisweilen auch etwas schräg gegen diese Oberhaut hinlaufenden, gelblichen, geschlängelten hohlen Cylindern und aus einer weichen, durchsichtigen Materie besteht, welche die Zwischenräume zwischen den Cylindern vollkommen erfüllt. Da, wo bei *b* jene Oberhaut hinweggenommen ist, sieht man die Enden der Cylinder durchschimmern, und am Seitenrande des Stüchens *c* sieht man sie ihrer Länge nach, und eben so in Fig 3., wo sie noch stärker vergrössert sind.

Diese geschlängelten hohlen Cylinder, die wir damals für Zotten hielten, sind, wie ich später gefunden habe, *Drüsen,* die sich durch jene Löcherchen der Oberhaut in die Höhle des Uterus münden, und an ihrer andern, nach der fasrigen Substanz des Uterus hin gerichteten Seite mit einem angeschwollenen geschlossenen Ende, oder mit zwei oder mehreren solchen Enden aufhören.

Man sieht das Taf. VIII. Fig. 4. dargestellt. Es ist ein senkrechter Durchschnitt eines andern schwangeren Uterus in seiner Mittellinie, noch einmal so gross, als in der Natur gezeichnet. Auch bei der Section dieses Uterus gelang es nicht, das Ei im Uterus oder in den Tuben aufzufinden; *ed* ist die Dicke der fleischigen Wand des Uterus, die schon beträchtlich zugenommen hat, *da* die Dicke der Schleimhaut, die grösstentheils zur *Tunica decidua* wird. Die vordere und hintere Wand des Uterus berühren sich noch zu dieser Zeit, denn sie sind nur durch ein wenig Schleim von einander getrennt; *aa* sind die Mündungen der auf der innern Oberfläche des Uterus sich öffnenden schlauchartigen Uterindrüsen, *dd* ihre geschlossenen, angeschwollenen, geschlängelten Enden, welche mit der übrigen Substanz des Uterus so vollkommen verwachsen sind, dass man diese Lage nicht als eine auf der Oberfläche der Schleimhaut neugebildete Lage betrachten kann, sondern behaupten muss, dass sie die durch ein schnelles Wachsthum vergrösserte Schleimhaut selbst sei.

Taf. VIII. Fig. 5. zeigt solche schlauchartige Uterindrüsen 20 Mal im Durchmesser vergrössert. Die Buchstaben *a, c, d* bezeichnen dasselbe, was die nämlichen Buchstaben auf Fig. 4. Ich hatte nämlich Gelegenheit, den Uterus einer jungen Selbstmörderin im frischen Zustande zu untersuchen, bei welcher der linke Eierstock einen, wie es mir schien, kürzlich entstandenen gelben Körper enthielt. An dem Eingange in der linken Tuba, deren Fimbrien sehr roth waren, hieng eine kugelförmige, mit Gefässen versehene Blase, welche daselbst angewachsen war. Das Ei konnte nicht aufgefunden werden. Die Schleimhaut des Uterus, so weit sie den Fundus und den Körper desselben überzog, hatte sich in eine fast 3 Linien dicke, rothe, und sehr weiche Lage verwandelt. Der Uterus wurde senkrecht halbirt, und parallel der Schnittfläche mit einem scharfen Barbiermesser eine dünne Lamelle von der Wand des Uterus losgeschnitten, so jedoch, dass sie noch mit der Wand durch die innere weiche rothe Lage zusammenhing. Ohne das Messer zu gebrauchen, nur durch leises Ziehen wurde hierauf die Trennung der Lamelle auch in der weichen Lage vollendet, und die Lamelle zuletzt mit einer Scheere an der Ober-

fläche abgeschnitten und in Wasser oder Eiweiss ausgebreitet. An der der Höhle des Uterus zugekehrten Oberfläche *a* sieht man die Mündungen der schlauchartigen Uterindrüsen und durch die durchsichtige Substanz hindurch die mit diesen Mündungen versehenen Enden derselben durchschimmern ; *d* sind die geschlossenen, etwas dicken, einfachen oder mehrfachen Enden. In der Nähe derselben sind die Drüsenschläuche sehr geschlängelt, in der Nähe der offenen Enden dagegen sind sie es weniger. Bisweilen theilt sich ein Drüsenschlauch, wie bei *e*, in zwei Schläuche. Bei *f* sind die Drüsenschläuche und die sie untereinander verbindende durchsichtige Masse durch einen der Oberfläche parallel laufenden Schnitt, nahe an der Oberfläche, durchschnitten. An einer so abgeschnittenen, auf einen schwarzen Grund gelegten, durch unmittelbares Sonnenlicht beleuchteten Lamelle sieht man die Mündungen der schlauchartigen Uterindrüsen und ihre durchschimmernden Enden vorzüglich deutlich. Diese Enden sind aber hier der Uebersicht wegen auch da, wo die Drüsen nicht durchschnitten sind, eben so deutlich gezeichnet. Es reicht schon hin, mit einer scharfen Cooper'schen Scheere eine dünne Lamelle an der Oberfläche der frischen *Tunica decidua* abzuschneiden, auf einer Glasplatte in einem Tropfen Wasser oder Eiweiss auszubreiten, einem schwarzen Körper unterzulegen und die Lamelle mit unmittelbarem Sonnenlichte zu beleuchten, um bei einer schwachen Vergrösserung des Mikroskops die durchschimmernden sugespitzten Enden der Drüsenschläuche mit ihren Oeffnungen zu erkennen.

Die Drüsenschläuche waren beinahe 3 Linien lang und reichlich $^1/_{10}$ Linie dick, indessen gab es auch viel dünnere, die z. B. $^1/_{14}$ oder $^1/_{20}$ Linie im Durchmesser hatten. Ein Stück eines so dünnen Ganges von $^1/_{20}$ Linie Durchmesser sieht man Fig. 6., 200 Mal vergrössert, abgebildet. An so dünnen schlauchartigen Uterindrüsen kann man die Zellen, die ihre Wand bilden, am besten beobachten. Man bemerkt an diesem Schlauche sehr deutlich das Cylinderepithelium, welches die innerste Schicht seiner Wand bildet. Von der weiter nach aussen liegenden Lage seiner Wand sieht man entweder gar nichts oder nur hier und da eine längliche, an ihren Enden zugespitzte Zelle mit Nucleus (Faserzelle) und einige runde Zellen. In der Mittellinie des Schlauches sieht man gleichsam den Zellen des Cylinderepithelii auf den Kopf, an den Rändern des Schlauchs dagegen sieht man diese Zellen ziemlich in unverkürzter Länge. Die durchsichtige Substanz, welche die Zwischenräume zwischen den gelblichen Uterindrüsen ausfüllt, enthält auch Zellen von mannichfaltiger Form mit Zellenkernen, und der weissliche Saft, der sich aus den Uterindrüsen auspressen lässt, wenn man die Wand des Uterus drückt, enthält gleichfalls eine Menge Epitheliumzellen.

Die rothe Farbe, welche die *Tunica decidua* im frischen Zustande auszeichnet, rührt von dem in den Blutgefässnetzen stockenden, durchschimmernden Blute her. Man kann sie, ohne vorher eine Injection in die Blutgefässe zu machen, recht gut beobachten, wenn man mit dem Uterus kein Wasser in Berührung bringt, sondern die dünnen, herausgeschnittenen Lamellen mit Eiweiss bedeckt und so mikroskopisch untersucht. Auf diese Weise ist das Präparat dargestellt, welches Taf. VIII. Fig. 7. abgebildet und 20 Mal vergrössert ist. Man sieht hier, wie die Venen und gröberen Haargefässnetze an den Uterin-

52

drüsen liegen. Um sie von den Drüsenschläuchen unterscheiden zu können, sind die Gefässe durch Querlinien ausgezeichnet, die also keineswegs in der Natur zu sehen waren. Ausser den hier gezeichneten gröberen, zunächst mit den Venen zusammenhängenden, findet man hier und da auch noch dünnere Haargefässe mit Blut erfüllt, deren Durchmesser ungefähr $^1/_{104}$ Par. Linien beträgt. *aa* ist die der Höhle des Uterus zugekehrte Oberfläche der *Tunica decidua*, *cccc* sind die schlauchartigen, von Blutgefässen zum Theil bedeckten, abgeschnittenen Uterindrüsen. Nur an manchen Stellen der Decidua strotzten, wie hier, die Blutgefässe so vom Blute, dass man die kleineren Netze sehen konnte. Wenn die Gefässe weniger reichlich mit Blute erfüllt sind, sieht man nur einzelne Venen von grösserem Durchmesser zwischen ihnen liegen. Bei *d* sind kleinere Netze, welche nahe an der Oberfläche lagen, hervorgezogen worden und also nicht in ihrer ursprünglichen Lage. Dass die *Tunica decidua* mit Blutgefässen versehen ist, habe ich auch durch Injectionen dargethan.

Ueber die Entstehung der Tunica decidua reflexa.

Die Decidua des Menschen überzieht nach meinen Untersuchungen die innere Oberfläche des Uterus nicht glatt, sondern bildet, ehe noch das Ei im Uterus ankommt, eine Falte oder einige Falten. In einer solchen Falte findet man, wie ich selbst in 2 Fällen beobachtet habe, das Ei, sobald man es im Uterus wahrnimmt, aufgehangen. Niemals hat man das menschliche Ei in der Höhle des Uterus frei liegend gefunden. Dieses Factum ist unläugbar, aber noch nicht ganz erklärt. Als man noch glaubte, dass die *Tunica decidua* eine unorganisirte Haut sei, welche aus gerinnbarer, auf der inneren Oberfläche des Uterus abgesonderter Lymphe entstehe, nahm man entweder an, dass diese geronnene Lymphe nicht nur die innere Oberfläche des Uterus überziehe, sondern auch den Zugang aus den *Tubis Fallopianis* in den Uterus verschliesse, ehe das Ei im Uterus ankomme, und dass das an dem *Ostium uterinum tubae* angekommene Ei in dem Maasse, als es wachse und grösser werde, die geronnene Lage vor sich her dränge und vom Uterus ablöse, oder man vermuthete, dass die *Tubae Fallopii* durch jene gerinnbare Lymphe nicht verschlossen würden, und dass das äusserst kleine Ei, wenn es im Uterus ankomme, in der gerinnenden Masse einsinke und von ihr überschüttet und bedeckt werde. Das wachsende Ei dehne die dasselbe bedeckende Lage geronnener Lymphe aus, und so entstehe die in die Höhle des Uterus hineinragende Falte, in der das Ei gleichsam an der Wand des Uterus aufgehangen sei, die *Tunica decidua reflexa*. Seitdem man aber weiss, dass die *Tunica decidua uteri*, die durch ein rasches Wachsthum aufgeschwollene und veränderte Schleimhaut des Uterus sei, dass sie aus vielen tausenden schlauchartigen Uterindrüsen bestehe, zwischen welchen Blutgefässe sich verbreiten, stösst man, wenn man jene Annahme im Einzelnen erörtert, auf Schwierigkeiten.

Ich muss auf folgende Thatsachen aufmerksam machen, welche bei einer über die Entstehung der *Tunica decidua reflexa* zu gebenden Erklärung berücksichtigt werden müssen.

1) Die *Tunica decidua reflexa* wird, schon ehe das Ei im Uterus anlangt, dadurch zu dessen Aufnahme vorbereitet, dass die *Tunica decidua uteri* an gewissen Stellen mehr in die Dicke wächst als an andern, und sich dadurch faltet. An diesen Stellen werden die schlauchförmigen Uterindrüsen länger.

2) Die Falte, in welcher man später das Ei an der Wand des Uterus aufgehangen findet, geht oft nicht von dem Winkel aus, in welchem sich die Tuba in den Uterus mündet, sondern bildet sich oft mitten an der hinteren oder vorderen Wand des Uterus.

3) Die *Tunica decidua* hat bei sehr kleinen Eiern nicht nur an ihrem Rande, sondern auch nach der Mitte zu hier und da kleine Oeffnungen, die ich für die Oeffnungen von schlauchartigen Uterindrüsen halte. Dieser Punkt ist sehr wichtig. Fände nämlich auf der inneren Oberfläche des Uterus die Absonderung einer gerinnbaren Lymphe statt, sänke das im Uterus angelangte Ei in diese Lymphe ein, oder würde es damit gleichsam überschüttet, und entstände nun die *Tunica decidua reflexa* dadurch, dass das wachsende Ei den von der geronnenen Lymphe herrührenden Ueberzug ausdehnte, so könnte die *Tunica decidua reflexa* keine solchen Löcherchen besitzen. An einer *Tunica decidua reflexa* eines etwa drei bis vier Monate schwangeren Uterus, den ich im frischen Zustande untersuchte, konnte ich in der That keine solchen Oeffnungen wahrnehmen, wohl aber an einem andern Uterus, der im Anfange des dritten Monats der Schwangerschaft stand, und den ich untersuchte, nachdem er schon einige Zeit in Spiritus gelegen hatte, denn der Spiritus macht bekanntlich solche Oeffnungen deutlicher. Auch Sharpey hat, wie wir weiter unten sehen werden, Uterindrüsenöffnungen an der *Tunica decidua reflexa* beobachtet; indessen behauptet er, dass sie nur in der Nähe der Grenze vorkämen, durch welche die *Tunica decidua reflexa* in die *Tunica decidua uteri* übergeht. Ich kann dem nicht ganz beistimmen. Ich finde, wie gesagt, dass die Oeffnungen dieser Drüsen auf der *Tunica decidua reflexa* in geringerer Zahl existiren, und dass sie überhaupt nicht so deutlich sind, als auf der *Tunica decidua uteri*, aber ich finde sie auch mitten auf der Membran. Ist meine Beobachtung richtig, so folgt daraus, dass die *Tunica decidua reflexa wirklich eine losgelöste Schicht der Tunica decidua uteri ist.* Die Loslösung derselben kann aber entweder dadurch erfolgen, dass das äusserst kleine Ei, *nachdem es in den Uterus gekommen,* in die weiche Decidua einsinkt und ringsum von ihr überwachsen wird, was Sharpey für wahrscheinlich hält (siehe Taf. IX. Fig. 10.), oder dadurch, dass, *indem das Ei in dem Uterus eintritt,* sich durch einen organischen Process eine oberflächliche Lage von der *Tunica decidua* loslöst und die *Tunica decidua reflexa* bildet, was ungeachtet der Organisation der *Tunica decidua uteri* wohl möglich ist. Sehen wir doch, dass bei der Geburt eine dickere Lage derselben zugleich mit dem Mutterkuchen und den Eihäuten abgeht, und zu dieser Ablösung vorher besonders vorbereitet wird. Die eine Annahme erinnert uns an die Art und Weise, wie die Eier auf dem Rücken der *Pipa dorsigera* von der Haut überwachsen und eingeschlossen, die andere an die Wirkung einer spanischen Fliege oder einer Verbrennung, wenn sich die Oberhaut von der Haut trennt und durch abgesondertes Serum über sie erhebt. Sowie hierbei alle

die zahlreichen Drüsenschläuche der Schweissdrüsen ausgedehnt, und endlich durchrissen werden, so könnte auch in der Schleimhaut des Uterus durch eine an gewissen Orten stattfindende Gefässthätigkeit, vermöge deren Serum secernirt würde, eine Lage der Decidua losgelöst und emporgehoben werden. Die überaus enge Oeffnung für den Eintritt der Tuba, die ich in einem Falle bei einer beginnenden Schwangerschaft nur ungefähr $1/3$ Linie gross gefunden habe, kann durch vorspringende Fältchen zugedrückt werden, oder auch in ganz kurzer Zeit verwachsen; es wäre sogar zu verwundern, wenn sie nicht zugedrückt würde oder verwüchse, während sich die Schleimhaut in dieser Gegend durch Wachsthum ausdehnt und dicker wird.

Mag nun die Oeffnung der Tuba in den Uterus nur verstopft oder zugedrückt werden, oder mag sie wirklich verwachsen, so kann jedenfalls das Secret der Tuba und des darin enthaltenen äusserst kleinen Eichen gegen den die Mündung der Tuba verschliessenden Theil der Decidua gedrängt werden, und gar leicht bewirken, dass die schon vorher zur Ablösung vorbereitete Schicht der Decidua sich wirklich löst und vorwärts gedrängt wird, und so dem Secrete der Tuba und dem Eichen der Weg zu derjenigen Falte der Decidua gebahnt wird, die sich zur Aufnahme des Eies an der vorderen oder hinteren Wand des Uterus schon vorher, ehe das Ei in den Uterus eintrat, durch Wachsthum und Resorption gebildet hatte. Ich habe in den zwei Fällen, wo ich ein kleines Ei im Uterus beobachtete, die *Decidua reflexa* nicht dünn und gespannt gefunden, wie sie gewesen sein würde, wenn das bei seinem Eintritte äusserst kleine Ei von Lymphe umgeben worden wäre, und nachher diese Lymphe bei seinem Wachsthume ausgedehnt hätte, sondern ich habe gefunden, dass die *Tunica decidua* eine ziemlich dicke, schlaffe, nicht gespannte, in die Höhle des Uterus hineinragende Falte ist, in der das kleine Ei ganz locker liegt. Wäre der Vorgang ein solcher, wie ich ihn hier darstelle, so würde die abgelöste Schicht der *Tunica decidua* durch das wachsende Ei allmählig ausgefüllt und noch mehr ausgedehnt werden. Dabei würden viele von den Oeffnungen der durchrissenen Uterindrüsen unwahrnehmbar werden, und alle würden weiter auseinander rücken. Nehmen wir nun an, dass sich nicht die ganze Decidua, sondern nur eine Schicht derselben loslöst und die *Decidua reflexa* bildet, so darf der Theil des Uterus, wo sich die *Tunica decidua reflexa* eingestülpt hat, zu keiner Zeit seiner Decidua beraubt sein. In der That beruht die Behauptung von Bojanus, dass hier der Uterus eine neue *Tunica decidua* reproducire, die er *Tunica decidua serotina* nennt, nicht auf der Beobachtung, dass an dem Theile des Uterus, wo sich die *Tunica decidua reflexa* eingestülpt hat, die Decidua wirklich gefehlt habe, sondern umgekehrt darauf, dass sie daselbst nicht gefehlt hat, während man, wiewohl irriger Weise, glaubte, dass sie fehlen sollte.

Nutzen der schlauchartigen Uterindrüsen bei der Bildung der Decidua.

Da die *Placenta uterina* bei dem Menschen und bei den Säugethieren dadurch gebildet wird, dass die ästigen Zotten des Chorion, als die Träger der Gefässnetze des Embryo, mit den in der *Tunica decidua* wachsenden Blutgefässen der Mutter in eine vielfache Berührung kommen, so lag, nachdem die schlauchartigen Uterindrüsen aufgefunden worden waren, der Gedanke ganz nahe, dass die Zotten des Chorion in die Canäle der schlauchartigen Uterindrüsen hineinwüchsen, sie auffüllten und so an vielen Stellen in die *Tunica decidua* eindrängen und dieselbe gleichsam durchdrängen. Denn da die schlauchartigen Uterindrüsen die Träger der Blutgefässnetze der Mutter sind, die Zotten des Chorion aber, wie wir gesehen haben, die Träger der Blutgefässnetze des Embryo, so würde eine sehr innige Berührung beider entstehen, wenn die Zotten des Chorion in den Canälen der schlauchartigen Uterindrüsen steckten und von ihnen wie von Scheiden umgeben würden.

Man wusste in der That schon lange, dass die am einfachsten gebildeten Placenten der Thiere so eingerichtet sind. Man wusste, dass jeder Cotyledon, d. h. jede einzelne Placenta der wiederkauenden Thiere aus einem embryonischen Theile besteht, der einige Aehnlichkeit mit den ästigen Zotten des Chorion hat, die die menschliche Placenta bilden helfen, und aus einem mütterlichen Theile der aus ästigen, in die Substanz des Uterus eindringenden Canälen besteht, die der Sitz einer Secretion sind und mit geschlossenen Enden aufhören. Wo wir nun auf einer Schleimhaut ästige, mit geschlossenen Enden versehene Canäle sich münden sehen, die der Sitz einer Secretion sind, da nennen wir diese Canäle Drüsen, und so wurde auch seit sehr langer Zeit die *Pars uterina* der Placenta oder, was dasselbe ist, des Cotyledon bei den wiederkäuenden Thieren genannt, denn bei Fabricius ab Aquapendente, Harvey und Hoboken heissen die Cotyledonen Glandulae. Es galt also schon damals die Lehre, dass der Uterus der wiederkäuenden Thiere mit Drüsen versehen, und dass die an gewissen Stellen des Eies reichlich hervorwachsenden Zotten des Chorions in die Gänge jener Drüsen hineinwüchsen, sie ausfüllten, und mit dem von den Drüsengängen abgesonderten Safte in Berührung kämen, um ihn einzusaugen.

Verbindung von Mutter und Frucht mittelst der Uterindrüsen bei Hunden und Katzen.

Das Verdienst, diese Lehre auf Thiere, die nicht zu den wiederkäuenden gehören, angewendet zu haben, gebührt Sharpey.

Aus seinen Untersuchungen, die Bischoff und ich bestätigt haben, geht hervor, dass die Schleimhaut des Uterus des Hundes (nach meinen Beobachtungen auch die der Katze) zweierlei Drüsen besitzt, die sich im Zustande der Trächtigkeit sehr vergrössern. Beide habe ich auf Taf. IX. Fig. 1. funfzig Mal vergrössert abgebildet, die einfachen bei *aa*, die ästigen Drüsen bei *bb'*. In

einem kleineren Massstabe dargestellt, sieht man sie in den von Sharpey gegebenen Abbildungen, die hier copirt worden sind, Fig. 5. *aaa* und *bbb*. Auf der innern Oberfläche des Uterus münden sie sich mit unzähligen Oeffnungen, die so dicht liegen, dass diese Oberfläche wie ein Sieb durchbrochen ist. Auf Taf. IX. Fig. 11. sind diese Oeffnungen von mir 50 Mal vergrössert abgebildet, in Fig. 4. sieht man sie nach Sharpy's Abbildungen. Sie vergrössern sich später, während zugleich auch die Zwischenräume zwischen ihnen an Grösse zu nehmen (Fig. 12). Auch die ästigen Drüsen erweitern und vergrössern sich an gewissen Theilen ihres Stammes, nämlich an dem Theile, welcher nicht weit von der Oeffnung entfernt ist. Sharpey's ideale Figuren, Fig. 7., 8. und 9., geben davon eine Vorstellung. Die wachsenden Zotten des Chorion dringen in die Oeffnungen der Drüsencanäle ein und lassen sich, wenn man das Chorion von dem Uterus zu trennen sucht, wieder aus ihnen herausziehen (siehe Fig. 7., 8. und 9.), wo man nach Sharpey bei *b* die erweiterten Stämme der Uterindrüsen, bei *cc* die ihnen entsprechenden, aus ihnen herausgezogenen Zotten des Chorion sieht. Die erweiterten Theile der Uterindrüsen werden nun noch grösser, stossen aneinander, platten sich dadurch gegenseitig aneinander ab und bilden eine Lage unregelmässiger polyedrischer, in Falten gelegter Zellen, die Sharpey auf Fig. 6. im senkrechten, auf Fig. 2. im horizontalen Duchschnitte dargestellt hat. Die eingedrungenen Zotten des Chorion dehnen sich auch aus und schmiegen sich an die innere Oberfläche jener Zellen an. Anfangs behält ein Theil des Stammes der Uterindrüse seine ursprüngliche Gestalt. Später werden die Zellen, die durch die Ausdehnung des Drüsenstammes entstehen, so gross, und sie verwachsen so untereinander, dass man die Uterindrüsen gar nicht mehr einzeln unterscheiden kann. Man nimmt dann, wie ich selbst bezeugen kann, eine Lage grosser unter einander verwachsener Zellen wahr, an welchen man hier und da einen Ast einer Uterindrüse als einen Anhang sieht, der aus einem geschlängelten Canale mit seinen geschlossenen Enden besteht.

Bei den wiederkäuenden Thieren verwachsen die in die Uterindrüsen eingedrungenen Zotten des Chorion nicht mit der innern Oberfläche der Drüsengänge. Spritzte ich einen in einer wässerigen Feuchtigkeit fein vertheilten Färbestoff in die Umbilicalgefässe oder in die Uteringefässe der trächtigen Kuh, so schwitzte eine so grosse Menge Wasser auf der Oberfläche der Zotten des Chorion, oder auf der inneren Oberfläche der Uterindrüsen aus, dass sich der embryonische Theil der Cotyledonen von selbst von dem Uterintheile vollständig trennte, ohne dass irgend eine Verletzung desselben statt fand. Beide liessen sich gar nicht in der Lage, wo sie in einander eingefügt sind, erhalten. Die innere Oberfläche der Uterindrüsengänge und die Oberfläche der in sie eingefügten Zotten des Chorion verhalten sich demnach wie freie absondernde Oberflächen, denn auf allen freien absondernden Oberflächen dringt die wässerige Feuchtigkeit, ohne dass eine Zerreissung der Blutgefässe stattfindet, in grosser Menge hervor, wenn man sie in die Blutgefässe derselben spritzt.

Ganz anders verhält sichs mit der ausgebildeten Placenta der Hunde. Hier *verwachsen* die Zotten des Chorion mit den Uterindrüsen in die sie einge-

drungen sind, so vollkommen, dass zwischen diesen Theilen bei jenem Versuche keine Feuchtigkeit austritt, und dass sich also auch die Zotten nirgends von den Canälen der Uterindrüsen trennen lassen. Es können demnach daselbst nicht 2 freie absondernde Oberflächen einander gegenüber liegen. Was daher die von Sharpey aufgeworfene Frage betrifft, ob vielleicht die Placenta bei allen Säugethieren so eingerichtet sei, dass die von den Uterindrüsen sbgesonderte Materie in die Nähe der Blutgefässe des Fötus gebracht würde und so zu seiner Ernährung diente, so habe ich darüber Folgendes zu sagen.

Es findet in dieser Hinsicht ein grosser Unterschied zwischen den Thieren statt, bei welchen die *Placenta uterina* verwachsen, und denen, wo sie es nicht ist Bei den wiederkäuenden Thieren besitzen nach meinen Untersuchungen die Gänge der vergrösserten Uterindrüsen, welche die Cotyledonen bilden helfen, ein dichtes Haargefässnetz, dessen Canäle nur ein wenig dicker sind als die ihnen gegenüberliegenden embryonischen Haargefässe, welche die in die Drüsengänge eingedrungenen Zotten des Chorion mit einem gleichfalls sehr dichten Netze überziehen. Hier haben daher beide Haargefässnetze, das mütterliche und das embryonische, eine solche Einrichtung, wie es bei Absonderungsorganen der Fall zu sein pflegt. In der ausgebildeten Placenta der Hunde dagegen sind die mütterlichen Haargefässe ganz anders ausgebildet, als die Haargefässe absondernder Organe und als die embryonischen Haargefässe. Sie sind viel dicker. Ihr Durchmesser beträgt ungefähr 0,916 = $^1/_{62}$ Par. Lin. Die meisten haben daher ungefähr einen dreimal so grossen Durchmesser, als die embryonischen Haargefässe, die etwa einen Durchmesser von 0,0057 = $^1/_{173}$ Par Lin. haben, und bilden ein gröberes Netz. Die Falten, in welche sich die Zotten des Chorion ausgebreitet haben, und welche ein continuirliches, dichtes Netz der embryonischen Blutgefässe tragen, umhüllen jene dicken, das Mutterblut führenden Haargefässe so, dass dieselben wie die dicken Gedärme in der Bauchhaut eingehüllt liegen und fast ringsum von den embryonischen Haargefässnetzen wie umsponnen sind. Die Höhlen der Uterindrüsen oder die Zellen, in die sie sich umwandeln, sieht man nirgends mehr. Sind die Mutterblut führenden Haargefässe roth, die Embryoblut führenden weiss injicirt, so sieht man auf einem senkrechten, von der Embryonalfläche zur Uterinfläche der Placenta gemachten Durchschnitte, abwechselnde rothe und weisse Streifen, die so in einander geschoben sind, wie man die Finger beider Hände in einander schieben kann. Die die Mutterblutgefässe enthaltenden rothen Hauptstreifen fangen auf der Uterinseite der Placenta dick an und theilen sich nach der Embryonalseite zu in viele und dünne Streifen, die sich überall in einzelne sehr dicke, geschlängelte, durch Zwischenräume von einander getrennte und untereinander communicirende Haargefässschleifen auflösen. In die Zwischenräume zwischen diese Haargefässe dringen überall häutige Zipfel und Falten ein, welche ein dichtes äusserst enges Netz embryonischer Blutgefässe tragen. Diese Häute, Zipfel und Falten der Chorionzotten gehen von der Embryonalseite der Placenta aus und schmiegen sich an die sehr dicken geschlängelten Muttergefässe so an, dass diese von ihnen fast ringsum überzogen werden. Das das Mutterblut führende Haargefässnetz hat nicht überall eine deutliche membranöse Grundlage, die die Zwischenräume dieses Netzes ausfüllte. Denn die Falten und

Zipfel, welche die embryonischen Gefässnetze tragen, dringen in die Zwischenräume jenes sehr dicken, Mutterblut führenden Haargefässnetzes ein und bewirken dadurch, dass jedes Haargefäss einzeln fast von allen Seiten umhüllt wird, ungefähr so, wie, wenn man ein Tuch zwischen die Finger der andern Hand schiebt, jeder einzelne Finger fast ringsum von dem Tuche umgeben und eingehüllt werden kann. Die Wände der Uterindrüsen sind mit jenen Falten verwachsen und geschwunden. Aus diesem Baue, von dem sich ein Jeder, der die Präparate bei mir betrachten will, überzeugen kann, geht hervor, dass die Uterindrüsen in der ausgebildeten Placenta unsichtbar werden, dass aber die Blutgefässe übrig bleiben, die zwischen ihnen lagen. Diese Beobachtungen habe ich gemeinschaftlich mit meinem Bruder Eduard an der Placenta eines Hundes gemacht, die von ihm so vollkommen injicirt worden war, dass die capillaren Muttergefässe ebensowohl als die embryonischen erfüllt waren. Ich werde hierauf zurückkommen und diesen Bau der Placenta der Hunde durch Abbildungen erläutern, wenn ich meine Schrift über die Placenta herausgebe, an der ich seit dem Jahre 1830 arbeite.

Die Art und Weise, wie in der ausgebildeten Placenta des Hundes ein Umtausch von Stoffen zwischen dem mütterlichen und embryonischen Blute möglich gemacht ist, hat einige Aehnlichkeit mit der Weise, wie in den Lungen, ein Umtausch von Stoffen zwischen der geathmeten Luft und dem Blute statt findet. Die Luftröhrenäste der Lungen sind mit Luft erfüllte, von Haargefässnetzen umsponnene Canäle. Durch die innige Berührung, in welcher sich die mit Blut erfüllten Haargefässe mit den mit Luft erfüllten Canälen befinden, geschieht es, dass das vorbeiströmende Blut Luft aus den Luftcanälen, und umgekehrt die Luft der Luftröhren Dämpfe und Luft aus den Blutcanälen an sich zieht, so dass zwischen diesen beiden Arten von Flüssigkeiten ein durch unsichtbare Poren vermittelter Austausch von Stoffen statt findet. Auch in der abgebildeten Placenta des Hundes kommen zwei Arten von Flüssigkeit in eine ähnliche mittelbare Berührung, vermöge deren ein wechselseitiger Austausch von Stoffen geschieht. Die *weiten* mit *Mutterblut* erfüllten Canäle der Placenta des Hundes sind von *dichten Netzen enger Haargefässe umsponnen,* in welchen das *embryonische* Blut an ihm vorbeiströmt. Man kann daher die Mutterblut führenden Gefässe der Placenta des Hundes mit den Luftröhren der Lungen, und die das Embryoblut führenden engen Haargefässe der Placenta mit den Haargefässnetzen der Lungenarterie und der Lungenvene vergleichen. Da die das Mutterblut führenden Gefässe ausserordentlich dünne Wände haben, und die embryonischen Haargefässe auch nur von dünnen Häuten bedeckt sind und in der innigsten Berührung mit ihnen stehen, so ist es möglich, dass die beiden Arten von Blut durch die dünnen thierischen Häute hindurch auf einander wechselseitig einwirken.

Ich behaupte übrigens keineswegs, dass die Uterindrüsen so verschwänden, dass gar nichts von ihnen übrig bliebe, vielmehr glaube ich, dass nur der Theil der Stämme der Uterindrüsen schwindet, der sich früher in grosse Zellen umgewandelt hatte, und dass die geschlossenen Enden derselben fortexistiren. Ist dieses der Fall, so darf man nicht annehmen, dass *nur* auf die von mir soeben angegebene Weise ein Austausch von Stoffen zwischen dem

Mutterblute und Embryoblute vermittelt werde, sondern darf vermuthen, dass die Endzweige der schlauchartigen Uterindrüsen, so weit sie in der ausgebildeten Placenta fortbestehen, einen Saft absondern, der mit den gefässreichen Theilen der Chorionzotten in Berührung kommt, und zum Theil resorbirt werden kann.

Verbindung von Mutter und Frucht mittelst der Uterindrüsen bei dem Menschen.

Die Uterindrüsen verhalten sich bei dem Menschen zu der Zeit, wo das Ei in den Uterus kommt, und wo eine Verbindung von Mutter und Frucht zu Stande kommen soll, ganz anders als bei Hunden und Katzen. Es löst sich, wie wir gesehen haben, bei dem Menschen von der *Tunica decidua* an einer begrenzten Stelle des Uterus eine Lage los, die wir als eine dicke Oberhaut derselben betrachten können, und bildet die *Tunica decidua reflexa*, in welcher das Ei wie in einem in die Höhle des Uterus hineinhängenden Beutel an der Wand des Uterus aufgehangen ist. Eine Loslösung einer solchen Lage findet bei Hunden und Katzen nicht statt. Nur der Mensch hat eine *Tunica decidua reflexa*. Die Loslösung dieser Lage kann indessen nicht hindern, dass die Zotten des Chorion in die Oeffnungen der Uterindrüsen hineinwachsen könnten, welche sich an eben der Oberfläche befinden, von welcher sich jene Lamelle losgelöst hat. Ich habe es zwar bis jetzt noch nicht gesehen, dass die Zotten des Chorion bei dem Menschen in jene Oeffnungen eindringen, halte es aber für möglich. Aber so viel ist gewiss, dass ich bei einem menschlichen Uterus in der 8ten oder 10ten Woche der Schwangerschaft, keine solchen Erweiterungen der Stämme der Uterindrüsen wie beim Hunde, wenn der Embryo desselben ungefähr eine gleiche Grösse erlangt hat, gefunden habe. Dass ferner beim Menschen zu jener Zeit keine feste Verbindung der Zotten des Chorion mit dem Uterus stattfindet, sondern dass die schon sehr ausgebildeten, in Aeste, Aestchen und Reiserchen getheilten Zotten des Chorion frei und locker da liegen und sich noch nicht in die Canäle der Uterindrüsen eingefügt haben, und dass endlich in der Decidua des Uterus zahlreiche Arterienschleifen sichtbar werden, welche aus einer vielfach hin- und hergewundenen und geschlängelten Arterie bestehen und dadurch Gefässknäule bilden. Sie sind der Anfang der colossalen, Mutterblut führenden Haargefässe, welche ausser den Zotten den 2ten Haupttheil der ausgebildeten Placenta des Menschen ausmachen. Diese Blutgefässknäuel sind eine Bildung eigenthümlicher Art, und finden sich auch an der ausgebildeten Placenta an derjenigen Oberfläche derselben in grosser Zahl, welche am Uterus angewachsen ist. Denn jede aus dem Uterus in die Placenta übergehende Arterie bildet einen solchen Knäuel. Nehme ich alles dieses zusammen und erwäge zugleich, dass die Uterindrüsen des Menschen nicht ästig, wie die langen Uterindrüsen des Hundes, sondern meistens einfach sind und erst an ihren Enden in einige Endbläschen getheilt werden, und dass also ihre Gestalt zu der der vielfach in Zweige getheilten Zotten des Chorion nicht passt, so ist es mir sehr zweifelhaft, ob die Zotten des menschlichen Chorion in die Canäle der Uterindrüsen hineinwachsen. Sollte dieses nun aber

auch mit ihren Endzweigen der Fall sein, so ist doch gewiss der Zustand, wo sie frei in den Uterindrüsen eingeschlossen und mit der Wand derselben noch nicht verwachsen sind, nur ein vorübergehender.

Schon bei den Hunden verwachsen, wie wir gesehen haben, die Uterindrüsen mit den in sie eingedrungenen gefässreichen Falten der Chorionzotten und bilden einen dünnen fast verschwindenden Ueberzug über dieselben. Von den verwachsenen Häuten werden die Mutterblut führenden Haargefässe einzeln eingewickelt. Bei dem Menschen sind die Mutterblut führenden Gefässe, die den Uebergang aus den in die Placenta dringenden Uterinarterien zu den in den Uterus zurückkehrenden Venen bilden, noch weit grösser als beim Hunde. Während jene Gefässe bei dem Hunde da wo sie am engsten sind ungefähr $^1/_{62}$ Par Linie im Durchmesser haben, beträgt ihr Durchmesser beim Menschen ungefähr $^1/_4$ Linie und mehr. Nach meinen Beobachtungen wachsen jene colossalen Haargefässschleifen zwischen die Reiser und Zweige der Zotten des Chorion hinein, schmiegen sich an alle Unebenheiten derselben an und wickeln sie und ihre knospenartigen Vorsprünge ein, die daher in die Höhle dieser verhältnissmässig weiten und äusserst dünnwandigen Blutgefässe hineinragen, indem sie die Falten dieser Gefässe ausfüllen. Bei den Hunden und dem Menschen besteht die ausgebildete Placenta aus 2 Bestandtheilen, aus den die embryonischen engen Haargefässnetze tragenden Chorionzotten und aus sehr grossen Mutterblut führenden Gefässen. Bei den Hunden werden die das Mutterblut führenden Haargefässe in den Falten der Chorionzotten eingewickelt, bei dem Menschen dagegen werden die Chorionzotten von den sich an sie anschmiegenden und faltenden colossalen Haargefässen eingewickelt. In beiden Fällen werden die embryonischen Blutströmchen in so langen Strecken und so dicht an den Strömen des Mutterbluts hin- und hergeleitet, dass beide Classen von Strömen, ohne sich zu vermengen und in einander überzufliessen, wechselseitig Materien austauschen können.

Die von mir in der Placenta des Hundes und des Menschen gefundene höchst eigenthümliche Bildung *colossaler* Haargefässe kommt, wie ich bemerkt zu haben glaube, auch in den zu Folge von Entzündung entstandenen *Membranis spariis* vor, wenn sich in ihnen neue Gefässe bilden.

Haben die schlauchartigen Uterindrüsen des Menschen einen Nutzen bei der Menstruation?

Darüber, wie sich die schlauchartigen Uterindrüsen zur Zeit der Menstruation verhalten, und ob sie da eine Flüssigkeit absondern, fehlt es noch an Beobachtungen. Zu einer Zeit, wo ich diese Drüsen noch nicht kannte, habe ich Gelegenheit gehabt, den Uterus eines Frauenzimmers zu zergliedern und mit dem Mikroskope zu untersuchen, das zur Zeit des Todes die Menstruation gehabt zu haben schien. An der Wand des Uterus fanden sich Stellen, die sich durch ihre sehr rothe Farbe auszeichneten. An einigen war die innere Haut des Uterus mit einer dünnen Lage *geronnenen* Blutes bedeckt, welche in grosser Menge Blutkörperchen enthielt, die das gewöhnliche Ansehen hatten. Die Röthe der innern Haut des Uterus rührte von einer sehr starken

Anfüllung und theilweisen Ausdehnung der Haargefässe her. Es wurden dünne Lamellen herausgeschnitten und mit Eiweiss bedeckt, und so unter dem Mikroskope untersucht. Man sah, dass viele von den Schleifen der Haargefässe, die dicht an der innern Oberfläche des Uterus lagen, stellenweise sehr erweitert und hin und wieder unregelmässig und sackförmig ausgedehnt und daselbst übermässig mit Blut erfüllt waren. Da sich die geringe Menge Blut, welche die innere Haut des Uterus an manchen Orten bedeckte und ihr anhing, in einem geronnenen Zustande befand, so scheint die Ansicht derjenigen Physiologen in Zweifel gezogen werden zu können, welche, wie Lavagna, glauben, dass dem Menstruationsblute der Faserstoff fehle und dass es deswegen unfähig sei zu gerinnen. Vielmehr scheint es in den kleinen Quantitäten, in welchen es auf der innern Oberfläche des Uterus hervortritt, allerdings zu gerinnen, dann aber durch die übrige abgesonderte Feuchtigkeit verdünnt und fortgespühlt zu werden. Ein solches Blut kann natürlich nicht zum zweiten Male gerinnen. Das aus der Scheide abfliessende Menstruationsblut muss demnach von dem soeben aus der Wand des Uterus hervortretenden Menstruationsblute unterschieden werden. Da dieses fähig ist zu gerinnen und sich auch durch das Ansehen seiner Blutkörperchen von andern Blute nicht unterscheidet, so halte ich es für wahrscheinlich, dass es aus den unregelmässig sackförmig ausgedehnten Theilen der Haargefässe der innern Haut des Uterus herrühre, welche sich unstreitig öffnen oder bei ihrer grossen Ausdehnung Blut durchlassen.

Geschichtliche Bemerkungen die Uterindrüsen betreffend.

Erste Arbeiten über die Uterindrüsen.

Als mein Bruder und ich im Jahre 1829 den schwangern Uterus eines Mädchens untersuchten, von welchem es sich mit grosser Wahrscheinlichkeit darthun liess, dass es 6 Tage und einige Stunden vor seinem Tode concipirt habe [1]) und ich die Taf. VIII. Fig. 1—3. mitgetheilten Abbildungen machte, nannten wir dieselben Theile, die ich später als Uterindrüsen erkannt habe, *Zotten der Decidua.* Wir kannten damals die geschlossenen angeschwollenen Enden dieser fadenartigen Canäle noch nicht und kamen daher nicht auf den Gedanken, sie für Drüsen zu halten. Diese Enden zu finden, gelang mir erst einige Jahre später und zwar an den Uterindrüsen der wiederkäuenden Thiere und Kaninchen. Zwar hatte schon Malpighi [2]) 150 Jahre früher bei Kühen Theile gesehen, die er *Corpora vasorum speciem habentia* und *Excretoria vasa* nannte. Da er aber selbst sagt, dass es ihm nicht gelungen sei, Drüsenenden an denselben zu entdecken, so nahm keiner der nachfolgenden Anatomen auf Malpighi's Bemerkung Rücksicht, zumal da Malpighi auch in der grauen Substanz des Gehirns und an manchen andern Orten Drüsen gefunden zu haben glaubte, wo sie sich nicht bestätigt haben. Auch der um die Entwickelungsgeschichte der Thiere hochverdiente v. Bär [3]) sah die nämlichen Theile beim Schweine

1) Disquisitio anatomica uteri et ovariorum puellae septimo a conceptione die defunctae instituta a D. Eduardo Weber. Halis 1830, in Commiss. Lipsiae apud L. Voss.
2) M. Malpighii Diss. epistolica ad Sponium. Opp. Lugd. Batav. 1687. p. 220.
3) v. Bär Untersuchungen über die Gefässverbindung zwischen Mutter und Frucht in den Säugethieren. Leipzig 1828. Fol. p. 12.

und bei der Kuh, hielt sie aber für Lymphgefässe, welche sich mit offenen, dem unbewaffnetem Auge sichtbaren Mündungen auf der innern Oberfläche des Uterus öffneten und Säfte daselbst zu resorbiren bestimmt wären.

Beschreibung der Uterindrüsen bei der Kuh und bei dem Rehe.

Bekanntlich haben die wiederkäuenden Thiere nicht, wie der Mensch, einen Mutterkuchen, sondern viele kleine Mutterkuchen, die Kuh bis auf 60 und mehr, das Reh nur 5. Ueber den Bau dieser Mutterkuchen drückte ich mich in Hildebrandt's Anatomie [1]) so aus: «Jeder ist aus einer dem Eie und aus einer dem Uterus angehörigen Hälfte gebildet. Die dem Eie angehörige Hälfte besteht aus sehr dicht gedrängten und vielfach verzweigten Zotten des Chorion. Der mütterliche Theil ist eine viel grössere Erhabenheit, welche eben so viele und vielfach verzweigte Scheiden bildet, in welchen jene Zotten des Chorion stecken, so jedoch, dass sie, nachdem sie fein injicirt worden, ohne zu zerreissen aus den Scheiden herausgezogen werden können. Zwischen den Zotten und ihren Scheiden scheint eine chylusartige Feuchtigkeit vorhanden zu sein. Die Zotten sind mit einem Haargefässnetz überzogen, mittelst dessen die Nabelarterien in die Nabelvenen übergehen, ohne dass diese Gefässe freie Enden haben. Eben so ist die concave Oberfläche jener Scheiden von einem sehr dichten Haargefässnetze überzogen, durch welches die verzweigten Uterinarterien in die Uterinvenen übergehen, ohne freie Enden zu haben. Dächte man sich alle diese Scheiden aufgeschnitten und in einer Ebene nebeneinander ausgebreitet, so würden sie eine überaus grosse Oberfläche bilden. Indessen giebt es ausserdem noch eine zweite Einrichtung, durch welche bei der Kuh die absondernde Oberfläche des Uterus sehr vergrössert wird, nämlich durch die in unzähliger Menge, mit der Schleimhaut in Verbindung stehenden *schlauchartigen Drüsen* des Uterus, welche ich zuerst als Drüsen erkannt und *Glandulae utriculares* genannt habe. Auf der inneren Haut des Uterus der trächtigen Kuh, befindet sich nämlich eine Menge kleiner trichterförmiger Grübchen, die $1/2$ Linie, 1 und bisweilen sogar 2 Linien und im Mittel etwa 1 Linie und etwas mehr von einander abstehen (Siehe *aaa* Taf. IX. Fig. 12.). Manche von ihnen sind durch kleine, sehr regelmässig liegende, ein wenig auf den Boden der Grübchen hervorspringende Scheidewändchen in 2 oder 3, selten in 4 kleinere Grübchen getheilt, die meisten sind aber einfach. Auf dem Boden jedes Grübchens bemerkt man mit dem Vergrösserungsglase eine deutliche Oeffnung, welche an einem in Spiritus aufbewahrten Präparate [2]) ungefähr $1/20$ Par. Linie im Durchmesser hat. Von jeder Oeffnung fängt auf der äusseren (dem fleischigen Stratum des Uterus zugekehrten) Oberfläche der Schleimhaut ein geschlängeltes gelbliches, ziemlich undurchsichtiges Canälchen an, welches sich zwischen der Schleimhaut und Muskelhaut $1/2$, $1/3$ bis $1/4$ Zoll

---

1) F. Hildebrandt's Handbuch der Anatomie. 4te Auflage von E. H. Weber. Braunschweig 1832. Bd. IV. p. 504.

2) Diese Oeffnungen kann man am trächtigen Uterus der Kuh besser beobachten, wenn er längere Zeit in Spiritus aufbewahrt worden ist.

weit hinwindet und daselbst mit einem blasenartigen, durch Vergrösserungsgläser sichtbaren Ende, zuweilen aber auch mit 2 oder 3 solchen Enden Fig. 12. *b b b* aufhört. Niemals verbindet sich ein solcher Canal mit einem benachbarten, niemals theilt er sich in Aeste, die sich nach der Schleimhaut des Uterus hin begeben. In diesen Canälen befindet sich eine undurchsichtige gelbliche Flüssigkeit. Die Blutgefässe sind, weil sie durchsichtiger, ästig, oder auch netzförmig verflochten sind, von ihnen gut zu unterscheiden. Den Oeffnungen dieser *schlauchartigen Uterindrüsen* gegenüber befindet sich eine Einrichtung, durch welche auch die Fläche des Chorion vergrössert und die Berührung des von jenen Drüsen ergossenen Saftes mit den Blutgefässen des Chorion befördert wird. Denn an der dem Uterus zugekehrten Oberfläche des Chorion sind ungefähr in der nämlichen Entfernung von einander kleine Stellen bemerklich, die aus 4 bis 5 flachen, durch kleine vorspringende Zwischenwände von einander geschiedenen unregelmässig eckigen Zellen bestehen, und die schon von v. Bär beobachtet worden sind. An dem Rande, der eine solche Zellengruppe umgiebt, sieht die glatte Oberfläche des Chorion wie abgenagt aus. Zu jeder Zellengruppe gehen, wie auch schon v. Bär bemerkt hat, grössere und zahlreichere Aeste der Nabelgefässe als zu den dazwischen gelegenen Stellen. Diese Zellen scheinen also Receptacula zu sein, in welchen der durch die *Glandulas utriculares* abgesonderte Saft mit einem sehr dichten Haargefässnetz in Berührung kommt, welches von v. Bär sehr gut abgebildet worden ist.»

«Beim Rehe sind die *Glandulae utriculares* eben so lang aber etwas dünner, denn sie haben $\frac{1}{19}$ bis $\frac{1}{38}$ Par. Linie im Querdurchmesser. (Auf Taf. IX. Fig. 14. sieht man das Ende einer solchen Uterindrüse, welches selbst wieder in 3 kurze Enden gespalten ist). In dem einen Rehuterus gab es ausser den 5 in jedem Horne befindlichen sehr grossen Cotyledonen Stellen, wo die Wand des Uterus ein wenig verdickt war und *inwendig ungefähr sechseckige Zellen* bildete, welche in sehr grosser Zahl nebeneinander standen, und *in die sehr viele neben einander liegende $\frac{1}{4}$ Linie grosse hervorragende Schwämmchen des Chorion hineinpassten.* Zwischen dem Chorion und dem Uterus befindet sich eine geringe Menge einer viele Körnchen enthaltenden Flüssigkeit, welche beim Menschen niemals vorkommt und welche hier auch an den Stellen, wo keine Cotyledonen liegen, mit den Blutgefässnetzen der Nabelgefässe in Berührung kommt, welche über den grössten Theil des Chorion auf eine sehr sichtbare Weise ausgebreitet sind, was beim Menschen nicht der Fall ist. Denn beim Menschen sind nur die baumförmigen Zotten des Chorion, die den Mutterkuchen bilden, mit Blutgefässen versehen, der übrige Theil des Chorion dagegen ist gefässlos.»

II. Burkhardt's Beobachtungen über die schlauchartigen Uterindrüsen der Kuh.

Im Jahre 1834 beschrieb A. Burkhardt die schlauchartigen Uterindrüsen der trächtigen und nichtträchtigen Kuh gleichfalls [1]). Er bemerkte, dass

1) Aug. Burkhardt Observationes anatomicae de uteri vaccini fabrica. Basileae 1834. 4. p. 13, 22—24.

ihre Mündungen und sie selbst im trächtigen Zustande der Kühe grösser sind als im nichtträchtigen, und fand, dass den Mündungen dieser Drüsen gegenüber an dem Chorion kleine, mit unbewaffnetem Auge kaum sichtbare gelbliche Erhabenheiten hervorragten, die aus mehreren durchsichtigen runden und länglichen Blasen zusammengesetzt wären. Als er den Uterus einer trächtigen Kuh mit Vergrösserungsgläsern betrachtete, während er das Chorion vom Uterus abzog, bemerkte er dass jene gelblichen Erhabenheiten sich aus den Oeffnungen der Uterindrüsen herauszogen, und dass aus den letzteren sogleich ein milchiger Saft herausdrang, sobald die gelben Erhabenheiten aus ihnen entfernt wurden. Bei einer an einem herausgeschnittenen Stücke ausgeführten Zählung der Oeffnungen der Uterindrüsen und der gelben Erhabenheiten des Chorion zeigte es sich, dass die Zahl beider übereinstimmte.

Krause's Cryptae des menschlichen Uterus.

Im Jahre 1836 beschrieb Krause[1]) an der Schleimhaut des menschlichen Uterus «ziemlich viele vereinzelt und $^1/_{50}$''' bis $^1/_5$''' von einander entferntstehende kleine *Cryptae mucosae*, deren Mündungen $^1/_{50}$''' bis $^1/_{33}$''' weit wären. Im Canale des Mutterhalses, sagt er, enthalte die Schleimhaut des Uterus grössere Schleimbälge, die zuweilen die Gestalt ausgedehnter rundlicher Säckchen, sogenannte *Ovula Nabothi* hätten. Da diese Beschreibung nicht auf die schlauchartigen Uterindrüsen zu passen scheint, so muss die Zukunft lehren, ob sich ausser den schlauchartigen Uterindrüsen noch solche Cryptae im Uterus finden.

Mein Vortrag über die Verbindung von Mutter und Frucht bei den verschiedenen Classen der Säugethiere bei der Versammlung der deutschen Naturforscher in Bonn im Jahre 1835.

Ich verband mich mit meinem Bruder Eduard Weber, um die feinen Injectionen und mikroskopischen Untersuchungen, die ich beim Menschen und bei wiederkäuenden Thieren ausgeführt hatte, gemeinschaftlich mit ihm auf die Placenta anderer Thiere, namentlich auf die des Schweins, des Hundes, der Katze und des Kaninchens auszudehnen. Diese Beobachtungen habe ich noch nicht durch den Druck bekannt gemacht, sondern ich habe darüber nur einen Vortrag am 23. September 1835 in der vereinigten physiologischen und zoologischen Section der deutschen Naturforscher in Bonn gehalten, aus welchem Folgendes in das Protokoll aufgenommen worden ist[2]). «Er theilt in dieser Beziehung die Thiere (Säugethiere) in zwei Classen, 1) in die Classe, wo die gefässreichen *Falten* oder *Zellen*, oder noch anders gestalteten Organe des *Uterus* so locker zwischen die gefässreichen Zotten des Eies eingreifen, dass sie sich bei der Geburt, ohne zu zerreissen, von ihnen losgeben und wie die Scheide, aus welcher der Degen herausgezogen wird, trennen. Bei diesen

1) Krause Handbuch d. menschl. Anat. Hannover 1836. Bd. I. p. 565

2) Froriep Notizen aus dem Gebiete der Natur und Heilkunde. 1835. Nr. 996. p. 90.

Thieren wird der Uterus bei der Geburt nicht verwundet, denn die gefässreichen, die Verbindung zwischen Mutter und Frucht bewirkenden Organe des Uterus werden nicht abgerissen, sondern bleiben an ihm, hören nach geendigter Trächtigkeit nur auf zu turgesciren und nehmen einen kleineren Umfang an; sie sind also nicht *hinfällige* Organe: diese Einrichtung findet sich bei den von ihm untersuchten Wiederkäuern, namentlich Kühen, Rehen, Schaafen und Hirschen, ferner bei den Pferden und Schweinen.» (ausserdem bei den Cetaceen[1]).
2) «In die Thiere, wo die gefässreichen *Zellen* oder *Falten*, oder anders gestalteten, zur Verbindung von Mutter und Frucht dienenden Organe des *Uterus* mit den gefässreichen *Zotten* und *Falten* des *Eitheils* der Placenta so verwachsen sind, dass sie bei der Geburt vom Uterus abgerissen werden. Wie bei dem Stiele einer Frucht ist bei ihnen die Stelle, an welcher sie sich vom Uterus trennen und ablösen sollen, zu dieser Trennung schon im voraus vorbereitet. Die in die Placenta übergehenden Uteringefässe sind an dieser Stelle sehr weich und zerreissbar. Bei diesen Thieren wird der Uterus bei der Geburt verwundet, die Organe des Uterus die zur Verbindung der Mutter mit der Frucht dienen, fallen bei der Geburt von dem Körper der Mutter mit ab und sind also hinfällig, *Organa caduca,* und müssen bei jeder neuen Schwangerschaft oder Trächtigkeit von neuem erzeugt werden, während sie bei der ersten Classe von Thieren, wenn Trächtigkeit wieder entsteht, nur wieder von neuem zu turgesciren brauchen. Zu diese Classe gehören der Mensch, die Hunde, die Katzen, die Kaninchen und unstreitig manche andere Thiere. Der Mensch unterscheidet sich von allen jenen andern Thieren dadurch, dass die zur Verbindung mit dem Ei aus dem Uterus hervorwachsenden Arterien und Venen nicht durch ein Netz *enger Haargefässe,* sondern durch ein Netz sehr *weiter* und zugleich sehr *dünnwandiger* Gefässe untereinander zusammenhängen, welches die ganze Placenta durchdringt. Die Gänge, in welchen das Mutterblut durch die Placenta strömt, sind nämlich auf eine ähnliche Weise mit einer glatten durchsichtigen, isolirt kaum darstellbaren Haut austapezirt, als die Sinus der *Dura mater*» (vorzüglich die Sinus des Rückratcanals). «Diese harte Haut ist, eben so wie hier, eine Fortsetzung der Haut der Blutgefässe, die das Blut (aus dem Uterus) in die Placenta und aus derselben zurück (in den Uterus) führen. In diese Mutterblut führenden Canäle insinuiren sich die zarten, gefässreichen, von Embryoblute durchströmten Zotten des Kindestheils der Placenta; sie hängen daher in diese Canäle hinein und werden vom vorbeiströmenden Mutterblute umspült. Bei allen anderen Säugethieren dagegen sind auch die gefässreichen, zur Verbindung mit der Frucht dienenden Organe oder Productionen des Uterus mit einem Mutterblut führendem *Haargefässnetze* überzogen, und es kommen daher bei ihnen *zwei Haargefässnetze* mit einander in Berührung, von welchen das eine Mutterblut, das andere Kindesblut führt.»

---

1) Nach Haulik de nexu inter foetum et matrem. Vindob. 1830. 4., bei Balaena, nach Eschricht bei Delphinus.

Eschricht's Untersuchungen über den Zusammenhang von Mutter und Frucht und die Uterindrüsen.

Mit dem, was ich über die Placenta der Thiere auseinander gesetzt hatte, stimmten die von Eschricht angestellten Untersuchungen überein[1]), aber beim Menschen gelang es ihm nicht, sich von dem von mir beschriebenen Baue der Placenta zu überzeugen. Er bestätigte also das Vorhandensein der von mir beschriebenen schlauchartigen Uterindrüsen bei wiederkäuenden Thieren und beschrieb ausserdem die Uterindrüsen beim Delphin. Dagegen schienen ihm die Uterindrüsen bei der Katze einen anderen Bau und vielleicht also eine andere Bestimmung zu haben. Aber seine Beschreibung beweist, dass er nur Stückchen von ihnen gesehen hat. Denn er konnte erstlich keine Mündungen finden und behauptete, dass sie ovale Säckchen wären, welche 2 bis 3 Linien im Längendurchmesser und $1\frac{1}{2}$ bis 2 Linien im Querdurchmesser hätten, während sie nach meinen Beobachtungen den Taf. IX. Fig. 1. von mir abgebildeten Uterindrüsen des Hundes so ähnlich sind, dass ich es nicht für nöthig halte, die Zeichnung bekannt zu machen, die ich von den Uterindrüsen der Katze gemacht habe. Er hat also wohl nur die Zellen gesehen, in welche gewisse Theile der Uterindrüsen ausgedehnt werden, während sie sich in der Trächtigkeit sehr erweitern.

Ich hatte behauptet, dass die zur Verbindung von Mutter und Frucht bei Hunden und Katzen dienenden Organe gefässreiche *Zellen* oder *Falten* wären, Eschricht hielt sie nur für Falten, welche zwischen die gefässreichen Falten des Chorion eingriffen.

v. Bär's neue Untersuchungen[2]).

v. Bär sprach offen seine Ueberzeugung aus, dass die Theile die er früher für Gefässe gehalten, Drüsen des Uterus sein möchten. Er sagte: «Die Canäle, welche an jenen offenen Stellen des Fruchthälters (der Schweine) ausmünden, hatte ich früher für Gefässe gehalten, weil sie in Schweinen sich sehr weit verfolgen lassen, ohne ein Ende zu zeigen. Ich sah zwar auch in diesen Thieren blinde Enden solcher Canäle, konnte aber nie vom blinden Ende einen Canal bis zur Mündung verfolgen. Weber hat aber, indem er dieselben Canäle in Wiederkäuern und Thieren mit Nägeln untersuchte, sie für Drüsen erklärt. An Wiederkäuern, wo die Canäle viel kürzer sind und ziemlich viel kurze blinde Nebenäste haben, ist auch Weber's Deutung kaum zu bezweifeln. Man muss jene Canäle auch noch in Schweinen für Drüsenschläuche halten, so lang sie auch sind. Die Drüsen werden Stoff für das Ei aussondern.» Ueber die Decidua und den Mutterkuchen der Hunde und Katzen gab er folgende sehr interessante Mittheilungen. «Es ist aber nicht mehr die unmittelbare innere Fläche des Fruchthälters, welche das Ei berührt; diese hat einen sehr

---

1) Eschricht de organis, quae respirationi et nutritioni foetus mammalium inserviunt. Hafniae 1837. 4.

2) Ueber Entwickelungsgeschichte der Thiere von D. Carl Ernst v. Bär. Königsberg 1837. p. 250 und 241 ff.

dicken Ueberzug in der Gegend erhalten, in welcher das Ei liegt. Wir wollen diesen Ueberzug, die sogenannte Decidua, etwas näher ins Auge fassen. Schon sehr früh, sogar schon so lange die Eier noch beweglich sind, verstärkt sich das Gefässnetz in der Schleimhaut des Fruchthälters. Sobald aber der Fruchthälter die Eier in Nester einschliesst, wächst das Gefässnetz an diesen Stellen ausserordentlich. Es bildet aus verhältnissmässig weiten Canälen *enge runde Maschen, und in jede Masche greift eine Zotte des Eies ein.* Aber dieses Gefässnetz liegt nicht mehr, wie früher, in der zottigen Schleimhaut des Fruchthälters selbst, sondern ausserhalb derselben in einem durchsichtigen ausgeschiedenen Stoffe. Es ist also ein Gefässnetz, das sich erst aus dem ursprünglichen hervorgebildet hat. Jetzt brauche ich nur noch hinzuzufügen, dass diese ausgeschiedene Masse sich ausserordentlich mehrt, dass sie sich durch die eintretenden Blutgefässe organisirt, und dadurch fähig wird, eine bestimmte Form anzunehmen, die sich besonders darin ausspricht, *dass sie grosse Zellen bildet, und dass sie eben dadurch unzertrennbar mit der Schleimhaut des Fruchthälters verwächst. Die Zellen bilden 2 Schichten und sind in jeder Schicht verschieden;* dieser Ueberzug ist nichts anders als die sogenannte hinfällige Haut der Frucht des Menschen, bildet aber in Raubthieren zu keiner Zeit eine Einstülpung. Anfänglich ist der Ueberzug leicht von der Schleimhaut zu unterscheiden, ungefähr die 3 oder 4 ersten Wochen, später nicht mehr. Dagegen ist er längere Zeit (bis gegen die 6te Woche) von dem Ei leicht zu trennen. Später aber wird auch dieses nicht möglich, und wenn man Eier aus der letzten Tragzeit aus dem Fruchthälter nimmt, so trennt man mit dem Fruchtkuchen auch immer den Mutterkuchen ab, in welchen dieser Ueberzug dem Fruchtkuchen gegenüber sich umgewandelt hat, in dem die früheren sehr ansehnlichen Höhlen oder Zellen enger und undeutlicher geworden sind. Mit dem Mutterkuchen geht aber auch die in seine Substanz verwachsene Schleimhaut ab. Fruchtkuchen und Mutterkuchen sind also mit einander verwachsen. Diese Verwachsung ist aber eigentlich ein Ankleben und Ineinandergreifen der einzelnen Verlängerungen, denn die Zotten des Fruchtkuchens haben sich in die Zellen des Mutterkuchens, und dieser hat sich umgekehrt in die Zwischenräume der Zotten ausgedehnt, ausgeschiedener Stoff hat beide verbunden, nirgends ist aber ein Gefässübergang bewirkt.»

Wahrnehmung der schlauchartigen Uterindrüsen in der Tunica decidua des Menschen.

Im Jahre 1839 nahm ich zuerst die schlauchartigen Uterindrüsen beim Menschen wahr und theilte diese Wahrnehmung, nachdem ich sie noch bei zwei anderen frischen Uteris im schwangern Zustande bestätigt gefunden hatte, Johannes Müller, am 13. Februar 1840 brieflich mit, der diese Beobachtung in seinem Handbuche der Physiologie bekannt machte[1]). Es heisst daselbst: «Nach neueren Beobachtungen von E. H. Weber, von denen ich handschriftlich Kenntniss erhalten habe, bilden den Hauptbestandtheil der Decidua

1) Joh. Müller Handbuch der Physiologie des Menschen. Coblenz 1840. Bd. II. p. 710.

die sehr gedrängt liegenden schlauchartigen Uterindrüsen. Schon durch die innere Oberfläche der Decidua sieht man im Innern derselben zahlreiche, ziemlich parallel gelegene, gegen die Oberfläche gerichtete Fädchen durchschimmern, wie ein Sammt von Zotten, mit dem Unterschiede, dass die Zotten nicht frei liegen, sondern dass die Zwischenräume zwischen ihnen von der Substanz der Decidua ausgefüllt werden. Wenn man die Schnittfläche des halbirten Uterus im Sonnenscheine mit Lupen betrachtet, so bemerkt man, dass diese angeblichen Zotten cylindrische dünne lange Schläuche sind (siehe Taf. VIII. Fig. 4. und 5.), die sich da, wo sie an die Oberfläche treten, etwas verengen; in der Gegend wo die *Tunica decidua* mit dem Uterus zusammenhängt, dicker und, wie es scheint, mit geschlossenen Enden anfangen. Daselbst schlängeln sie sich sehr. Presst man einen schwangeren Uterus, so kann man auf der Oberfläche der Decidua einen weisslichen dicken Saft, wie aus den Uterindrüsen der Thiere, hervorpressen. Die Decidua hat an ihrer inneren Oberfläche zahlreiche, längst bekannte Löcherchen. Diese scheinen der Ort zu sein, wo sich zwei oder mehrere Schläuche zugleich öffnen. Ausserdem muss es noch viele einzelne unsichtbare Oeffnungen geben. Die Gänge sind fast $^1/_4$ Zoll lang, und theilen sich nur selten in zwei, von denen jeder so dick ist als der Stamm. Hierdurch unterscheiden sie sich sehr von den Blutgefässen, die neben ihnen verlaufen, denn diese bilden ein Netz oder Schleifen, sind wenigstens ästig und ihr Durchmesser nimmt während der Verzweigung ab. Der Durchmesser der Drüsencanälchen beträgt gegen $^1/_{17}$ Par. Linie, der Durchmesser der Haargefässe $^1/_{104}$ Par. Linie.»

Sharpey's Forschungen über die Uterindrüsen des Hundes und des Menschen.

Einen wichtigen Zusatz erhielt die Lehre von den Uterindrüsen durch die Untersuchungen, die Sharpey als eine Anmerkung zu meinen Beobachtungen in Baly's englischer Uebersetzung von J. Müller's Physiologie bekannt gemacht hat. Sie betrifft die Uterindrüsen des Hundes und des Menschen.

Sharpey über die Uterindrüsen des Hundes.

«Da ich Gelegenheit gehabt habe, sagt Sharpey, diese Drüsen des Uterus bei dem Hunde zu beobachten, und sowohl ihr Verhalten in den verschiedenen Stadien der Trächtigkeit, als auch ihr Verhältniss zu den Membranen des Fötus zu untersuchen, so will ich eine Uebersicht meiner Beobachtungen vorlegen. Es giebt 2 Arten von Drüsen in der Schleimhaut des Hundeuterus, erstlich die zahlreicheren *einfachen* Drüsen, welche nur sehr kurze, nicht in Aeste getheilte, am einen Ende geschlossene Röhren sind (Taf. IX. Fig. 5. *aa*); zweitens die zusammengesetzten Drüsen, welche aus einem langen, in geschlängelte Zweige getheilten Gange bestehen (Fig. 5. *bb*). Beide Arten von Drüsen münden nebeneinander durch kleine, runde Oeffnungen auf der innern Oberfläche der Schleimhaut des Uterus, und sind inwendig mit Epithelium überzogen. In den Theilen der Schleimhaut, welche nach der Befruchtung in ein unmittel-

bares Verhältniss mit den Eiern kommen, erleiden die Drüsen eine merkwürdige Veränderung. In einem, ungefähr seit 3 bis 4 Wochen trächtigen Uterus, bei welchem die die Eier enthaltenden ausgedehnten Stellen des Uterus die Grösse einer Wallnuss erreichen (Taf. IX Fig. 3.), finden wir, wenn wir die letzteren öffnen, dass das citronenförmige Ei von einer breiten Scheide oder Zone von Zotten umgeben ist, die vom Chorion ausgehen, gefässreich sind und Theil an der Bildung der gürtelförmigen Placenta nehmen. Denn dieser Zone entspricht eine etwas erhabene Zone an der innern Oberfläche des Uterus, welche von kleinen Grübchen (Taf. IX. Fig. 3.) durchlöchert ist, in welche die Villi des Chorion aufgenommen werden. Insofern dieser Theil der Membran des Uterus zur Bildung der Placenta beiträgt, und bei der Geburt mit dem Eie abgeht, wird er mit Recht als Decidua betrachtet. Die Decidua ist also keine neue Bildung, sondern ist vielmehr eine Portion der Schleimhaut des Uterus, welche dicker und gefässreicher wird, als der übrige Theil derselben, und die Grübchen auf der dem Fötus zugekehrten Oberfläche des Uterus, welche die Fötalzotten in sich aufnehmen, sind nur die schon Fig. 4. abgebildeten Drüsen, welche sich aber etwas vergrössert haben und weiter geworden sind. Während nun die einfachen Drüsen nur eine gleichförmige Erweiterung erleiden, findet in den zusammengesetzten Drüsen eine Veränderung statt, die einen sehr merkwürdigen Charakter hat. Die langen Ausführungsgänge dieser Drüsen werden unmittelbar, ehe sie sich auf der innern Oberfläche des Uterus öffnen, so erweitert, dass jede Drüse eine Zelle bildet, die mit Epithelium überzogen und mit einem halbflüssigen, weisslichen und körnigen Secrete erfüllt ist. Diese Zellen bilden in der Nähe der Oberfläche der Decidua eine Lage und nehmen, wenn sie sich einander drücken, eine polyedrische Form an (Fig. 2.). An dem Boden derselben kann man sehen, wie der Drüsengang sich in die Zelle ausbreitet, während die Zelle nachher sich wieder zu ihrer Mündung verengt. In einem etwas weiter vorgerückten Stadium der Trächtigkeit vergrössern sich die Drüsenzellen und ihre Oeffnungen noch mehr, und nun dringen membranöse Fortsetzungen von der Oberfläche des Eies in die Drüsenzellen ein und gelangen jenseits der Oeffnungen bis zum Umfange der Drüsenzellen, von welchen sie umfasst werden. Diese Fötalprocessus sind Verlängerungen des Chorion (Taf. IX. Fig. 7., 8. und 9. *c*), und ihr Ueberzug von Gefässen rührt vom Endochorion her und enthält daher Verästelungen der Umbilicalgefässe. Sie sind grösstentheils hohl und sackförmig, sowohl die letzteren als die ersteren, und einige von ihnen besitzen eine Zeit lang eine kleine Oeffnung, wodurch ihre Höhle mit dem allgemeinen Sacke des Chorion, oder vielmehr mit dessen Gefässüberzuge communicirt, aber dieselbe obliterirt später, und die Processus des Eies werden den Villis ähnlich, von welchen sie sich nur durch ihre Grösse und Form unterscheiden. In dem Maasse als die Trächtigkeit fortschreitet, vergrössern sich die beschriebenen Theile, die Villi werden zusammengesetzter, indem sie sich in Aeste theilen und zahlreiche Seitensprossen bekommen. Aber ihre weit ausgebreiteten Enden, welche die Oeffnungen der Drüsenzellen verschliessen, sind glatt und eben und mit einer Verlängerung desselben Epitheliums bedeckt, welches die Drüsenzellen überzieht (Fig. 8. und 9. die punktirte Linie). Die Muttergefässe, d. h. die Gefässe der Decidua sind

in enger Berührung mit der Oberfläche der Villi und füllen die Zwischenräume zwischen ihnen aus. Sie umfassen daher eng die Fötalprocessus mit Ausnahme ihrer ausgebreiteten Erhabenheiten, welche, wie wir behauptet haben, mit dem Secrete der Drüsenzellen in Berührung sind. Die mütterlichen Blutgefässe verzweigen sich, indem sie vom Uterus ausgehen, zuerst an den Wänden der Zellen, von welchen sie getragen werden. Aber, sobald sie sich den Villis und der Oberfläche des Eies nähern, bilden sie ein dichtes Netzwerk. Diejenigen Zweige dieses Netzes, welche nicht von einem membranösen Gebilde unterstützt werden, scheinen in der letzten Periode der Trächtigkeit, wenn das Gewebe der Decidua verschwindet, allein übrig zu bleiben. Bei der Geburt gehen die Gefässe der Decidua mit dem Ei ab, die Wände der neuen sehr vergrösserten Drüsenzellen trennen sich grösstentheils von dem Uterus, indem sie nur ihren Boden mit den in dessen Centrum befindlichen runden Oeffnung des Drüsenganges zurücklassen. Nach der Trennung des Eies und der Placenta ragen auf der inneren Oberfläche des Uterus zahlreiche, abgerissene und etwas zusammengeschrumpfte Gefässe hervor, die grösstentheils Venen sind und noch längere Zeit nach der Geburt an den Theilen des Uterus, welche mit deren Eiern zusammenhingen, sichtbar bleiben Aus der angegebenen Beschreibung folgt, dass in der Placenta des Hundes eine Einrichtung stattfindet, vermöge deren die von den vergrösserten Uterindrüsen abgesonderte Materie in die Nähe der Blutgefässe des Fötus gebracht wird, und wenn man berücksichtigt, dass eine Einrichtung von ähnlicher Art auch in andern Fällen gefunden wird, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass bei den lebendig gebärenden Thieren im allgemeinen eine von dem mütterlichen Systeme vermittelst eines Drüsenapparats abgesonderte Materie von dem Fötalsysteme aufgesogen und zur Ernährung verwendet werde. Indessen ist dieses eine Frage, welche erst entschieden werden kann, wenn die Untersuchungen weiter ausgedehnt worden sind. Mit diesem Gegenstande steht die Frage über die Quelle der wohlbekannten, grüngefärbten, an den Rändern der Placenta der fleischfressenden Thiere abgesetzten Materie in Verbindung. Doch über diesen Gegenstand kann ich jetzt nicht mit Sicherheit sprechen.»

Sharpey über die Uterindrüsen des Menschen.

«Die mitgetheilten Beobachtungen über die Decidua des Hundes veranlassten mich, auch die menschliche Decidua zu untersuchen und specieller ihre Verhältnisse zu der Schleimhaut des Uterus zu erforschen. Ich will nun brieflich die Resultate mittheilen, finde jedoch, dass mir Weber sehr zuvorgekommen ist, wie aus der Darstellung Professor Müller's in dem Texte erhellt. Indessen muss ich erwähnen, dass ich zu meinen Resultaten ganz unabhängig von Weber's Beobachtungen geführt worden bin, und in der That, ehe das Original von den Seiten der Müller'schen Physiologie mir zukam, auf welchen sie sich bemerkt finden. In verschiedenen Fällen, wo man Ursache hatte anzunehmen, dass vor kurer Zeit Befruchtung stattgefunden habe, und in welchen das Ovarium einen neuen gelben Körper und der Uterus einen deutlichen Ueberzug von einer Decidua zeigte, ohne dass das Ei entdeckt werden konnte,

war die Decidua daselbst $^1/_{10}$ Zoll dick und schien aus der verdickten Schleimhaut zu bestehen. Ihre Oberfläche zeigte eine Menge kleiner runder Oeffnungen (Fig. 4.), welche, wie man auf der verticalen Durchschnittsfläche sehen konnte, den schlauchartigen Drüsen der Schleimhaut angehörten und verlängert und erweitert waren. Die Drüsenschläuche waren mit einem weissen Epithelium überzogen und dadurch sehr in die Augen fallend, sie waren nach ihrem geschlossenen doppelten Ende hin sehr gewunden und gekrümmt, und an verschiedenen Stellen schienen sie ihrer Länge nach eingepflanzt in das Gewebe des Uterus. Ob sich eine von ihnen in zwei Zweige getheilt habe, konnte ich nicht bestimmen. An einem, dem D. J. Reid gehörenden Exemplare enthielt der Uterus ein frühzeitiges Ei, welches man kaum mehr als 15 Tage nach der Conception alt hielt. Die *Decidua vera* war etwas gerunzelt an der Oberfläche, sie hatte das gewöhnliche, siebförmige Ansehen, und die sich öffnenden Grübchen waren grösstentheils weiter als in den noch jüngeren Exemplaren, aber die engeren hatten auch den Charakter der schlauchartigen Drüsen, und überdies sah man einen deutlichen Uebergang von diesen zu den weiteren schlauchartigen Drüsen. Wenn ich parallel der Oberfläche einen Einschnitt machte, schien es so, als ob manche Grübchen eine verhältnissmässig weite Höhle, aber eine enge Oeffnung hätten. Aus diesen und anderen ähnlichen Beobachtungen schliesse ich, dass die Oeffnungen, welche der Decidua das siebförmige Ansehen geben, obwohl sie in dem letzten Stadium der Schwangerschaft modificirt werden, doch anfangs nichts anderes sind als die Oeffnungen der Drüsen in der den Uterus überziehenden Membran, und dass sich die Schleimhaut beim Menschen ebensowohl als beim Hunde wirklich in die Decidua umwandelt und bei der Geburt abgestossen wird, eine Meinung, die, wie ich hier bemerke, aus andern Gründen von verschiedenen Physiologen des Continents angenommen wird. Bei einem Uterus, von den man annahm, dass er seit Kurzem befruchtet worden sei, und dessen Gefässe fein mit Zinober injicirt worden waren, erschien die den Uterus auskleidende Membran, d. h. die entstehende Decidua, allenthalben durchzogen von einem Netzwerk von Blutgefässen, in deren Mitte die schlauchartigen Drüsen gesehen wurden, deren weisses Epithelium sehr gegen die sie umgebende Röthe contrastirte. In mehr fortgeschrittenen Stadien bilden die Venen vielfache, in der Substanz verzweigte Canäle, welche frei mit den Uterinvenen communiciren. Wenn man mittelst einer Röhre diese venösen Gefässe mit Luft aufbläst, so kommt diese oft zu den Löchern an der Oberfläche der Haut heraus, die wir als die Oeffnungen der erweiterten Uterindrüsen angesehen haben, so dass man hieraus schliessen möchte, dass es eine natürliche Communication zwischen beiden geben müsse. Ich bin aber nichtsdestoweniger geneigt zu denken, dass die venösen Canäle und die Drüsengänge zwei besondere Systeme von Höhlen in der Decidua bilden, die aber von einander nur durch sehr dünne, leicht zerreissbare Wände getrennt sind. Ich bin geneigt, diese Meinung anzunehmen, in Folge der auf verschiedene Weise wiederholten Untersuchungen (doch muss ich zugeben, dass das Resultat nicht immer günstig war), und also zu behaupten, dass die in der Decidua erscheinenden Canäle lediglich vergrösserte Uterindrüsen sind, welche, wenn sie in frühzeitigen Stadien untersucht werden, in demselben Verhältnisse zu

den sie umgebenden Blutgefässen der Decidua zu stehen scheinen, in welchem bekanntlich im allgemeinen alle Drüsen zu den Blutgefässen stehen. Ein Einwurf gegen die Ansicht, dass die Decidua nur die veränderte Schleimhaut des Uterus sei, liegt in der Schwierigkeit die Entstehung des Ueberzugs des Eies durch die *Decidua reflexa* zu erklären, welche mit der *Decidua uteri* continuirlich zusammenhängt, und von der die meisten, wenn auch nicht alle Physiologen annehmen, dass sie einen ähnlichen Ursprung habe. Zugleich ist aber die Kraft dieses Einwurfs geschwächt durch die Thatsache, dass die *Decidua reflexa,* obwohl sie eine Fortsetzung der *Decidua vera* ist, doch nicht gewöhnlich in ihrer ganzen Ausdehnung denselben Charakter als die Vera zeigt. Ohne Rücksicht zu nehmen auf die von andern Autoren angegebenen Unterschiede behaupte ich, dass bei den verschiedenen Fällen von Conception, in welchen ich die *Decidua reflexa* untersucht habe, dieselbe auf einem grossen Theile ihrer Oberfläche die engen Oeffnungen nicht hatte, welche die *Decidua vera* charakterisiren, und dass das Vorkommen derselben beschränkt war, hauptsächlich wenn auch nicht ausschliesslich auf die Abtheilung der Membran, welche an den Reflexionswinkel der *Tunica reflexa* angränzt, d. h. an denjenigen Theil, der der *Decidua vera* am nächsten ist. Nun wenn diese Beobachtung im allgemeinen richtig ist, so glaube ich nicht nothwendig voraussetzen zu müssen, dass die den Uterus auskleidende Membran über die ganze Oberfläche des Eies ausgedehnt sei, um die *Decidua reflexa* zu bilden, und wiewohl ich keine solche Begränzung präparirt habe, dass ich ein entscheidendes Urtheil abgeben könnte in Beziehung auf die anerkannt schwierige Frage, so möchte ich dennoch wenigstens als eine mögliche Erklärung anführen, dass das kleine Ei bei seinem Eintritte in den Uterus mit exsudirter Lymphe bedeckt ist, entweder ganz und gar oder an dem Theile seiner Oberfläche, welcher nicht der Innenseite des Uterus anhängt, so dass, wenn das Ei sich vergrössert, eine kreisförmige Falte (Taf. IX. Fig. 10. 2′ 2′) der veränderten Schleimhaut (Decidua) über dasselbe herübergezogen wird, demselben ringsherum anhängt und es in einer grösseren oder kleineren Strecke überzieht. Dieser aufgehobene Theil der Decidua würde hiernach die siebartige durchlöcherte zonenförmige Portion der *Decidua reflexa* bilden, während die dünnere und glättere Portion derselben, welche weiter von der Linie der Reflexion entfernt ist, durch Ausdehnung der das Ei bedeckenden Lymphe entstanden wäre. Vielleicht dürfte daher die folgende noch einfachere Erklärung zulässig sein, dass das kleine Ei, wenn es im Uterus anlangt, in die dünne weiche und breiige Schleimhaut des Uterus eingebettet wird, und dass letztere bei dem Wachsthume des Eies mit fortgeführt und in die *Decidua reflexa* ausgedehnt ward. In Anerkennung der Gefälligkeit, mit welcher mein Freund D. John Reid, nun Professor der Medicin in St. Andrews, die sehr schätzbaren Specimina seiner Sammlung zu meiner Disposition gestellt hat, halte ich mich für verpflichtet zu bemerken, dass er schon vorher die Tubularstructur der Schleimhaut des Uterus beobachtet hat, und dass er durch die Untersuchung eines seit kurzem befruchteten Uterus veranlasst worden ist anzunehmen, dass eine der frühesten Veränderungen die nach der Befruchtung eintreten, in einer zunehmenden Entwickelung jener Tubularstructur besteht, dass er ferner eingesehen hat, dass dieselbe

mit der Bildung der Decidua in Verbindung steht, dass er aber nicht annimmt, dass sich die Schleimhaut in die Decidua umwandelt, sondern geneigt ist sich vorzustellen, dass die Decidua von den Tubulis der Schleimhaut secernirt werde.»

Goodsir's Beobachtungen über die Uterindrüsen des Menschen.

Im Jahre 1845 hat John Goodsir Beobachtungen über die schlauchartigen Uterindrüsen in der *Tunica decidua* des Menschen bekannt gemacht. Er bestätigt meine und Sharpey's Untersuchungen. Er beobachtete, dass sie eine halbflüssige körnige Secretion liefern. Diese Secretion beginnt, schon ehe das Ei in den Uterus eintritt. Er scheint der Meinung zu sein, dass sich die Körnchen dieses Drüsensecrets in Zellen verwandelten, aus welchen die Oberhaut der *Tunica decidua,* die *Tunica decidua reflexa* und die gallertartige Masse entstünde, die den Canal im *Collum uteri* bei Schwangeren verstopft. Er sagt nämlich, das Secret nähme die Form verlängerter Epitheliumzellen an, und dadurch verschlösse sich das *Os uteri.* Die Höhle des Uterus erfülle sich mit einem flüssigen Secrete, und in unmittelbarer Nachbarschaft des Eies bestände das Secret in runden Zellen, welche die *Tunica decidua reflexa* bildeten. Die *Tunica decidua* endlich scheine aus zwei Elementen zu bestehen, aus der verdickten Uterinschleimhaut und aus einer gefässlosen, aus Zellen bestehenden Substanz, einem Producte der schlauchartigen Uterindrüsen. Die verdickte Uterinschleimhaut aber sei bei einer angehenden Schwangerschaft selbst wieder aus den schlauchartigen Uterindrüsen und aus zahlreichen Blutgefässen gebildet, deren Zwischenräume von kernhaltigen Zellen eingenommen würden.

Ich kenne Goodsir's Abhandlung im Originale nicht, sondern nur den angeführten Auszug und weiss daher nicht, auf welche Beobachtungen sich diese Angaben stützen. Indessen muss ich bemerken, dass sich die Annahme, die *Decidua reflexa* bilde sich aus einem Secrete der Uterindrüsen, nicht mit meiner Beobachtung vereinigen lasse, dass an der Oberfläche der *Tunica decidua reflexa* die Oeffnungen der Uterindrüsen sichtbar sind, die auch Sharpey in der Nähe des Randes der *Tunica decidua reflexa* beobachtet hat, durch den sie mit der *Tunica decidua uteri* zusammenhängt. Ich betrachte die gefässlose oberflächlichste Lage der *Tunica decidua* als eine weiche, in der Bildung begriffene Oberhaut, durch welche hindurch sich die Drüsencanäle auf eine ähnliche Weise bis zur Oberfläche fortsetzen, wie die Drüsencanäle der Schweissdrüsen durch die dicke Oberhaut der menschlichen Hohlhand. Da nun aber die Zellen, aus welchen die in der Bildung begriffene weiche Lage der Oberhaut, das *Rete Malpighii* besteht, nicht durch eine Secretion der Hautdrüsen entstehen, sondern aus einer Feuchtigkeit sich bilden, welche die Blutgefässnetze an der Oberfläche der Lederhaut unmittelbar absondern, so halte ich es auch im Uterus nicht für wahrscheinlich, dass sich jene gefässlose Lage aus einem Secrete der Uterindrüsen bilde. Jedenfalls beweisen meine Beobach-

---

1) Anatomical and pathological Observations by John Goodsir and Harry Goodsir. Edinburgh 1845. 8. p. 127; im Auszuge in Med. chir. Review. Jul. 1845. London.

tungen, dass die *Tunica decidua reflexa* nicht ein geronnenes unorganisirtes Secret ist, sondern dass sie ganz oder wenigstens grösstentheils aus einer Lage der *Tunica decidua* bestehe.

Bischoff's Beobachtungen über die Uterindrüsen des Menschen und des Hundes.

Th. Ludw. Wilh. Bischoff, berühmt durch seine «Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Thiere» und durch die specielle Entwickelungsgeschichte des Kaninchen- und Hundeeies, und daher mit diesen Forschungen vorzugsweise vertraut, hat meine und Sharpey's Beobachtungen gleichfalls bestätigt.

«Die sogenannte Schleimhaut des Uterus des Hundes, sagt er, ist ein aus mehreren Elementen zusammengesetztes Gebilde. Ihre Grundlage ist ein Fasergewebe, dessen Fasern denen des Bindegewebes ähnlich sind. In diesem finden sich zahlreiche Drüsen zweier Arten eingelagert. Die einen werden gebildet durch Canälchen, welche in einem etwas geschlängelten Verlaufe durch die Dicke der Schleimhaut hindurchgehen und, wo sie auf die sogenannte Zellhaut des Uterus aufstossen, stärker hin- und hergewunden, oftmals selbst knäuelartig aufgerollt sind. In ihrem Verlaufe theilen sie sich zuweilen in 2 auch 3 Canälchen, oft bleiben dieselben aber auch ungetheilt. Zuletzt endigen sie blind, und oft gehen auch zwei Canälchen in einander über. Stärker vergrössert sieht man, dass die Canälchen besonders gegen ihre blinden Enden hin, überall zahlreiche Aussackungen besitzen. Bei noch stärkerer Vergrösserung erkennt man, dass sie aus einer gleichförmigen *Tunica propria* bestehen und in ihrem Innern eine feinkörnige Masse enthalten, in welcher ich keine Zellen oder Zellenkerne erkennen konnte. Die zweite Art von Drüsen sind zahlreiche kleine und einfache Crypten, welche die ganze obere Schicht der Schleimhaut besetzen. Von ihnen sieht die Schleimhaut, wenn man sie von oben betrachtet, wie durchstochen aus. Ausserdem ist endlich die Schleimhaut des Uterus noch von einem Epithelium bekleidet, welches aus sehr kleinen Flimmercylindern besteht. Die Flimmerbewegung, die sie hervorbringen, ist indessen meistens ausserordentlich schwach, ja ich habe mich öfter nicht von ihrem Vorhandensein überzeugen können. Wir haben nun oben gesehen, so lange bis die Eier bereits einen Durchmesser von 2 — 2 ½ Linien erhalten haben und an ihrer Oberfläche noch keine Zotten besitzen, liegen sie ganz frei im Uterus, und man bemerkt an der Schleimhaut desselben gar keine Veränderung, ausser dass dieselbe überhaupt zu dieser Zeit turgescirender, blutreicher, sammtartiger als zu andern Zeiten ist. Wenn dagegen die Eier jene Grösse erreicht haben, so entwickelt sich die Schleimhaut an dieser Stelle, wo die Eier sich befinden, schnell sehr stark, so dass sie hier bald einen bedeutend nach innen vorspringenden Wulst bildet. Betrachtet man dieselben an der freien Fläche genau, so bemerkt man hier eine grosse Zahl kleiner Löcherchen schon mit unbewaffnetem Auge, und bald, wenn das Ei mit seinen Zotten und dieser Wulst immer mehr zugenommen haben, kann man sich überzeugen, dass die Zotten des Chorion in diese Löcherchen hineinragen. Anfangs lassen

sich die Zotten des Chorions nach einiger Maceration noch leicht aus jenen Löcherchen herausziehen, bald aber gelingt dieses nicht mehr so leicht, sondern man bewerkstelligt dann viel leichter eine Trennung der ganzen angeschwollenen Parthie der Schleimhaut des Uterus, welche auf dem Eie sitzen bleibt. Diese zeigt sodann ein bläschen- oder maschenartiges Ansehen und die Trennung dieser Schichte erfolgt um so leichter, je weiter das Ei entwickelt ist. Sie bildet die Placenta des Hundeeies. Untersucht man einen Querschnitt der Schleimhaut an der gürtelförmig angeschwollenen Stelle, so überzeugt man sich, dass die Anschwellung hier zwar auch durch nur succulente Infiltration des ganzen Gewebes, vorzüglich aber durch die sehr starke Entwickelung der oben beschriebenen Uterindrüsen gebildet wird. Die kleinen Löcherchen, welche man an der freien Fläche sieht, sind die Mündungen jener Uterindrüsen, und in sie hinein senken sich die Zotten des Chorions. Dieses alles lässt sich nur in früher Zeit, wenn weder die Entwickelung der Uterinschleimhaut und ihrer Drüsen noch die der Zotten des Chorions schon weit gediehen ist, ermitteln. Später gelingt es nicht mehr, das Verhältniss mit Sicherheit zu enträthseln. Allein es unterliegt keinem Zweifel, dass sich dasselbe in derselben Art weiter fortbildet, wie man es anfangs deutlich erkennen kann. Die Uterindrüsen wachsen fort und fort, und mit ihnen die wie in einer Scheide in ihnen steckenden Zotten des Chorions. Beide treiben zahlreiche seitliche Aestchen und Ausbuchtungen hervor und gehen daher bald eine ohne Zerreissung unauflösliche Verbindung ein. Auch in den Zotten verbreiten sich die Gefässe des Fötus, die Nabelgefässe, und die Arterien gehen in Schlingen in die Venen über. Zwischen den Uterindrüsen verbreiten sich auf gleiche Weise die Blutgefässe der Mutter, deren Uterinarterien hier auch durch ein Capillarnetz in die Uterinvenen übergehen. Mütterliche und kindliche Gefässe stehen nirgends in unmittelbarer Verbindung. Mütterliches und kindliches Blut gehen in Capillarströmchen an einander vorbei [1]).»

Bischoff hat nun aber auch Gelegenheit gefunden, den Uterus einer Frau zu untersuchen, die wahrscheinlich erst seit 8 bis 14 Tagen schwanger war, und die Resultate in Müller's Archiv mitgetheilt. Er sagt: «Seitdem E. H. Weber seine neuen Beobachtungen über den Bau der Decidua des menschlichen Eies und die Drüsen der Schleimhaut des Uterus in Müller's Physiologie bekannt gemacht, ist meines Wissens in Deutschland bis jetzt nichts Weiteres über diesen Gegenstand veröffentlicht worden.» Nachdem er nun die Arbeiten von Sharpey und Reid angeführt hat, theilt er die von ihm selbst gemachten Beobachtungen mit: «Die innere Fläche der Höhle des Uterus, sagt er [2]), hatte ein von dem gewöhnlichen ganz verschiedenes Ansehen, welches, namentlich wenn der Uterus im Wasser lag, deutlich hervortrat. Dieselbe hatte nämlich eine sehr zarte, scheinbar zottige Beschaffenheit, welche besonders auf den Schnitträndern deutlich hervortrat. Die Fläche selbst, von oben betrachtet, erschien wie fein durchlöchert, oder vielmehr dicht mit kleinen weissen

1) Entwickelungsgeschichte des Hundeeies von Th. Ludw. Wilh. Bischoff, mit 15 Steintafeln. Braunschweig 1845. 4. p. 114, 115; und Taf. XIV.

2) Müller's Archiv. f. d. Anatomie, Physiologie etc. 1846. Heft II. p. 115. Die in dieser Abhandlung citirten Abbildungen fehlen zur Zeit noch.

Punkten besetzt, welche auf den Durchschnitten als die freien Enden der scheinbaren, ebenfalls weiss erscheinenden Zöttchen erkennbar waren. Diese Zöttchen waren aber in der That keine solche, denn erstens waren sie alle durch eine halbdurchscheinende Masse mit einander verbunden; dann aber war es für einen des Gegenstandes kundigen leicht, bei schwächeren und stärkeren Vergrösserungen und an senkrechten Durchschnitten zu erkennen, dass dieselben kleine $1\frac{1}{2}$ bis 2 Par. Lin. lange cylindrische Drüsenschläuche waren. Gegen die Substanz des Uterus zu endigten sie blind ohne durch eine deutliche geschiedene Schleimhaut hindurch zu treten, sondern sie stiessen mit ihren blinden Enden auf das Fasergewebe des Uterus auf. Ihr Verlauf war im ganzen gestreckt, schwach geschlängelt; ich sah keine sich verzweigenden oder untereinander anastomosirenden Gänge, die aber nach Analogie bei Thieren doch wohl vorhanden sein könnten. Unzweifelhaft waren sie dieselben Gebilde, welche Ed. Weber und v. Bär[1]) als Zöttchen beschrieben haben. Diese Drüsen scheinen im nicht schwangeren Zustande nur sehr unentwickelt, fast nur wie kleine Crypten und Follikel vorhanden zu sein; nach erfolgter Conception aber alsbald stark zu wachsen, während zugleich auch Exsudation von der Fläche des Uterus erfolgt, und die Drüsen so gewissermassen in das Exsudat hineinwachsen. Beides zusammen, die Drüsen und das Exsudat, bilden alsdann die Decidua, und an der Stelle des Eies, wo durch Anlage der Allantois die Zotten sich weiter entwickeln, die Placenta. Die Decidua ist daher in der That, wenn auch nicht die Membrana, doch das *Stratum uteri internum evolutum* und als solches theils Entwickelungsproduct vorhandener Gebilde, theils Neubildung. Bei der Geburt erfolgt eine wahre Abstossung der inneren Lage des Uterus, wahrscheinlich indessen mit Hinterlassung des blinden Grundes der Drüsencanälchen. Wie sich die mütterlichen Blutgefässe zu diesen erweiterten und die Zotten enthaltenden Canälchen in der Decidua und der Placenta verhalten, wird wie bisher beantwortet werden müssen. In der übrigen Decidua bilden sie nur gewöhnliche Capillarnetze. In der Placenta aber bleibe ich fortwährend der Ansicht E. H. Weber's zugethan, dass der Uebergang aus den Arterien in die Venen durch ein weites zartes Venenmaschennetz vermittelt wird, zwischen welchen die erweiterten Drüsencanälchen mit den in ihnen steckenden Zotten und deren Gefässen eingesenkt sind.»

1) Entwickelungsgeschichte. II. p. 266, und in v. Siebold's Journal. XIV. p. 403.

RESULTATE.

A. *Das aufgefundene Rudiment des Uterus bei dem Manne und bei männlichen Säugethieren betreffend.*

1) Bei den bis jetzt von mir untersuchten männlichen Säugethieren, namentlich beim Biber, Kaninchen, Pferde, Schweine, Hunde und Katze, giebt es ein unpaares, in der Mittellinie zwischen dem Ende der Harnblase und dem Mastdarme liegendes hohles Organ, welches das Rudiment des Uterus ist und von mir *Uterus masculinus* genannt wird.

2) Bei dem *Menschen* hat es die Gestalt einer länglichen Blase, die in der hintern Wand der Prostata eingeschlossen ist, und den *Colliculus seminalis* bilden hilft (Taf. I. Fig. 1. und 2. *u*).

3) Bei den neugeborenen männlichen und weiblichen *Kaninchen* (Taf. V. Fig. 2. und 3.) lässt sich das Geschlecht an den äusseren Geschlechtstheilen (*P* und *Cl.*) nicht mit Sicherheit unterscheiden, und auch die inneren sind sich so ähnlich, dass die Unterscheidung Aufmerksamkeit erfordert. Beide Geschlechter haben einen *Sinus urogenitalis*, beide einen Theil (*u*), der dem Grunde der Scheide und dem Körper des Uterus entspricht, in welchen sich beim weiblichen Geschlechte die Hörner des Uterus, bei dem männlichen die *Vasa deferentia d d* einmünden, die den Hörnern sehr ähnlich sind. Die Theile, welche der Scheide, dem Körper des Uterus und dessen Hörnern entsprechen, finden sich auch bei dem erwachsenen Kaninchen (Taf. V. Fig. 1. *u* und *D D*). Das Rudiment des Uterus zieht sich, wenn es bei erwachsenen Kaninchen mechanisch oder elektrisch gereizt wird, auf eine sichtbare Weise zusammen.

4) Bei dem männlichen erwachsenen *Biber* (Taf. VI.), und beim *Schweine* (Taf. IV. Fig. 5. *u u*) ist der *Uterus masculinus*, wie bei dem weiblichen Biber und Schweine, ein *Uterus bicornis* und liegt auch an derselben Stelle zwischen dem Mastdarme und der Harnblase in einer Falte der Bauchhaut, wie dieser.

5) Bei dem *Hunde* (Taf. VIII. Fig. 1. *u*) scheint das *Ostium uterinum* verwachsen zu sein, und also die Höhle des Uterus keinen Ausgang zu haben, und eben so verhält sichs bei dem *Kater*. Bei dem *Pferde* (Taf. III. Fig. 1. *u U u u*) und bei dem *Menschen* ist das *Ostium uterinum* desselben nur ausnahmsweise verwachsen, gewöhnlich aber öffnet sich der *Uterus masculinus* des Hengstes (Taf. IV. Fig. 1. *u*) am *Colliculus seminalis* durch eine einzige Oeffnung in die Urethra. Bei dem *Biber* und bei dem *Kaninchen* endlich ist das *Ostium uterinum* des männlichen Uterus niemals verwachsen, und bei dem letzteren ergiessen die *Vasa deferentia* den männlichen Saamen in den *Uterus masculinus* nahe über dem *Ostium uterinum*.

6) Bei Embryonen männlichen Geschlechts ist, wie Rathke beim *Schaafe* und *Schweine* entdeckt hat, der männliche Uterus dem weiblichen in einer gewissen Periode der Bildung so ähnlich, dass man beide kaum von einander unterscheiden kann, z. B. den des männlichen und weiblichen Schaafs (Taf. V. Fig 6. und 7.) und des männlichen und weiblichen Schweins (Taf. V. Fig. 4. und 5.).

7) Aus der von Ackermann beschriebenen Bildung der Geschlechtstheile eines vorherrschend männlichen menschlichen Zwitters (Taf. V. Fig. 8. und 9.) und aus einigen andern Fällen erkennt man, dass das Rudiment des Uterus bei männlichen Zwittern dem weiblichen Uterus sehr ähnlich sein könne, z. B. (Taf. V. Fig. 9. *u*), sowie umgekehrt der Uterus eines weiblichen Zwitters gleichfalls dem Rudimente des Uterus bei dem männlichen Geschlechte ähnlich sein kann.

B. *Die drüsenartigen Gebilde in der Nähe der Einmündungsstelle der Saamencanäle betreffend.*

8) Man hat daselbst 4 drüsenartige Gebilde zu unterscheiden: 1) das Drüsenende des *Vas deferens,* 2) die Saamenblasen, 3) die Prostata, 4) die Cowper'schen Drüsen.

9) *Das Drüsenende des Vas deferens* liegt nahe über der Stelle, wo dasselbe in den *Ductus ejaculatorius* übergeht, und entsteht dadurch, dass es daselbst ringsum von Drüsen umgeben wird, die selbst aus kleineren und noch kleineren Zellen zusammengesetzt sind. Bei dem *Pferde* (Taf. III. Fig. 2. und 1. *DD* und Taf. IV. Fig. 1. *D*, und Fig. 2. und 3.), bei dem *Menschen* (Taf. II. Fig. 1. bis 4. *D*) und bei dem *Biber* (Taf. VI. *DD*) ist der Bau dieses Organs dadurch sichtbar gemacht worden, dass die Drüsen desselben mit erstarrender Injectionsmasse erfüllt und in natürlicher Grösse abgebildet wurden, bei dem *Kaninchen* ist dieses Organ (Taf. V. Fig. 1. *DD*) dargestellt, wie es sich ausnimmt, wenn die Drüsen desselben nicht erfüllt sind. Es sondert einen Saft ab zur Verdünnung des Saamens und zur Vergrössernng seines Volumens. In ihm wird vielleicht auch zu anderer Zeit Saame resorbirt.

10) Die *Saamenblasen* hängen beim *Menschen* und beim Pferde mit dem *Vas deferens* zusammen, und in dem in ihnen eingeschlossenen Safte findet man, wenn das *Vas deferens* mit Saamenthierchen erfüllt ist, zwar auch Saamenthierchen, aber in sehr geringer Menge. Der Saame wird durch einen in dem *Drüsenende des Vas deferens* und in der *Saamenblase* abgesonderten Saft verdünnt.

11) Daher fand ich in einem aus dem *Vas deferens* des Hengstes genommenen Tröpfchen Saamen verhältnissmässig viel mehr Saamenthierchen und weniger andere Materie, in einem aus dem *Drüsenende des Vas deferens* desselben Thiers genommenen Tröpfchen, verhältnissmässig weniger Saamenthierchen und mehr andere Materie, und endlich in einem aus der Saamenblase

genommenen Tröpfchen nur sehr wenig Saamenthierchen und viel andere Materie.

12) Die auseinandergelegte Saamenblase bildet bei manchen Menschen einen einzigen langen, mit kurzen knospenartigen Auswüchsen versehenen Canal, (Taf. II. Fig. 2. *s*) bei andern theilt sie sich in mehrere längere Aeste (Taf. II. Fig. 3. und 4. *s*).

13) Wenn die Saamenblase des Menschen mit erstarrender Flüssigkeit erfüllt und ihrer Hülle, ihrer Muskelfasern und ihres Zellgewebes beraubt wird, sieht man, dass ihre Schleimhaut aus untereinander verwachsenen Zellen besteht, die selbst wieder aus noch kleineren Zellen zusammengesetzt sind (Taf. II. Fig. 1. *s*).

14) Dem Hunde (Taf. VII. Fig. 1.) fehlen die Saamenblasen ganz, und das Drüsenende des *Vas deferens* (*D D*) ist sehr klein. Vielleicht dauert deswegen bei ihnen die Begattung sehr lange.

15) Bei denjenigen Thieren, bei welchen die Saamenblase und das *Vas deferens* sich nicht vereinigen, bevor sie in die Harnröhre übergehen, ist es in manchen Fällen schwer, die Saamenblasen und Prostatadrüsen von einander zu unterscheiden.

16) Da bei dem Menschen und bei dem Pferde die Saamenblase und das *Vas deferens* zusammenmünden, und die erstere dennoch wenig Saamenthierchen und viele andere Materie enthält, und folglich keineswegs dazu hauptsächlich bestimmt ist, dass sich der Saame in ihr ansammle, sondern dazu, dass in ihr eine Flüssigkeit abgesondert werde, so ist es nicht rathsam, Organe, die in ihrem Baue der Saamenblase ähnlich sind, blos deswegen für Prostatadrüsen zu erklären, weil sie sich nicht mit dem *Vas deferens* vereinigen, bevor sie in die Harnröhre übergehen.

17) Wenn in einzelne *Ausführungsgänge* der *Prostata* erstarrende Flüssigkeit eingespritzt wird und dieselbe bis in die Enden der Gänge dringt, so bemerkt man beim *Menschen* (Taf. IV. Fig. 4.), beim Hunde und beim Pferde (Taf. III. Fig. 1. *p*), dass die Ausführungsgänge im Verhältnisse zu ihrer geringen Länge sehr weit und unmittelbar mit Drüsenläppchen besetzt sind, die durch weite Oeffnungen sich in sie einmünden, und dass die kleineren Aeste der Ausführungsgänge selbst längliche Drüsenläppchen sind, deren Wände durch Einschnitte in grössere Zellen eingetheilt sind, welche selbst wieder durch kleinere und noch kleinere Einschnitte und Furchen in kleinere und noch kleinere, mit weiten Mündungen versehene, unter einander verwachsene Zellen getheilt werden. Die *kleinsten Zellen* der *menschlichen Prostata*, die man aber nur im frischen Zustande sehen konnte, hatten ungefähr $^1/_{29}$ bis $^1/_{39}$ Par. Lin. im Durchmesser, eben so gross waren die des *Hundes*, beim *Pferde* fand ich ihren Durchmesser ungefähr $^1/_{21}$ Par. Lin.; indessen ist es möglich, dass auch diese Zellen abermals durch noch kleinere Furchen in noch kleinere Zellen eingetheilt sind.

18) Beim *Biber* besteht die Prostata aus birnförmigen Blasen Taf. VI. *pp*. Bei dem *Kaninchen* ist sie in ihrem Bau einer Saamenblase ähnlich Taf. V. Fig. 1. *p*.

C. *Die schlauchartigen Drüsen des Uterus betreffend.*

19) Nach der Conception wird die Schleimhaut im Körper des menschlichen Uterus weich und nach und nach 2 bis 3 Linien dick, und erhält den Namen *Tunica decidua uteri.* Diese Veränderung beruht auf dem Wachsthume theils der gefässreichen, theils der gefässlosen Lage dieser Haut, d. h. ihres Epithelii.

20) In dem gefässreichen Theile der Schleimhaut des menschlichen Uterus vergrössern sich die Blutgefässe und die schlauchartigen Uterindrüsen (Taf. VIII. Fig. 4. und 7.), und zwischen diesen Organen bilden sich viel neue, zum Theil kernhaltige Elementarzellen.

21) Die zufolge der Conception vergrösserten *Uterindrüsen* des *Menschen* sind geschlängelte, 2 bis 3 Linien lange, schlauchartige Drüsen, welche wie die Magendrüsen, senkrecht nach der innern Oberfläche der Schleimhaut hinlaufen, daselbst enger werden und sich durch die Oeffnungen münden, die man schon längst an der *Tunica decidua* kennt, und die der *Tunica decidua* ein siebförmiges Ansehen geben. Ihr anderes geschlossenes Ende theilt sich nicht selten in 2 bis 3 Bläschen. Sie sind nicht ästig, sondern theilen sich selten einmal in 2 Schläuche. Taf. VIII. Fig. 5.

22) Die *Uterindrüsen* des *Hundes* und der *Katze* vergrössern sich nach der Conception nur an dem Orte beträchtlich, wo die Placenta entsteht. Sie sind auch in nicht trächtigen Thieren sichtbar und bestehen aus zweierlei Arten von Drüsen, aus kleinen einfachen (Taf. IX. Fig. 1. *aa*) und aus grossen ästigen (Fig. 1. *bb*).

23) Beide vergrössern sich nach der Conception, und zwar die kleinen einfachen Drüsen in ihrer ganzen Länge, die grossen ästigen an demjenigen Theile des Stammes, der ihrer Mündung nahe liegt. Die sich dadurch bildenden sackförmigen Erweiterungen dieser Drüsen berühren die Mutterblut führenden Blutgefässe, welche in der Decidua zwischen den Uterindrüsen liegen, drängen sich mit Zipfeln und Falten zwischen sie, und wickeln sie auf eine ähnliche Weise ein, als der menschliche Dickdarm von der Bauchhaut eingehüllt ist.

24) Die Zotten des Chorion, welche das embryonische Haargefässnetz der Nabelgefässe tragen, wachsen in die erweiterten Oeffnungen der Uterindrüsen hinein, füllen die erweiterten Theile dieser Drüsenschläuche aus, und schmiegen sich genau an alle Falten und Zipfel derselben an, verwachsen mit ihnen, und bilden zusammen eine einzige Membran, die nur embryonische Gefässe besitzt.

25) Von dieser Membran und ihren Zipfeln und Falten werden auf die angegebene Weise die einzelnen Blutgefässe der Decidua umhüllt.

26) Wahrscheinlich verdünnt sich nach dieser Verwachsung der Theil der Membran, der von den Wänden der Uterindrüsen herrührt, durch Resorption.

27) In die nicht ausgedehnten Aeste der Uterindrüsen und ihre geschlossenen Enden scheinen die Zotten des Chorion nicht einzudringen.

28) Auf die angegebene Weise kommt der Bau der ausgebildeten Placenta des Hundes zu Stande, der darin besteht, dass die ganze Placenta von einem groben Netze von Mutterblut führenden geschlängelten Haargefässen durchzogen ist, die einen sehr grossen Durchmesser (ungefähr von $^1/_{52}$ bis $^1/_{62}$ Par. Lin.) haben; dass die Röhren dieses Gefässnetzes, jede einzeln, in einer Membran eingewickelt und von ihr dicht überzogen sind, welche ein viel engeres Netz äusserst dünner embryonischer Gefässe trägt, dessen Röhrchen ungefähr $^1/_{173}$ bis $^1/_{234}$ Par. Lin. im Durchmesser, und folglich einen mehr als 3 Mal kleineren Durmesser (oder, was dasselbe ist, einen mehr als 9 Mal kleineren Querschnitt) haben als die Mutterblutgefässe, die sie überziehen.

29) Dass endlich auf diese Weise das Embryoblut in engen Röhrennetzen an der Oberfläche der weiten, Mutterblut führenden Röhren vorüberfliesst, ohne dass diese beiden Gefässarten unter einander communiciren, und folglich auf die Weise, dass die beiden Blutarten nicht in einander überfliessen können, sondern so, dass sie nur in eine sehr vielfache mittelbare Berührung kommen, und dass also beide Classen von Röhren in einer ähnlichen Verbindung sind wie die kleinen Luftröhrenzweige und die dieselben überziehenden Haargefässe der Lungen.

30) Bei dem *Menschen* scheinen sich die Uterindrüsen an der ganzen innern Oberfläche des Grundes und Körpers ziemlich gleichmässig zu vergrössern. Eine theilweise Vergrösserung ihres Stammes zu weiten gefalteten Säcken habe ich noch nicht beobachtet. Auch habe ich bei einem etwa 10 Wochen schwangern Uterus nicht wahrgenommen, dass die dem Uterus zugekehrten ästigen Zotten des Chorion in Oeffnungen eingedrungen und in Zellen verborgen gewesen wären. Vielmehr lagen sie frei und locker da. Auch entspricht die einfache Gestalt der Schläuche der menschlichen Uterindrüsen nicht den vielfach in Zweige und Reiser getheilten Zotten des Chorion.

31) Es ist daher noch nicht als erwiesen anzunehmen, dass die Zotten des Chorion bei dem Menschen auf eine ähnliche Weise in die Schläuche der Uterindrüsen hineinwüchsen wie bei dem Hunde. Denn da nur der Mensch eine *Tunica decidua reflexa* besitzt und sich dadurch sehr von andern Säugethieren unterscheidet, so kann auch in der Art und Weise wie sich die Placenta bildet zwischen Hunden und Menschen eine Verschiedenheit stattfinden.

32) Die *Placenta uterina* des Menschen unterscheidet sich dadurch von der des Hundes, dass das grobe, Mutterblut führende Gefässnetz, welches die ganze Placenta durchzieht, bei dem Menschen aus Röhren besteht, die einen viel grösseren Durchmesser und viel dünnere Wände haben, nämlich einen Durchmesser, der ungefähr 15 Mal grösser ist als bei dem Mutterblut führenden Haargefässen in der Placenta des Hundes, zweitens dadurch, dass der andere Bestandtheil der Placenta, die Zotten des Chorion, welche ein dichtes Netz enger embryonischer Haargefässe tragen, bei dem Hunde Membranen und Falten, bei dem Menschen dagegen Bäumchen mit cylindrischen Aesten und Zweigen bilden, die sich zuletzt in sehr dünne Fäden theilen, die hier und da knospenartige Verdickungen haben. Drittens, dass es in der menschlichen Placenta keine Mutterblut führenden Haargefässe im gewöhnlichen Sinne, sondern nur

Gefässe giebt, die $^1/_4$ bis $^3/_4$ Linie und mehr im Durchmesser haben und daher colossale Haargefässe oder Venen genannt werden müssen, und dass daher auch die $^1/_4$ bis $^3/_4$ Linie dicken Arterienzweige, welche das Mutterblut aus dem menschlichen Uterus in die Placenta führen, sich nicht zu wiederholten Malen in Aeste theilen, sondern bei ihrem Uebergange in die Placenta einen Arterienknäul, *Glomus arteriosus*, bilden, der aus einer einzigen hin- und hergebogenen Arterie besteht, die sich zuletzt unmittelbar in das Netz jener colossalen Haargefässe oder Venen fortsetzt, welche die ganze Placenta durchziehen.

33) Sowohl bei den Hunden als bei den Menschen kommen in der ausgebildeten Placenta die Mutterblut führenden, mit den Embryoblut führenden Gefässen in eine innige Berührung. Zu diesem Zwecke aber sind bei dem Hunde die Mutterblut führenden Gefässe der Placenta einzeln in den Häuten und Falten der Zotten des Chorion eingewickelt und von ihnen überzogen, dagegen sind bei dem Menschen die Zweige und Fäden der Chorionzotten von den Wänden der sehr weiten und dünnwandigen Mutterblutgefässe überzogen und eingewickelt, welche die Zwischenräume zwischen ihnen ausfüllen, sich an sie anschmiegen und sie umhüllen.

34) Sollte es sich in Zukunft zeigen, dass die Chorionzotten auch beim Menschen ebenso wie bei dem Hunde in die Schläuche der Uterindrüsen hineinwüchsen und dieselben ausfüllten, so würde daraus nur folgen, dass die Zweige und Endfäden der Chorionzotten einen, von der Wand der Uterindrüsen herrührenden, dünnen, verwachsenen Ueberzug erhielten. Im Uebrigen könnte auch dann die Ansicht über die Structur der Placenta und über die Wirkungsart ihrer Organe dieselbe bleiben. Derselben Meinung ist auch Bischoff.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1.

Das Rudiment des Uterus beim Manne in der senkrecht durchschnittenen Prostata dargestellt.

Die *Symphysis ossium pubis*, die mässig ausgedehnte Harnblase, die Prostata und die Harnröhre wurden in ihrer Mitte senkrecht durchschnitten und so gezeichnet, wie sie sich ausnehmen, wenn sie von der Durchschnittsfläche aus betrachtet werden. Die linke Saamenblase nebst dem *Vas deferens* und dem *Uterus masculinus* blieben hier unverletzt.

pp Die vordere und hintere Wand der Prostata.

u Der *Uterus masculinus*, oder die *Vesicula prostatica* durch eingeblasene Luft ausgedehnt.

s Die linke Saamenblase.

D Das Drüsenende des linken *Vas deferens* und sein Zusammenhang mit der Saamenblase.

e Der *Ductus ejaculatorius*, der in die Prostata eintritt, an dem *Uterus masculinus* hinläuft und sich bei *u* am *Colliculus seminalis* auf der hinteren Wand der Harnröhre öffnet.

p′ Der sogenannte mittlere Lappen der Prostata, welcher an der hintern Wand der Harnröhre über dem *Uterus masculinus* und zwischen den beiden *Ductibus ejaculatoriis* liegt, von welchen man hier nur den linken sieht.

Man sieht hieraus, dass der *Uterus masculinus* des Menschen eine ovale am unteren Ende zugespitzte Blase ist, welche durch die Auftreibung, die sie an der hintern Wand der Urethra hervorbringt, den *Colliculus seminalis* oder das *Caput Gallinaginis* bilden hilft.

Fig. 2.

Das Rudiment des Uterus, Uterus masculinus, des Menschen, in einer Prostata dargestellt, deren vordere Wand durchschnitten und auseinandergelegt ist.

pp Die vordere Wand *der Prostata* rechts und links auseinander gezogen.

u Das Rudiment des Uterus, *Uterus masculinus*, an der hinteren Wand des in der Prostata eingeschlossenen Theiles der Harnröhre sichtbar, und durch eingeblasene Luft ausgedehnt.

u′ Die einfache Oeffnung, durch welche sich der *Uterus masculinus* am *Colliculus seminalis* in die Harnröhre öffnet. Bisweilen verwächst diese Oeffnung.

ee Die zwei engen Oeffnungen für die beiden *Ductus ejaculatorii* am *Colliculus seminalis*.

Neben dem *Uterus masculinus* sieht man auf der Wand der Urethra einige Tröpfchen prostatischen Saftes ausgetreten, welche die Orte anzeigen, an welchen sich Gänge der Prostata in die Harnröhre münden. In dem *Uterus masculinus* münden sich keine solchen Gänge.

Ur Anfang des *Isthmus urethrae*.

uret Die die Wand der Harnblase an der Seite des *Corpus trigonum* in schiefer Richtung durchbohrenden Ureteres.

v Die hintere Wand der sehr muskulösen geöffneten Harnblase.

TABULA I.

Fig. 1.

Situs rudimenti uteri, seu uteri masculini, humani in prostata media dissecta repraesentatus.

Dissecui symphysin ossium pubis, mediam vesicam urinariam non multum expansam, prostatam, urethramque, partesque has dissectas delineavi ita, ut uterus masculinus, vesica seminalis sinistra et finis glandulosus vasis deferentis illaesi cernerentur.

pp Paries anterior et posterior prostatae.

u Uterus masculinus, seu vesicula prostatica, aëre inflato tumidus.

s Vesicula seminalis sinistra.

D Finis glandulosus vasis deferentis sinistri ejusque cum vesicula seminali conjunctio.

e Ductus ejaculatorius per prostatam penetrans, in superficie uteri masculini procedens, et in pariete posteriori urethrae in superficie colliculi seminalis in urethram transiens.

p′ Lobus sic dictus medius prostatae supra uterum et inter utrumque ductum ejaculatorium positus.

Uterus masculinus humanus vesica est fere ovalis in pariete posteriori prostatae recondita, apex ejus inferiora versus aperturam habet in urethram hiantem. Vesica haec in urethra tumorem gignit, quem colliculum seminalem vel caput Gallinaginis anatomici dixerunt.

Fig. 2.

Rudimentum uteri seu uterus masculinus humanus, in conspectum prodiens, pariete anteriori prostatae dissecto et aperto.

pp Paries anterior prostatae dissectus atque dextrorsum et sinistrorsum distractus.

u Rudimentum uteri, seu uterus masculinus, in pariete posteriori urethrae, prostata inclusae, prominens, aëre inflato tumens.

u′ Ostium simplex, quo uterus masculinus in colliculo seminali urethrae hiat.

ee Ostia duo parva ductus ejaculatorii utriusque in urethram aperti.

Juxta uterum masculinum guttulae quaedam succi prostatici in superficie urethrae conspiciuntur, loca indicantes, in quibus ductus excretorii prostatae in urethram aperti sunt. In uterum masculinum tales ductus non abeunt.

Ur Initium isthmi urethrae.

uret Ureteres in lateribus corporis trigoni obliqua directione in vesicam urinariam hiantes.

v Paries posterior vesicae urinariae valde musculosae apertae.

TAFEL II.

Fig. 1.

Das Rudiment des männlichen Uterus beim Menschen, Uterus masculinus, in seiner Lage zwischen beiden Ductibus ejaculatoriis, und der drüsenartige Bau der Saamenblasen und das Drüsenende des Vas deferens.

Die Theile sind im getrockneten Zustande dargestellt. Der obere Theil der Harnblase wurde abgeschnitten, die Harnblase am Blasenende verstöpselt, der Saft aus den Saamenblasen und aus der Prostata gepresst, und nun durch die *Vasa deferentia* und Urethra erstarrende Flüssigkeit mit Gewalt eingespritzt, welche die *Vasa deferentia,* Saamenblase und Urethra erfüllte, auch in einige prostatische Gänge eindrang, nicht aber in den *Uterus masculinus* gelangte. Dieser musste daher noch besonders erfüllt werden. An dem Drüsenende der *Vasa deferentia* wurde die Hülle von Zellgewebe und Muskelfasern weggenommen, so dass die Schleimhaut allein übrig blieb.

v Die untere Hälfte der Harnblase von ihrer hinteren Seite.

dd Die beiden *Vasa deferentia.*

DD Das Drüsenende der *Vasa deferentia.* Der Canal ist hier nicht nur erweitert, sondern auch mit Drüsenläppchen besetzt, die selbst wieder aus kleineren, untereinander verwachsenen Zellen zusammengesetzt sind.

ss Die beiden Saamenblasen, an welchen man die Zellen sieht, welche an der Wand derselben dicht neben einander liegen.

ee Die beiden *Ductus ejaculatorii,* in die das Drüsenende des *Vas deferens* und die Saamenblase übergehen.

u Das Rudiment des Uterus, *Uterus masculinus.*

pp Drüsenläppchen der Prostata, in welche die Injectionsmasse eingedrungen ist. Alle nicht erfüllten Theile der Prostata sind hinweggenommen.

Ur Die durch die Einspritzung sehr erweiterte Urethra.

Fig. 2.

Eine mit eingespritzter erstarrender Flüssigkeit erfüllte und dann entwickelte menschliche Saamenblase, welche nur kurze knospenartige Aeste hat.

s Die Saamenblase.

D Das Drüsenende des *Vas deferens* das mit knospenartigen Auswüchsen versehen ist, die selbst wieder aus kleinen Zellen bestehen.

e Der *Ductus ejaculatorius.*

Fig. 3.

Eine ebenso behandelte Saamenblase, welche viele längere Aeste hat, die hier und da selbst wieder knospenartige Auswüchse haben. Das Drüsenende des *Vas deferens* besitzt gleichfalls zahlreiche und knospenartige Auswüchse, die oben klein, unten beträchtlich gross sind.

Fig. 4.

Eine ebenso behandelte Saamenblase, welche sich in wenige lange Aeste theilt. Die Buchstaben haben dieselbe Bedeutung.

TABULA II.

Fig. 1.

Rudimentum uteri seu uterus masculinus humanus, a latere posteriori conspectus, una cum ductibus ejaculatoriis, quibus interpositus est, nec non structura glandulosa vesiculae seminalis et finis glandulosi vasis deferentis.

Praeparatum hoc modo confectum est: Collum vesicae urinariae apertae subere clausum, succus, vesiculis seminalibus, vasis deferentibus et prostata contentus, pressione forti et diu continuata harum partium expulsus est. Quo facto in vasa deferentia et urethram materia fluida mox solidescens tanta vi injecta est, ut non solum cellulae minimae vesicularum seminalium et vasorum deferentium replerentur, sed etiam materia in nonnullos ductus excretorios prostatae impelleretur. Quoniam vero materia haec injecta non in uterum masculinum intravit, hunc alio modo replere necesse erat. Ut vero cellulae vesicularum seminalium et vasorum deferentium clarius in conspectum prodirent, telae has partes tegentes, fibraeque musculares earum sublatae sunt, ita ut membrana pituitosa nuda ante oculos poneretur.

v Pars inferior vesicae urinariae a latere posteriori conspectae.

dd Vasa deferentia.

DD Finis glandulosus vasorum deferentium. In hoc fine tumido non solum canalis vasis deferentis amplior est, sed etiam a lobulis glandulosis circumdatur, qui ex minoribus cellulis constant.

ss Vesiculae seminales earumque cellulae.

ee Ductus ejaculatorii.

u Rudimentum uteri, seu uterus masculinus.

pp Lobuli nonnulli prostatae, in quorum ductus materia fluida injecta intravit.

Ur Urethra per injectam materiam multum amplificata.

Fig 2.

Vesicula seminalis humana, per materiam injectam repleta et postea explicata. Clarum est, hanc vesiculam ex uno longiori canali constare, qui brevissimis tantum ramis, gemmarum formam habentibus, instructus est.

s Vesicula seminalis.

D Finis glandulosus vasis deferentis.

e Ductus ejaculatorius.

Fig. 3.

Vesicula seminalis eodem modo praeparata, longioribus ramis instructa

s Vesicula seminalis.

D Finis glandulosus vasis deferentis.

e Ductus ejaculatorius.

Fig. 4.

Vesicula seminalis eodem modo praeparata, paucis sed longioribus ramis instructa.

TAFEL III.

Fig. 1.

Der Uterus masculinus des Pferdes nebst den beiden quer durchschnittenen Drüsenenden des Vas deferens, der linken Saamenblase und des rechten Theils der injicirten Prostata.

u Uuu Der *Uterus masculinus* des Hengstes, der in diesem Falle keine offene, in die Harnröhre gehende Mündung hatte, und in seinem unteren Theile sehr erweitert war. Diese Verschliessung existirte bei 2 andern Pferden nicht. Der hier abgebildete *Uterus masculinus* war 9 Par. Zoll lang. Um die Abbildung etwas zu verkleinern, ist an der dargestellten Lücke ein 2 Zoll langes Stück hinweggelassen worden. Oben spaltet er sich in 2 Hörner, von welchen das linke kürzer als das rechte ist.

D D sind die Drüsenenden der *Vasa deferentia*, die ungefähr in der Mitte quer abgeschnitten sind. Das linke mündet sich in das untere Ende der Saamenblase, das rechte kann man, weil die Saamenblase weggenommen ist, bis an sein Ende verfolgen.

s die linke aufgeblasene Saamenblase. Eine so einfache Saamenblase kenne ich bei keinem andern Säugethiere. Die grosse Oeffnung, durch welche sie sich am *Colliculus seminalis* mündet, ist die gemeinschaftliche Oeffnung der Saamenblase und des *Vas deferens* und ist hier so dargestellt, wie sie sich ausnimmt, während sie aufgeblasen wird.

p Der rechte Lappen der Prostata, in welchen erstarrende gefärbte Flüssigkeit eingespritzt worden ist, die alle Gänge bis zu den Endbläschen erfüllt hat. Die kleinsten Zellen, welche ungefähr $^1/_{21}$ Par. Linie im Durchmesser haben, konnten hier nicht dargestellt werden. Die Ausführungsgänge sind offenbar sehr weit und die Endzweige derselben hohle Endläppchen.

Fig. 2.

Das Drüsenende des Vas deferens des Pferdes, wenn seine Drüsen mit eingespritzter erstarrender Flüssigkeit angefüllt sind. Die äussere Hülle ist weggenommen, und so sieht man ein Netz von Linien, die durchschimmernde Zwischenwände vorstellen, durch welche die das *Vas deferens* umgebende Drüsenmasse in kleinere und kleinere Läppchen abgetheilt wird. Diese Eintheilung geht aber in der Wirklichkeit viel weiter, als sie hier gezeichnet werden konnte, nämlich so weit, dass die kleinsten mit dem Mikroskope unterscheidbaren Abtheilungen etwa $^1/_{29}$ Par. Lin. maassen. Das obere dünne Ende ist das *Vas deferens*, ehe es diese Anschwellung bildet. Das untere dünnere Ende ist der Gang, durch den es sich in das Ende der Saamenblase einmündet.

TABULA III.

Fig. 1.

Uterus masculinus equi una cum finibus glandulosis vasorum deferentium, vesica seminali sinistra et parte dextra prostatae, injecta materia repletae.

u Uu u Uterus masculinus equi, ostio uterino plane carens. Inferior uteri pars valde dilatata est. Jn duobus aliis equis ostium uterinum in urethram apertum inveniebatur. Hic uterus masculinus novem pollices Paris. longus et in fine superiori in duo cornua inaequalia fissus est. Effigies ejus, ne modum excederet, brevior facta est.

D D Fines glandulosi vasorum deferentium transversim secti. Sinister finis cum fine vesiculae seminalis coalescit, dexter finis, vesicula seminali ablata, totus in conspectum prodit.

s Vesicula seminalis sinistra aëre expansa. In nullo alio mammali vesicula seminalis tam simplex est, quam in equo. Magnum ostium, in fine inferiori ejus conspicuum, vesiculae seminali et vasi deferenti commune est. Cujus ostii interventu hae partes in colliculo seminali in urethram hiant. Ostium aëre inflatum est.

p Lobus dexter prostatae. Ductus ejus usque ad fines injecta materia repleti sunt. Cellulae, parietes ductuum et cellularum majorum formantes, quoniam nimis parvae sunt, earumque diameter $^1/_{21}$ Lin. Par. aequiparanda est, delineari non poterant. Ductus excretorii prostatae perampli sunt, finesque eorum pro cavis lobulis habendi sunt, qui sepimentis minoribus in cellulas dividuntur.

Fig. 2.

Finis glandulosus vasis deferentis equi, cujus glandulae injecta materia repletae sunt. Tunica externa hujus organi remota, septula pellucentia in conspectum prodeunt, quibus lobuli glandulares in minores lobulos dividuntur. Minora septula, cellulaeque parietum tam exiguae sunt, ut delineari non potuerint. Diameter cellularum minimarum enim $^1/_{29}$ Lin. Paris. aequiparanda est. Canalis angustior, in suprema parte hujus organi conspicuus, vas deferens est.

TAFEL IV.

Fig. 1.

Eine andere Form des Uterus masculinus des Pferdes nebst den Mündungen der Saamenblasen und des Uterus am Colliculus seminalis.

u Der *Uterus masculinus*, dem hier der lange obere in zwei Hörner sich theilende Anhang fehlt.

D Das injicirte Drüsenende des *Vas deferens* der rechten Seite, welches oben abgeschnitten ist.

dd Der enge Canal, in den sich das Drüsenende des *Vas deferens* auf der rechten und linken Seite fortsetzt, um sich am Ende der Saamenblase zu münden. Auf der linken Seite ist dieses Ende der in die Harnröhre gehenden Saamenblase aufgeschnitten, und man sieht daselbst bei *d* das Ende des *Vas deferens*. Auf der rechten ist das Ende des *Vas deferens* in die Saamenblase nicht aufgeschnitten. Zwischen diesen beiden Mündungen der Saamenblasen liegt bei *u* die Oeffnung des *Uterus masculinus* in die Harnröhre. Alle diese Oeffnungen sind dargestellt, wie sie sich ausnehmen, wenn sie aufgeblasen werden.

CC Die Cowper'sche Drüse, die hier zum Theil von einem Stück der hinteren Wand der Harnröhre verdeckt wird, auf der sich bei *C* ihre Ausführungsgänge öffnen.

Fig. 2.

Ein Stückchen des injicirten Drüsenendes des Vas deferens des Pferdes, so dargestellt, dass man den Querschnitt sieht. Man bemerkt hier in der Mitte den Canal des *Vas deferens*, aus welchem die Injectionsmasse wieder herausgenommen worden ist. Rings um ihn herum, wie die Blumenblätter einer Blume, sind die dreieckigen Drüsenläppchen sichtbar, die sich mit ihrem spitzen Ende in den Canal des *Vas deferens* einmünden.

Fig. 3.

Ein Stück des injicirten Drüsenendes des Vas deferens des Pferdes, der Länge nach halbirt. Man sieht hier den Canal des *Vas deferens* und die Spitzen der Drüsenläppchen, die sich in ihn einmünden.

Fig. 4.

Ein Stückchen der menschlichen injicirten Prostata, zehnmal im Durchmesser vergrössert. Die Gänge sind verhältnissmässig zu ihrer geringen Länge ziemlich weit, und ihre Wände so mit Läppchen besetzt, dass sie eigentlich aus untereinander verwachsenen Drüsenläppchen bestehen. Die Enden dieser Gänge sind längliche hohle Drüsenläppchen, die durch tiefere und weniger tiefe Scheidewände in kleinere Läppchen und Bläschen abgetheilt werden. Die kleinsten Zellen, die ich noch unterscheiden konnte, hatten einen Durchmesser von $^1/_{29}$—$^1/_{30}$ P. Lin.

Fig. 5.

Der Uterus masculinus eines kastrirten männlichen Schweins.

v Der untere Theil der Harnblase.

uuu Der *Uterus masculinus*, der oben in 2 Hörner getheilt ist und in einer zwischen der Harnblase und dem Mastdarme befindlichen Falte der Bauchhaut liegt.

dd Das *Vas deferens*, das hier kein Drüsenende zu bilden scheint.

PP Prostatadrüsen oder vielleicht auch Saamenblasen.

TABULA IV.

Fig. 1.

Uterus masculinus equi alius aliam formam habens.

u Uterus masculinus, multo minor et brevior, ostium habet in urethram hians, processu longo vero in duo cornua diviso, caret. In alio equo uterum in urethram apertum inveni, nihilo secius vero processum illum longum, in duo cornua divisum, detegi.

D Finis glandulosus vasis deferentis dextri, injecta materia repletus, media parte discissus.

dd Canalis angustior, quo finis glandulosus cum fine vesiculae seminalis communicat. In sinistro latere ostium vesiculae seminalis apertum est, ita ut finis *d* vasis deferentis in oculos incurrat, in dextro latere contra ostium vesiculae seminalis inflato aëre expansum videmus.

CC Glandula Cowperi a pariete posteriori urethrae tecta. In medio hoc pariete ductus excretorii glandulae Cowperi hiant.

Fig. 2.

Particula ex fine glanduloso vasis deferentis excisa, et ita delineata, ut superficiem sectionis transversae conspiciamus. In media parte canalis vasis deferentis cernitur, ex quo materia injecta exemta est. Hunc canalem glandulae pyramidalem formam habentes radiorum instar circumdant.

Fig. 3.

Particula ex fine glanduloso vasis deferentis excisa et secundum longitudinem divisa. E canali materia injecta exemta est, ita ut accuminati fines glandularum, in vas deferens hiantium, appareant.

Fig. 4.

Particula prostatae humanae materia injecta repletae. Ductus excretorii, si exiguam longitudinem eorum respexeris, satis crassi sunt. Parietes eorum e lobulis glandulosis, inter se concretis, constant, finesque ductuum pro lobulis cavis habendi sunt per multa septula in majores minoresque cellulas divisis. Cellulae minimae, diametrum $= {}^1/_{29} - {}^1/_{39}$ Lin. Paris. habentes, delineari non potuerunt.

Fig. 5.

Uterus masculinus suis castrati.

v Vesicae urinariae pars inferior.

uuu Uterus masculinus, in duo cornua divisus, plica peritonaei inclusus est, inter vesicam et intestinum rectum posita.

dd Vas deferens finem glandulosum non habens.

PP Corpora glandulosa, quibus aut Prostatae, aut vesicularum seminalium nomen adscribendum est.

TAFEL V.

Fig. 1.

Der Uterus masculinus eines sehr grossen brünstigen Kaninchens.

v Die aufgeblasene Harnblase.

dd Die *Vasa deferentia.*

DD Die Drüsenenden der *Vasa deferentia,* die sich im untern Theile des *Uterus masculinus* öffnen.

u Der *Uterus masculinus,* umgeben von der Saamenblase und der Prostata. Der *Uterus masculinus* ist hier von der Harnblase etwas entfernt, damit man die Drüsenenden der *Vasa deferentia* sehen könne. Oben hat er 2 stumpfe Zipfel, seine Höhle ist einfach, seine Wand ist muskulös. Durch den galvanomagnetischen Rotationsapparat oder auch mechanisch durch Berührung gereizt, zieht er sich zusammen.

p Eine unpaare Drüsenmasse, die ich für die Prostata halte. Ihre Gänge sind aufgeblasen.

s Ein doppelt vorhandenes Organ, welches hier nur auf der rechten Seite dargestellt werden konnte. Es ist aufgeblasen. Unten mündet es sich mit einem einzigen Gange in die Harnröhre, oben theilt es sich mit einem Male in viele geschlängelte Gänge, die mit knospenartigen geschlossenen Enden besetzt sind. Dieses Organ kann als Saamenblase oder auch als ein Theil der Prostata angesehen werden. Die zwischen ihm und *D* liegende Blase mündet sich getrennt in die Harnröhre, ist aber vielleicht nicht constant vorhanden.

CC Die Cowper'schen Drüsen.

Ur Die Urethra.

Fig. 2 und 3.

Der Uterus masculinus und femininus des neugebornen Kaninchens, nebst den übrigen Geschlechtstheilen in doppelter Grösse.

v Die *Vesica urinaria.*

Ur Die Urethra.

u Der *Uterus masculinus* und *femininus,* welche einander sehr ähnlich sind, sich mit der Urethra vereinigen und dadurch einen *Sinus uro-genitalis* bilden helfen.

TT Die Hoden, *Testes.*

ep ep Die Nebenhoden, *Epididymi.*

dd Die *Vasa deferentia,* welche sich in den *Uterus masculinus,* nicht an der Spitze, sondern an dessen unterem Theile nahe an seinem Ausgange einmünden. Ihr Ende entspricht den Hörnern des Uterus, nur mit dem Unterschiede, dass diese sich in den obersten Theil des *Uterus femininus* einmünden, die *Vasa deferentia* aber in den unteren Theil des *Uterus masculinus* gehen. Da die erwachsenen Kaninchen nur 2 Mutterhörner und keinen Körper des Uterus haben, so verwandelt sich bei ihnen der unpaare Theil *u* grösstentheils in dieScheide. Der männliche Uterus aber wird zu einem Organe, welches die Ausspritzung des Saamens bewirken hilft.

gu Das *Gubernaculum Hunteri.*

p Penis.

r *Intestinum rectum.*

oo Die Ovaria, sie entsprechen den Hoden des männlichen Geschlechts.

tt Die *Tubae Fallopii* entsprechen den Epididymis des männlichen Geschlechts.

l *Ligamentum uteri rotundum,* es entspricht dem *Gubernaculum Hunteri* des männlichen Geschlechts.

cl Die Clitoris, sie entspricht dem Penis bei dem männlichen Geschlechte.

Fig. 4 bis 7.

Figur 4 und 5 stellen den Uterus masculinus und femininus bei Schweineembryonen, Fig. 6 und 7 bei Schaafsembryonen nach Rathke in doppelter Grösse dar.

Die unverkennbare Aehnlichkeit zwischen dem *Uterus masculinus* und *femininus,* welche man auf den beiden letzten Figuren bei dem neugeborenen Kaninchen bemerkt, nimmt man bei unreiferem Alter nach Rathke's Untersuchungen auch bei Schweine- und Schaafsembryonen wahr, ungeachtet diese Embryonen aus einer Periode sind, wo der Penis *P* schon sehr entwickelt ist und sich von der Clitoris sehr unterscheidet.

v Die *Vesica urinaria.*

u Der *Uterus masculinus* und *femininus.*

ug Der *Sinus urogenitalis,* der durch die Vereinigung des Uterus und der Urethra in einen Canal entsteht.

uret Der Ureter.

dd Die *Vasa deferentia* die den Hörnern *uu* des *Uterus femininus* entsprechen.

oo Die Ovaria.

P Der Penis.

cl Die Clitoris.

Fig. 8. und 9.

Copie der Abbildung der äusseren und inneren Geschlechtstheile des von Ackermann beschriebenen Hermaphroditen.

Man sieht, dass derselbe Theil, den ich als *Uterus masculinus* betrachte, bei diesen Hermaphroditen dem *Uterus femininus,* wie er in der angehenden Schwangerschaft aussieht, sehr ähnlich ist.

vv Die beiden seitwärts geschlagenen Hälften der halbirten Harnblase.

ur ur Die halbirte Urethra.

u Der geöffnete hinter der Harnblase gelegene *Uterus masculinus.*

ug Der geöffnete *Sinus uro-genitalis,* in den sich der Uterus und die Urethra einmünden.

pp Die Prostata.

dd Die *Vasa deferentia,* die in der Wand des Uterus sich fortsetzen und als

ee *Ductus ejaculatorii* sich am Muttermunde öffnen, also an der gewöhnlichen Stelle, wo sich die *Ductus ejaculatorii* zu öffnen pflegen.

ss Mehrfache Biegungen des *Vas deferens,* vielleicht eine Andeutung der Saamenblase.

TT Die Hoden, *Testes.*

TABULA V.

Fig. 1.

Uterus masculinus cuniculi permagni ad coitum proni.

v Vesica urinaria inflato aëre magnopere expansa.

dd Vasa deferentia.

DD Fines glandulosi vasorum deferentium, in infimam partem uteri masculini intrantes.

u Uterus masculinus a vesica seminali dextra et a prostata circumdatus. Uterus masculinus paululum reclinatus est, ut fines glandulosi vasorum deferentium cerni possint. Superior ejus pars duos apices obtusos habet, cavum ejus simplex est, parietesque musculosi sunt. Irritatione mechanica aut galvanica contractiones uteri masculini cieri possunt.

p Glandula impar, quam prostatam appello, aëre inflato tumida.

s Vesicula seminalis uno orificio in urethram transiens. Ductus ejus protinus in quatuor ramos flexuosos dividitur, fines breves, gemmis similes, habentes. Forma igitur hujus organi Vesiculae seminali satis similis est. Non repugno autem, si quis eam pro parte Prostatae habuerit. Duplex haec vesica seminalis est, sinistra vero in imagine non cernitur. Num vesicula inter *s* et *DD* posita in aliis etiam cuniculis inveniatur, incertus sum.

CC Glandulae Cowperi.

Ur Urethra.

Fig. 2. et 3.

Uterus masculinus et femininus cuniculi neonati una cum caeteris organis genitalibus.

Imagines duplicem magnitudinem referunt.

v Vesica urinaria.

Ur Urethra.

u Uterus masculinus et femininus, sibi invicem admodum similes. Uterque ibi, ubi cum urethra in unum canalem convenit, sinum uro-genitalem, componit.

TT Testes.

ep ep Epididymi.

dd Vasa deferentia.

gu Gubernaculum Hunteri.

p Penis.

r Intestinum rectum.

oo Ovaria.

tt Tubae Fallopii.

l Ligamentum uteri rotundum, quod in femina eundem locum occupat, quam gubernaculum in mare.

Fig. 4—7.

Uterus masculinus et femininus in embryonibus suillis et ovilibus a Rathke detectus et duplici magnitudine delineatus.

In his etiam embryonibus forma et situs uteri in utroque sexu admodum similis est, quanquam in hac vitae periodo organa genitalia externa maris et feminae satis a se invicem discrepant.

v Vesica urinaria.

u Uterus masculinus et femininus.

ug Sinus uro-genitalis.

uret Ureter.

dd Vasa deferentia, quae cum cornu dextro et sinistro uteri *uu* comparanda sunt.

oo Ovaria.

cl Clitoris.

Fig. 8. et 9.

Imagines organorum sexus externorum et internorum hermaphroditi ab Ackermanno descripti.

P Penis.

Sc Scrotum.

vv Dextra et sinistra pars vesicae urinariae discissae.

ur ur Dextra et sinistra pars urethrae discissae.

u Uterus masculinus, a parte posteriori vesicae situs, apertus.

ug Sinus uro-genitalis seu vagina urethralis.

pp Prostata.

dd Vasa deferentia in pariete uteri procedentia et prope ostium ejus per aperturas

ee in urethram transeuntia, i. e. in eodem loco, quo ductus ejaculatorii in urethram transire solent.

ss Flexurae plures vasis deferentis, fortasse rudimentum vesiculae seminalis constituentes.

TT Testes.

TAFEL VI.

Der Uterus masculinus und die übrigen Geschlechtstheile eines brünstigen Bibers.

v Die Harnblase, *vesica urinaria.*

ur Der Uterus.

uu Der *Uterus masculinus,* welcher die Gestalt eines *Uterus bicornis* hat, und in einer Falte der Bauchhaut hinter der Harnblase liegt.

dd Die *Vasa deferentia.*

DD Die Drüsenenden der *Vasa deferentia,* welche hier mit Injectionsmasse so vollkommen erfüllt sind, dass man die grösseren Drüsenläppchen sieht mit welchen sie ringsum umgeben sind, und die selbst wieder aus kleineren Zellen bestehen.

ss Die linke Saamenblase und der Ort wo die rechte abgeschnitten ist. Diese letztere vereinigt sich in der Wand der Harnröhre mit dem *Vas deferens.* Auf der linken Seite schien dies nicht der Fall zu sein.

pp Prostata, die hier aus birnförmigen Blasen besteht, von welchen bisweilen 2 oder 3 einen gemeinschaftlichen Ausführungsgang haben.

Ur Die Urethra.

P Der Penis.

CC Die Cowper'schen Drüsen, die hier zwischen dem *Musculus ischiocavernosus* und einem Theile des *Bulbo cavernosus* zu liegen scheinen, der um den hier hinweggenommenen Mastdarm herumgeht.

g *Glans penis* mit dem hervorragenden Ruthenknochen.

TABULA VI.

Uterus masculinus et organa genitalia reliqua castoris ad coitum proni.

v Vesica urinaria.

ur Ureter.

uu Uterus masculinus bicornis in plica peritonaei positus.

dd Vasa deferentia.

DD Fines glandulosi vasorum deferentium injecta materia tam perfecte repleti, ut lobuli glandularum, a quibus circunmdati sunt, eorumque cellulae replerentur.

ss Vesicula seminalis sinistra et locus, ubi vesicula seminalis dextra abscissa est. Vesicula seminalis sinistra in urethra cum vase deferente conjungitur in eamque communi apertura hiat. Vesicula seminalis dextra vero non cum vase deferente conjungi videtur.

pp Prostata vesiculis piriformibus composita, quarum saepe plures uno ductu conjunctae sunt.

Ur Urethra.

P Penis.

CC Glandulae Cowperi inter musculos ischio-cavernosos et bulbo cavernosum positae. Pars musculi bulbo cavernosi circa intestinum rectum transit, quod hoc loco ablatum esse videmus.

g Glans penis cum osse ibi prominente.

TAFEL VII.

Fig. 1.

Uterus masculinus und Geschlechtstheile eines grossen Hundes.

v Die Harnblase.

dd Die *Vasa deferentia.*

DD Die Drüsenenden der *Vasa deferentia,* welche bei den Hunden sehr klein sind.

u Der *Uterus masculinus,* der sich nicht in die Harnröhre öffnete, sondern verschlossen war.

p Die Prostata, die im Baue der menschlichen ähnlich war.

Ur Der hier sehr lange und sehr fleischige *Isthmus urethrae.*

b Der *Bulbus cavernosus urethrae.*

cc Die *Corpora cavernosa penis.*

c′ Die mittlere Anschwellung der vereinigten *Corpora cavernosa penis,* welche vielleicht die schnelle Zurückziehung des Gliedes bei der Begattung hindert.

Ur Oeffnung der Urethra.

Fig 2.

Querschnitt des Penis des Hundes nahe an der Stelle, wo die beiden Corpora cavernosa penis sich vereinigt haben.

Der dunkle ovale Fleck ist die durchschnittene Harnröhre, umgeben von dem *Corpus cavernosum urethrae.* Die beiden *Corpora cavernosa penis* sind durch eine sehnige Scheidewand von einander getrennt und äusserlich von einer dicken sehnigen Hülle umgeben. Hinten bilden sie eine tiefe Furche, in der die Urethra liegt.

Fig. 3.

Querschnitt des Penis des Hundes an der Stelle gemacht, wo das Corpus cavernosum penis die mittlere Anschwellung bildet.

Die Scheidewand beider *Corpora cavernosa* ist verschwunden. Der hinterste Theil derselben hat sich in den Ruthenknochen verwandelt, der eine tiefe Furche hat, in welcher die von einem sehr dünnen *Corpus cavernosum urethrae* umgebene Harnröhre liegt.

Fig. 4.

Querschnitt des Penis des Hundes nahe am Ende der Eichel.

Auch hier vermisst man die sehnige Scheidewand der *Corpora cavernosa penis* und an ihrer Stelle findet man den Ruthenknochen, hinter welchem die von ihren *Corpus cavernosum* umgebene Urethra liegt. Beide werden von den verschmolzenen *Corporibus cavernosis penis* umgeben.

TABULA VII.

Fig. 1.

Uterus masculinus et organa genitalia canis magni.

v Vesica urinaria.

dd Vasa deferentia.

DD Fines glandulosi vasorum deferentium in cane exiguo gradu exculti.

u Uterus masculinus, non in urethram apertus sed clausus.

p Prostata similem structuram habens quam humana.

Ur Isthmus urethrae in cane perlongus et musculosus.

b Bulbus cavernosus urethrae.

cc Corpora cavernosa penis.

c' Intumescentia media corporum cavernosorum invicem conjunctorum, breviorem coitum fortasse impediens.

Ur Finis urethrae.

Fig. 2.

Penis caninus eo loco transversim sectus, ubi corpora cavernosa ad se invicem accedunt.

Ostium ovale ad urethram transverse sectam, a corpore cavernoso suo circumdatam, pertinet. Corpus cavernosum penis utrumque septo fibroso invicem separatum et a tunica fibrosa crassa circumdatum est. Pars posterior corporum cavernosorum penis sulcum format, quo urethra sita est.

Fig. 3.

Penis caninus eo loco transversim sectus, ubi intumescentia media corporis cavernosi posita est.

Septum hoc loco plane non adest. Pars posterior septi in os penis commutata est, quod sulco profundo instructum, urethram, a tenui corpore cavernoso suo circumdatam, includit.

Fig. 4.

Penis caninus prope finem glandis transversim sectus.

Hoc etiam loco penis septo caret, ejusque locum os penis occupat, a cujus parte posteriori urethra, a corpore cavernoso suo circumdata, jacet. Utraque pars a corpore cavernoso penis circumdata est.

TAFEL VIII.

Fig. 1 — 3.

Die Tunica decidua aus dem Uterus eines Mädchens, das wahrscheinlich sechs Tage und einige Stunden vor ihrem Tode concipirt hatte, schwach vergrössert.

Als ich im Jahre 1829 diese Abbildung machte, kannte ich die Uterindrüsen im menschlichen Uterus noch nicht. Mein Bruder und ich hielten damals die Theile für Zotten, von welchen ich später zeigte, dass sie Drüsen wären.

a a sind die nach der Höhle des Uterus gekehrten Enden der Uterindrüsen, die durch eine durchsichtige Substanz der *Tunica decidua* durchschimmern. An manchen Orten sieht man kleine Oeffnungen, durch welche sich die Drüsen in den Uterus münden.

b Der Seitenrand dieses Stücks der Decidua, an welchem man die Uterindrüsen frei sieht. Auf Fig. 2. und 3. sind diese Drüsen mehr vergrössert.

Fig. 4.

Der Körper des Uterus des Menschen bei einer angehenden Schwangerschaft im Umrisse mit den schlauchartigen Uterindrüsen in der Tunica decidua, in doppelter Grösse.

a a a Die sehr kleine Höhle des Uterus, mit den Oeffnungen der Uterindrüsen.

d d d Die dickeren oft in 2 bis 3 Bläschen gespaltenen Enden der schlauchartigen Uterindrüsen.

Fig. 5.

Ein Stückchen von der Tunica decidua eines andern Uterus bei angehender Schwangerschaft, 20 Mal im Durchmesser vergrössert.

a a Die der Höhle zugekehrte Oberfläche der Decidua, die der Oberfläche *a a* auf der vorhergehenden Figur entspricht. Man sieht hier die offnen Enden der Uterindrüsen als gelbliche Flecken durchschimmern.

d Die der Fasersubstanz des Uterus zugekehrten geschlossenen Enden dieser Drüsen, welche den Enden *d d d* auf der vorhergehenden Figur entsprechen.

e Ein Drüsenschlauch, der sich in zweie theilt.

Fig. 6.

Ein Stück einer sehr dünnen, nur $^1/_{20}$ Par. Lin. im Durchmesser habenden menschlichen Uterindrüse, 200 Mal im Durchmesser vergrössert.

Man sieht das Cylinderepithelium das die Wand dieses Drüsenschlauchs bildet. Seitwärts sieht man die Zellen des Cylinderepithelii ziemlich unverkürzt, nach der Mitte zu dagegen sieht man sie sehr verkürzt Von andern Geweben die den Gang umgeben sieht man sehr wenig, namentlich bemerkt man keine Haargefässe in der Wand derselben. Nur hier und da nimmt man eine in Spitzen auslaufende Zellgewebszelle oder eine rundliche kernhaltige Zelle wahr.

Fig. 7.

Ein Stück der menschlichen Decidua, in welcher man ausser den Uterindrüsen mit Blut erfüllte Gefässnetze sieht, die hier durch Querstriche bemerklich gemacht worden sind, 20 Mal vergrössert.

a a Die der Höhle des Uterus zugekehrte Oberfläche.

c c Uterindrüsen.

d Hervorgezogene Gefässnetze.

TABULA VIII.

Fig. 1 — 3.

Tunica decidua ex utero puellae septimo a conceptione die mortuae. Magnitudo imaginis non multum aucta est.

Cum anno 1829 hanc deciduam depingerem, glandulas uteri humani nondum novi. Quas partes glandulas esse, serius intellexi, eas una cum fratre tum temporis pro villis habui.

a a Fines glandularum, cavo uteri adversi, per pellucidam substantiam tunicae deciduae translucentes. In quibusdam locis parva ostia conspicua sunt, quibus glandulae uterinae in cavum uteri hiant.

b Margo tunicae deciduae, in quo glandulae liberae ante oculos positae sunt.

Fig. 4.

Corpus uteri humani initio graviditatis, una cum strato glandularum uterinarum, tunicam deciduam constituentium.

a a a Cavum perangustum uteri, in quo ostia glandularum uterinarum conspicua sunt.

d d d Fines crassiores glandularum uterinarum, saepe in duas aut tres vesiculas divisi.

Fig. 5.

Particula tunicae deciduae uteri alius, paulo ante foecundati, in effigie vicesies aucta.

a a Superficies tunicae deciduae, cavo uteri adversa, atque cum superficie *aa* in figura praecedente comparanda. Fines glandularum uterinarum una cum ostiis per membranam deciduam pellucere videmus.

d Fines clausi glandularum uterinarum, strato fibroso uteri adversi, cum finibus *d d d* in figura praecedente comparandi.

e Glandula utricularis in duos utriculos divisa.

Fig. 6.

Particula glandulae utricularis tenuissimae, cujus diameter $^1/_{20}$ Lin. Par. par erat. Effigies naturalem magnitudinem ducenties superat.

Epithelium cylindricum ejus maxime in oculos incurrit. In marginibus cellulae cylindricae, secundum leges opticas, non breviores apparent, mediae vero brevissimae. Alias telas vasaque capillaria non observavi. Hic illic cellulam longiorem acuminatam, e qua fibrae telae cellulosae nascuntur, aut etiam cellulas rotundas nucleatas vidi.

Fig. 7.

Pars tunicae deciduae humanae, in qua praeter glandulas uterinas, vasa sanguine repleta, lineis transversis significata, videmus.

Effigies magnitudinem veram quinquagesies superat.

a a Superficies uteri cavo adversa.

c c Glandulae uterinae.

d Retia vasorum e substantia protracta.

TAFEL IX.

Fig. 1.

Die schlauchartigen Uterindrüsen eines vielleicht 25 Tage trächtigen Hundes, von einem Theile des Uterus genommen, an welchen die Placenta nicht hinreicht und an welchem also die Drüsen während der Trächtigkeit keine andere Gestalt annehmen, 50 Mal im Durchmesser vergrössert.

aa Die einfachen Drüsen mit ihren Mündungen.

bb' dd' Die ästigen Drüsen. Manche von ihnen, z. B. die mit *b'd'* bezeichneten, haben eigenthümliche Streifen, die dadurch zu entstehen scheinen, dass ihre Wand mannigfach gefaltet ist. Ich halte es daher nicht für wahrscheinlich, dass dieses Ansehen dadurch entstehe, dass ein gefalteter Schlauch in der Drüse stecke. *dd'* sind die geschlossenen etwas dickeren Enden dieser Drüsen. Die Drüsen des Uterus der trächtigen Katze habe ich den des Hundes so ähnlich gefunden, dass ich nicht für nothwendig halte, meine Zeichnung darüber mitzutheilen.

Fig. 2. — 9.

Copieen der Abbildungen, welche Sharpey über die Uterindrüsen des Hundes bekannt gemacht hat.

Die auf der vorhergehenden Figur von mir bei *aa* dargestellten einfachen Uterindrüsen, sieht man nach Sharpey auf der senkrecht aus der Wand des Uterus herausgeschnittenen Lamelle auf Fig. 5. auch bei *aa*, eben so auf Fig. 3. bei *a*, wo ein Stück des Uterus mit der Placenta abgebildet ist, ebenso auf Fig. 6. *a* wo die Schnittfläche jenes Stücks desselben noch stärker vergrössert ist Die bei *b'b* auf der vorhergehenden Figur von mir dargestellten Stämme der ästigen Uterindrüsen sieht man nach Sharpey auf Fig. 5. bei *b* unverändert, aber auf Fig. 7. und 8. bei *b* sehr verändert, denn es hat sich daselbst während der Trächtigkeit eine sackförmige Erweiterung des Stammes gebildet und diese legt sich, wenn sie sich noch mehr vergrössert, in Falten wie in Fig. 9. *b*. Die sackförmigen Erweiterungen der benachbarten Drüsenstämme stossen zusammen und bilden die auf Fig. 6. und 3. abgebildete Lage *b*. Von den sackförmigen Erweiterungen geht der in Aeste getheilte Drüsenstamm weiter, dessen geschlossene Enden man auf allen jenen Figuren bei *d* sieht. Auf Fig. 2. sieht man die sackförmigen Erweiterungen der ästigen Uterindrüsen quer durchgeschnitten und die auf dem Boden derselben sichtbaren Oeffnungen führen in die engere Fortsetzung der Drüse. Auf Fig. 7. sieht man bei *cc* die Zotten des Chorion, die in die ihnen gegenüber liegenden Uterindrüsen hineingewachsen waren und aus denselben herausgezogen worden sind.

Fig. 11. und 12.

Die Oeffnungen der Uterindrüsen des Hundes auf der innern Oberfläche des Uterus bei einer 50maligen Vergrösserung, an einer Stelle, welche von der Placenta entfernter, und an einer andern Stelle, die der Placenta sehr nahe war.

In der Nähe der Placenta hatten sie sich sehr erweitert.

Fig. 13. und 14.

Die schlauchartigen Uterindrüsen der trächtigen Kuh, und das Ende einer solchen Drüse vom Rehe.

aa Grübchen auf der innern Oberfläche des Uterus, wo sich 1 — 3 Drüsen öffnen.

bbb Angeschwollene geschlossene Enden derselben, die nach dem fasrigen Gewebe des Uterus hin gerichtet sind.

TABULA IX.

Fig. 1.

Glandulae uteri canis circiter 25 dies gravidae, in ea uteri parte positae, in qua placenta non sita est, neque glandulae graviditate amplificantur. Effigies magnitudinem earum veram quinquagesies superat.

aa Glandulae simplices cum ostiolis.

b′b d′d Glandulae ramosae. Nonnullae glandulae ejus generis strias habent, quas rectius pro plicis parietis, quam pro plicis tubuli glandula inclusi habere mihi videor. *d′d* Fines crassiores clausi harum glandularum. Glandulae uteri felis gravidae glandulis uterinis canis tam similes sunt, ut delineationes a me factas cum viris doctis communicare haud sit necessarium.

Fig. 2 — 9.

Imagines glandularum uteri canini a Sharpey exhibitae.

Glandulae simplices a me in *aa* figurae antecendentis delineatae, a Sharpey in Fig. 5. *aa* et in Fig. 3. *a* depictae et denique, aucta magnitudine, in Fig. 6. *a* repraesentatae sunt. Glandulae ramosae, graviditate nondum mutatae, a me in *b′b* figurae antecedentis depictae, a Sharpey in *b* Fig. 5. delineatae sunt. Quae quidem glandulae graviditate mutatae conspiciuntur in *b* Fig. 7. et 8. Pars trunci glandulae in saccum extensa est, qui sensim sensimque ita increscit, ut paries ejus in plicas compositus vicinos saccos attingat. Sic stratum cellularum ampliorum *b* Fig. 6. et 3. oritur. Truncus glandulae ex intumescentia sacciformi ulterius progreditur et clausis finibus *d*, in omnibus illis imaginibus conspicuis, terminatur. In Fig. 2. cellulae istae transversim sectae sunt, ita ut in fundo earum foramina conspiciamus, per quae continuatio trunci glandulosi cum cellula cohaeret. In *cc* Fig 7. villi chorii delineati sunt, glandulis uterinis inclusi et ex iis hoc loco retracti.

Fig. 11. et 12.

Aperturae glandularum uterinarum in superficie interna uteri canini gravidi, in effigie quinquagesies auctae, quae in parte uteri a placenta remotiori minores, in parte uteri placentae propiori majores sunt.

Fig. 13. et 14.

Glandulae utriculares uteri vaccini gravidi finisque clausus talis glandulae ex utero gravido cervi capreoli.

aaa Foveae in superficie interna uteri, in quibus una, vel duae, vel tres glandulae utriculares hiant.

bbb Fines clausi tumidi harum glandularum, strato fibroso uteri adversi.



BEITRÄGE

ZUR

KENNTNISS DES VERHALTENS

DER

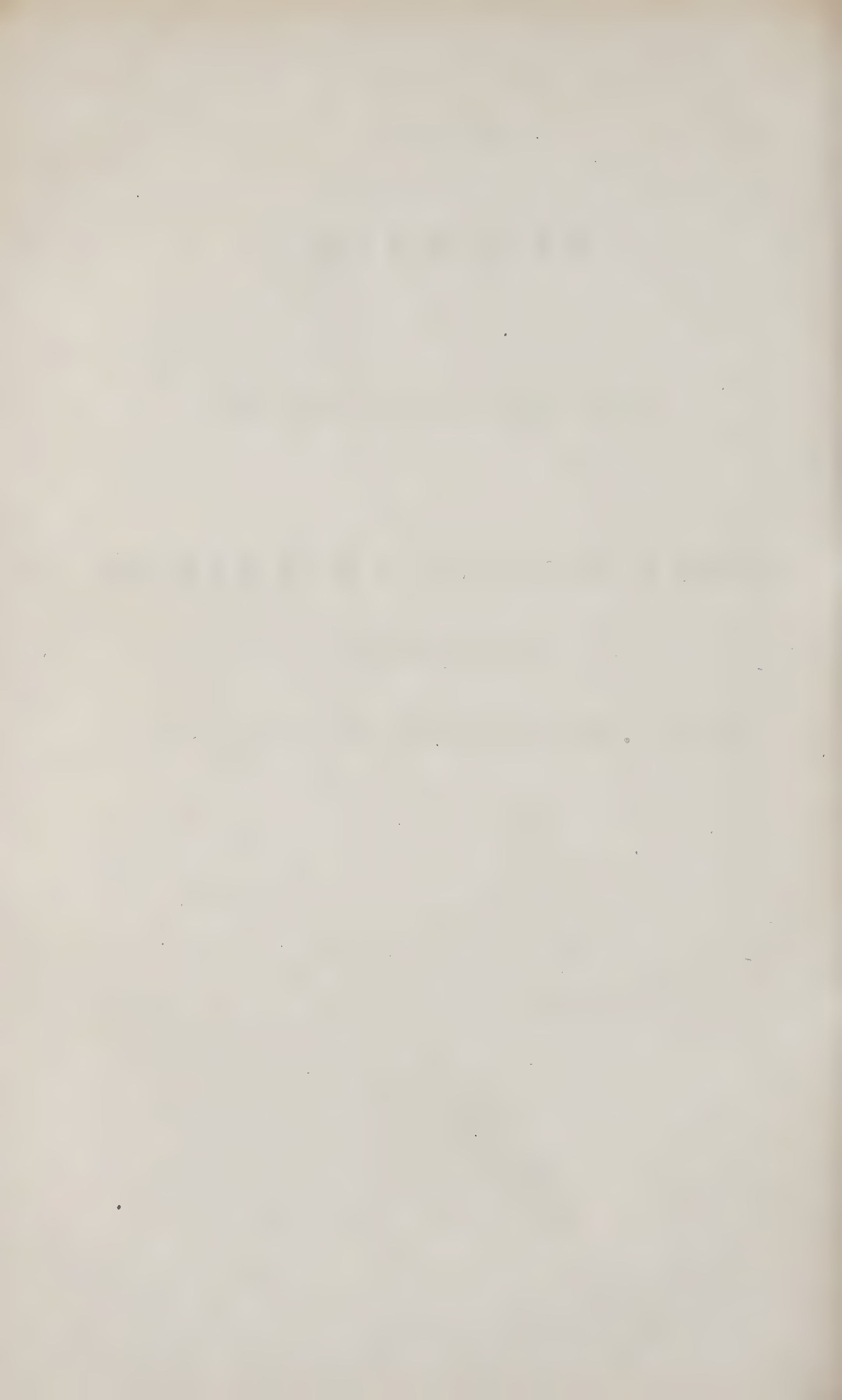
KOHLENSÄUREEXHALATION

UNTER VERSCHIEDENEN

PHYSIOLOGISCHEN UND PATHOLOGISCHEN VERHÄLTNISSEN.

VON

C. G. LEHMANN.



Schon seit längerer Zeit mit Versuchen über den Chemismus der Respiration beschäftigt, die Einflüsse des Alters, des Geschlechts, der Nahrungsmittel u. dgl. auf die Kohlensäureexcretion betreffend, wurde ich besonders durch einige auffallende Beobachtungen über den Einfluss der Wärme auf jene Excretion veranlasst, meine Aufmerksamkeit mehr noch auf die bisher wenig berücksichtigten Veränderungen zu richten, welche durch atmosphärische Einflüsse überhaupt in jenen Excretionen bedingt werden. Man hat den metereologischen Verhältnissen fast von jeher einen grossen Einfluss auf die Entstehung der Krankheiten beigemessen, aber bis heute fast noch nirgends einen wissenschaftlichen Zusammenhang zwischen den Witterungsverhältnissen und den herrschenden Krankheiten, zwischen Ursache und Wirkung nachgewiesen. Vielleicht dürften die folgenden Versuche, die den Verf. leider noch wenig exacte Schlüsse gestatten, wenigstens einen Weg andeuten, auf welchem wir dereinst zu einer mehr als statistischen Kenntniss des Verhaltens atmosphärischer Einflüsse zu gewissen Krankheiten gelangen können.

Respirationsapparate.

Was zunächst die Recipienten betrifft, in welchen Verfasser die Thiere respiriren liess, so wurden besonders zweierlei Arten benutzt; die eine Art bestand aus einer grossen Glasglocke mit weitem Halse, welche unten mit einem starken, breiten, gut abgeschliffenen Rande versehen war; mit diesem wurde sie auf eine ihrer Grösse entsprechende, vollkommen eben geschliffene Messingscheibe gesetzt, nachdem dieselbe mit Fett bestrichen war. Die Messingplatte selbst war in die kleine Vertiefung einer Pfoste von eichenem Holze eingelegt. Um den äusseren Rand der bereits aufgestellten Glocke wurde noch ein Gemeng von 30 Th. Talg und 1 Th. Wachs gestrichen, wodurch schon ein so vollkommen dichter Schluss bewirkt wurde, dass für die gewöhnlichen Versuche die 4 Schraubzwingen, deren ich mich sonst bediente, um die Glocke luftdicht an die Messingscheibe anzupressen, vollkommen überflüssig befunden wurden. Der Hals der Glocke wurde mit einem vierfach durchbohrten, mit Fett getränkten Kork geschlossen; zwei Durchbohrungen des Korks nahmen zwei rechtwinklich gebogene Glasröhren auf, von denen die zuleitende bis auf den Boden der Glocke ging, die ausführende aber nur bis unmittelbar

unter den Kork reichte; die dritte Durchbohrung nahm das Thermometer auf, und die vierte eine zweimal U-förmig gebogene Röhre. Diese Röhre diente dazu, um die Spannung der Luft im Recipienten zu messen; sie war zu dem Zwecke bis zu einer bestimmten Höhe mit Quecksilber gefüllt und mit einer doppelten Graduirung nach Millimetern versehen; ihre Höhe war so, dass das Quecksilber in ihr um 160^{mm} steigen und fallen konnte. Diese Röhre wurde theils benutzt, um den guten Schluss des Apparats zu prüfen, besonders aber die Spannung der Luft beim Respiriren in verschieden comprimirter oder expandirter Luft zu prüfen. Alle diese Glasröhren waren in den Kork von oben und unten mittelst eines Gemengs von 4 Theilen Colophonium und 1 Theil Wachs eingeschmolzen.

Eine andere Art von Recipienten, die zu den meisten Versuchen viel tauglicher war als die oben beschriebene, bestand zunächst aus einem cylindrischen Glasgefässe mit dickem abgeschliffenem Rande, wie sich dessen die Anatomen zu Aufbewahrung von Spirituspräparaten bedienen; auf den abgeschliffenen Rand wurde eine in Holz gefasste Messingplatte aufgesetzt, die, wie bei dem ersten Apparate der Kork, vier Durchbohrungen zu gleichem Zwecke hatte. An dem über den Rand des Glases hervorragenden Rande der Messingscheibe fanden sich noch 3 Durchbohrungen, die auf die sogleich zu beschreibende Weise zur Fixirung der Platte auf dem Glase, besonders für Versuche in verdichteter Luft, dienten. Der Boden des Glasgefässes ward nämlich in die entsprechende Aushöhlung einer zolldicken Holzplatte eingesetzt; in eine dem Boden des Glasgefässes entsprechende Vertiefung waren noch 2 dicke Kaoutschoukplatten eingelegt, damit deren Elasticität beim Aufschrauben der Messingscheibe auf den Glascylinder und dem Drucke dieses gegen das unterliegende Brett das Zerspringen des Recipienten verhindere. Jenes Aufschrauben wurde aber so bewerkstelligt, dass von dem Rande der Holzplatte 3 Eisenstäbe aufstiegen, die gerade in die Durchbohrungen der Messingscheibe passten; da wo diese Stäbe durch jene Oeffnung drangen, waren sie mit einem Schraubengewinde versehen, auf dessen hervorragenden Theil kleine Schraubköpfchen aufgesetzt wurden. Auf diese Weise wurde gewissermassen die Messingscheibe an die untere Holzplatte angezogen und so die ersten an den dazwischen liegenden Recipienten angepasst; hierdurch so wie durch den, wie erwähnt, zwischen Holzplatte und Recipienten liegenden Kaoutschouk wurde bewirkt, dass beim Schrauben ein ziemlich gleichförmiger, wiewohl starker Druck ohne Gefahr ausgeübt werden konnte.

Das Zuleitungsrohr ist durch eine Kaoutschoukröhre zunächst mit 2 U-förmig gebogenen Röhren verbunden, die mit Stücken trocknen Aetzkalis erfüllt sind; an diese schliessen sich 2 ähnliche Röhren mit frischgeschmolzenem Chlorcalcium. In dem Systeme der Zuleitungsröhren wurde die Anwendung des sonst so brauchbaren Liebig'schen Kugelapparats vermieden, da bei dessen Anwendung im Recipienten nothwendiger Weise die Luft immer etwas verdünnter ist als die atmosphärische, ferner eine stossweise Zuführung der Luft und ein öfterer Wechsel der Dichtigkeit der zu respirirenden Luft bedingt wird, der auf die Respiration empfindlicherer, namentlich jüngerer Thiere sich bei genauerer Beobachtung immer von Einfluss zeigte. Bei frühern Ver-

suchen über den Einfluss der Temperatur, der Tageszeit, der Nahrungsmittel auf die Kohlensäureausscheidung hatte ich diesen Umstand noch nicht berücksichtigt und häufig den Kugelapparat, mit Schwefelsäure gefüllt, in Gebrauch gezogen.

An die Ableitungsröhre schloss sich ein anderthalbmal durchbohrter Hahn, welcher an der auf die beiden andern rechtwinklich aufstehenden Mündungsröhre mit einer Handluftpumpe verbunden war, wie man sich deren nach Liebig zur Austrocknung der Verbrennungsröhren bedient. Diese Einrichtung wurde einerseits dazu benutzt, um den luftdichten Schluss des Recipienten und des Systems zuleitender Röhren zu prüfen, nachdem vorher an die letzteren ein mit Schwefelsäure gefüllter Kugelapparat befestigt war, an deren Niveauunterschiede noch dem Durchziehen der Luft mittelst der Luftpumpe sich der gute Schluss dieser Theile des Apparats erkennen liess. Wichtiger war aber ein andrer Zweck derselben Vorrichtung, nämlich der, vor Beginn des eigentlichen Versuchs die während des Verbindens der Apparate durch das Athmen des Thiers verunreinigte Luft aus dem Recipienten zu entfernen und somit einen bestimmten Zeitpunkt zu gewinnen, von dem an den Versuch eigentlich erst beginnt. Dieses vorgängige Durchziehen von Luft durch den Recipienten ist aber um so nothwendiger, als die meisten Thiere höherer Thierclassen durch das Einbringen in den Apparat und die ihnen lästigen Verhältnisse so in Angst gesetzt und zu einer frequentern Respiration disponirt werden, dass sich, wenn der Versuch nicht sehr lange dauert, allerdings eine Vermehrung der Kohlensäure wahrnehmen lässt. Bei Vögeln und jungen Kaninchen musste oft länger als 10 Minuten Luft durch den Apparat gezogen werden; ja nicht selten gelangt man trotzdem wegen dieser unnatürlichen Unruhe der Thiere zu einem ganz falschen Resultate; diess ist natürlich dann am gewöhnlichsten der Fall, wenn der Apparat für das Thier zu eng ist. Zu eng ist der Recipient aber durchaus, sobald das Thier sich nicht völlig frei in demselben bewegen kann. Wie wichtig dieser Punkt ist, davon kann man sich sehr leicht auf folgende Weise überzeugen; man bediene sich z. B. eines nur 1 oder 2 Pfund fassenden sog. Pulverglases als Recipienten bei der Respiration eines kleinern Vogels, und man wird finden, dass derselbe fast die Hälfte Kohlensäure mehr in derselben Zeit exhalirt, als wenn der Recipient geräumiger war; während z. B. ein Zeisig im Mittel von 3 Versuchen in einer Morgenstunde = 0,0933 gr. Kohlensäure excernirt, stieg in einem engen Behältnisse die Quantität der Kohlensäure auf 0,1796 gr. Ueberhaupt ist es nothwendig, dass man die Thiere unter ihren angemessenen Verhältnisse in dem Recipienten bringt: mochte der Boden des Recipienten Glas oder Metall sein, so bedeckte ich denselben stets mit einer Holzplatte. Der grösste Recipient, dessen ich mich bediente, war eine grosse Glasglocke, die 18″ Höhe und 12″ Breite hatte; der grösste Glascylinder hatte 12″ Breite und 15″ Höhe; für kleinere Thiere benutzte ich zwei 8″ breite und 10″ hohe Cylinder.

Das System der Absorptionsgefässe bestand aus einem mit reiner Schwefelsäure erfüllten Kugelapparate, 2 stärker und länger ausgeführten Liebig'schen Chlorcalciumröhren, die mit frischgeschmolzenem Chlorcalcium gefüllt waren, 3 mit Kalilauge erfüllten Kugelapparaten und einer mit trocknem Aetzkali ge-

füllten grössern Chlorcalciumröhre. Der mit Schwefelsäure erfüllte Kugelapparat schloss sich an den anderthalbfach durchbohrten Hahn an; eine mit trocknem Chlorcalcium oder mit von Schwefelsäure durchfeuchteten Asbest oder Bimstein gefüllte Röhre wurde deshalb nicht als erster Absorptionsapparat benutzt, weil wegen der grossen Menge Wasser, das bei der Respiration höherer Thiere sich hier ansammelt, leicht Verstopfung oder Ueberspritzen entsteht. Die Kugelapparate wurden in diesem Theile des Apparats deshalb andern Vorrichtungen zur Absorption der Kohlensäure vorgezogen, theils weil das Umfüllen derselben schneller und leichter bewerkstelligt wird, theils weil man durch den Stand der Flüssigkeit in ihnen sich von dem dichten Schluss des Apparates und an den durchstreichenden Luftblasen sich von der Schnelligkeit der durch den Apparat strömenden Luft jeden Augenblick leicht überzeugen kann. Bringt man etwas weniger Kalilauge in diese Apparate, als diess Behufs der Kohlensäureabsorption bei Elementaranalysen nothwendig ist, so findet nicht leicht ein Ueberspritzen statt. Bei dem Durchströmen der grossen Menge Luft wird aus der Aetzkalilauge eine nicht unerhebliche Menge Wasser entfernt, daher die entweichende Luft, ehe sie in den Aspirator tritt, noch mit einer wasseranziehenden Substanz in Berührung gebracht werden muss; obgleich der Verf. sich durch Anwendung von Kalkwasser überzeugt hat, dass bei der gewöhnlichen Schnelligkeit des Luftstroms 3 Kaliapparate zur Kohlensäureabsorption vollkommen ausreichend sind, so zog er doch vor, an den dritten Kaliapparat eine mit trocknem Aetzkali gefüllte Röhre anzubringen, in der ausser dem verdunsteten Wasser auch noch Kohlensäure absorbirt werden konnte. Zwischen diesem Röhrensystem und dem Aspirator war ein Hahn angebracht. Dieser hatte einen dreifachen Zweck; erstens nämlich den, dass vor Beginn des Versuchs das System der absorbirenden Röhren auf luftdichten Schluss geprüft werden konnte, indem man, nachdem etwas Luft durch das Röhrensystem gelassen worden war, den Hahn schloss und so das verschiedene Niveau der in den Kugeln enthaltenen Flüssigkeiten bemerkt wurde; zweitens war dieser Hahn nothwendig, damit während des Zusammensetzens des Apparats oder während des wiederholten Ausfüllens des Aspirators die mit Wasserdunst gesättigte Luft aus demselben nicht in die mit trocknem Aetzkali gefüllte Röhre dringen konnte. Der dritte Nutzen dieses Hahnes soll weiter unten bei der Beschreibung des Athmens in verdichteter Luft erwähnt werden.

Die von mir benutzten Aspiratoren waren grosse cylindrische Blechgefässe, die in der Nähe ihres Bodens zum Ausfliessen des Wassers mit einem Hahne und auf ihren obern Theile mit 2 Oeffnungen, einer zum Auffüllen des Wassers und einer zur Aufnahme der luftzuleitenden, rechtwinklig gebogenen Röhre, versehen waren. Die beiden Aspiratoren, deren ich mich gewöhnlich bediente, hatten ungefähr 40000 CC. Rauminhalt. Bei Versuchen mit verdichteter Luft reichen die gewöhnlichen Kaoutschoukröhren ebenfalls aus, wenn die dazu verwendeten Kaoutschoukplatten nicht allzu dünn sind; im letzten Falle wendete ich zwei solcher Röhren übereinander an, jedoch so, dass sich die Suturen beider nicht deckten.

Was die Quantität des durch den Apparat zu leitenden Luftquantums betrifft, so habe ich immer festgehalten, dass man eigentlich nicht zu viel, sehr

leicht aber zu wenig Luft durch den Apparat leiten kann. Nur bei Vögeln und Raupen ist ein zu starker Luftzug nachtheilig; beide Thierclassen leiden sehr leicht darunter, was mich mehr als einmal zu verfehlten Versuchen verführt hat. Ein zu langsamer Luftstrom bedingt aber wegen der sich ansammelnden Kohlensäure und des Wasserdunstes ein ganz unregelmässiges Athmen; anfangs athmen namentlich kräftigere ältere Thiere tiefer und sichtlich beschwerlich, früher oder später aber wird die Frequenz der Athemzüge beträchtlich vermehrt; wir wissen aber durch die vortrefflichen Beobachtungen Vierordt's, wie sehr durch grössre Frequenz der Athemzüge die Kohlensäureexhalation vermehrt wird. Lässt man die Thiere bei der Temperatur der äussern Luft athmen, so erkennt man an dem am Glase sich niederschlagenden Wasserdunst, dass nicht genug Luft durchgeleitet worden ist, was sich natürlich auch bei einem Vergleiche der Temperatur in dem Recipienten mit der der äussern Luft kund giebt; das Thermometer des Recipienten durfte nicht mehr als einen halben bis einen ganzen Grad über ein in der Nähe des Apparats befindliches Thermometer zeigen.

Was die Dauer der einzelnen Versuche betrifft, so habe ich nicht gern 3 Stunden überschritten; es scheint zwar, als könnten durch eine längere Dauer des Versuchs die unvermeidlichen Beobachtungsfehler nur verringert werden, allein dies ist keineswegs der Fall. Abgesehen nämlich davon, dass zu verschiedenen Stunden der Tageszeit die Kohlensäureexhalation (insbesondere bei Vögeln, wie der Verf. gefunden) höchst verschieden ist, und somit die Reinheit einer Beobachtung leicht getrübt werden kann, so ist hauptsächlich zu berücksichtigen, dass der Aufenthalt des Thiers im Recipienten, aller Vorrichtungen ungeachtet, keineswegs ein natürlicher ist; auch das Thier will beschäftigt sein; glaubt man nun dem Thiere kein Futter und kein Wasser mit in den Recipienten geben zu dürfen, so wird das Thier stets bei weitem unruhiger sein, als wenn man ihm Nahrungsmittel mit in das Behältniss gegeben hat. Verf. hat diess indessen stets vermieden. Bei dem Athmen in trockner Luft bekommen die Thiere sehr bald Durst, selbst solche, die sonst wenig oder selten trinken, fangen bei längrer Dauer des Versuchs an, an den Wänden des Recipienten zu lecken; namentlich jüngere Thiere, z B. junge Kaninchen, zeigen dann bald eine grosse Athemfrequenz. Ueberhaupt aber dürfen wir, wie aus des Verfs unten mitzutheilenden Versuchen einleuchtet, durchaus nicht glauben, dass das Athmen in ganz trockner Luft uns ein völlig richtiges Resultat giebt, sobald wir dadurch die normale Respirationsgrösse in der Atmosphäre kennen lernen wollen.

Wir gehen zu den Abänderungen der oben beschriebenen Methode über, die bei Anstellung der Versuche unter verschiedenen physikalischen Verhältnissen erfordert wurden. Das Athmen bei höhern oder niedern Temperaturgraden wurde ganz einfach dadurch bewerkstelligt, dass der Recipient in ein andres Gefäss mit erwärmtem oder durch Eis und etwas Kochsalz abgekühltem Wasser gesetzt wurde. Da aber die Luft sich so schwer erwärmt und durch blosse Erwärmung des Recipienten eine weniger gleichmässige Durchwärmung des Apparats erzielt werden konnte, so wurden die zuleitenden U-förmigen Kali- und Chlorcaliumröhren in einen Holztrog gesetzt, der mit kaltem oder

heissem Wasser gefüllt wurde; auf diese Weise gelangte die Luft doch schon einigermassen erwärmt oder abgekühlt in den Recipienten an.

Sollte das Thier in mit Wasserdunst gesättigter Luft athmen, so wurde die Luft, wie gewöhnlich, zuerst über Chlorcalcium und Aetzkali geleitet; dann aber, ehe sie in den Recipienten trat, in zwei weite, U-förmig gebogene Röhren geleitet, die mit gehörig durchfeuchtetem Asbest erfüllt waren; der Boden des Recipienten selbst war so weit mit Wasser bedeckt, dass die Zuleitungsröhre des Recipienten noch ungefähr eine Linie tief eintauchte.

Das Athmen unter geringerem Luftdrucke wurde dadurch bewerkstelligt, dass die eintretende Luft erst eine Quecksilbersäule von bestimmter Höhe überwinden musste; hierzu diente ein mit Quecksilber zur Hälfte gefüllter Cylinder, dessen Oeffnung mit einem doppelt durchbohrten Kork geschlossen war; die Zuleitungsröhre war durch Fett beweglich, aber luftdicht in die eine Durchbohrung des Korks eingefügt, so dass sie bis zu beliebiger Tiefe in das Quecksilber eingesenkt werden konnte. Da nun aber das Ausfliessen des Wassers aus dem Aspirator sehr bald aufhörte, schon wenn die zu überwindende Quecksilbersäule nur 3 bis 4''' Höhe hatte, so wurde eine 4 Fuss lange Glasröhre mittelst Kaoutschouk und Blase an das Ausmündungsstück des Hahns und ausserhalb des Laboratoriums an einer Fallröhre befestigt; an dem an der Decke des Recipienten angebrachten Barometer liess sich die Luftverdünnung im Recipienten genau messen.

Das Athmen in verdichteter Luft wurde auf folgende Weise ausgeführt: hier musste die Luft natürlich durch den Apparat, und zwar mittelst einer Wassersäule, getrieben werden. Um einen starken Druck anwenden zu können, wurde auf die obere Mündung der langen perpendiculären Röhre eines Gasometers, dessen untrer Cylinder 60000 CC. Rauminhalt hatte, eine 4 Fuss lange Glasröhre auflutirt, und in deren obere trichterförmige Oeffnung aus einem Aspirator Wasser geleitet; durch den Hahn des Aspirators konnte die Wasserzufuhr so regulirt werden, dass das Niveau des Wassers in der Glasröhre sich auf einer bestimmten Höhe erhielt. Der Hahn der kurzen Perpendiculärröhre des Gasometers war natürlich geschlossen; der Hahn des Horizontalrohrs des Gasometers wurde geöffnet, nachdem alles Uebrige zum Versuche gehörig vorbereitet war; nun würde aber die Luft sich mit grosser Gewalt durch den Apparat gedrängt, die Kalilauge und Schwefelsäure in den Kugelapparaten zum Ueberspritzen gebracht und ihre Spannung selbst sehr bald verloren haben, wenn nicht durch den am Ende des Systems der ableitenden Röhren befindlichen Hahn der freie Austritt der Luft gehemmt und regulirt worden wäre. Ausser den oben erwähnten waren noch besondre Mittel, um in allen Theilen des Apparats luftdichten Schluss zu erzielen, durchaus nicht nothwendig, da man ja schon bei der Zusammensetzung des gewöhnlichen Apparats alle Aufmerksamkeit hierauf verwenden musste.

Ehe ich zur Mittheilung der Versuche selbst übergehe, kann ich nicht unterlassen, noch einige Cautelen zu erwähnen, welche die Vorbereitung und Behandlung der Thiere betreffen. Mit jungen Thieren habe ich leider so viel unglückliche Versuche angestellt, dass ich in späterer Zeit solche zu meinen Versuchen gar nicht mehr benutzte; selbst wenn man dieselben unter ziemlich

analogen Verhältnissen athmen lässt, so sind die Schwankungen in der Kohlensäureexcretion oft so bedeutend, dass aus dem Versuche kein regelrechter Schluss gezogen werden kann.

Das mittlere Gewicht der Thiere wurde gefunden, indem damit an 2 Tagen Wägungen vorgenommen wurden, nachdem sie je 6 Stunden vorher nichts zu fressen erhalten hatten; für 5 bis 7 Tage darauf wurde das Ergebniss der Wägung als mittleres Körpergewicht betrachtet. Jedes Thier erhielt 3 Stunden vor dem Versuche noch soviel Futter, als es innerhalb dieser Zeit nur consumiren konnte.

Ehe ein Thier zu einer besondern Versuchsart verwendet wurde, pflegten 2 oder 3 Versuche damit an ein und derselben Tageszeit angestellt zu werden, um so zunächst für das Individium das Normale zu finden, da zumal bei grösseren Thieren die verschiedene Individualität nicht ohne Einfluss ist.

Manche Thiere gewöhnen sich erst allmählig an den Recipienten, so dass die ersten damit angestellten Versuche geradezu verloren sind.

Versuche über den Einfluss der Wärme und Feuchtigkeit auf die Kohlensäureexcretion.

Dass beim Athmen in einer höhern Temperatur die Menge der excernirten Kohlensäure abnimmt, ist durch mehrere Experimentatoren in neuerer Zeit hinlänglich bewiesen worden. Ich würde nun die Ergebnisse meiner Versuche wenigstens an dieser Stelle unterdrücken, wenn ich nicht gefunden hätte, dass die Einwirkung der Wärme anf das Athmen durch den Feuchtigkeitszustand der Luft wesentlich modificirt wird.

Der Verf. hat über diesen Gegenstand an Feldtauben, Zeisigen und Kaninchen Versuche angestellt.

Eine männliche Feldtaube, im Mittel von 2 Wägungen, 173,4 gr. schwer, exspirirte an drei auf einander folgenden Tagen von $8^h 11'$ bis $10^h 11'$ bei 751 bis 756^{mm} Bar. und + 20 bis 25° C. = 0,212 gr., 0,217 gr. und 0,201 gr. Kohlensäure.

Wenn hiernach eine 173,4 gr. schwere Taube zwischen + 20° und 25° C. und 754^{mm} Bar. in 2 Morgenstunden im Mittel von 3 Versuchen = 0,210 gr. Kohlensäure exhalirt, so werden 1000 gr. Feldtauben unter denselben Verhältnissen in 1 St. = 6,055 gr. Kohlensäure excerniren.

Dieselbe Taube exhalirte zwischen — 2° und + 3° C. im ersten Versuche von $8^h 35'$ bis $10^h 35'$ bei 746^{mm} Bar. = 0,356 gr. Kohlensäure, im zweiten Versuche von $9^h 2'$ bis $11^h 2'$ bei 737^{mm} Bar. = 0,368 gr. und im dritten von $8^h 15'$ bis $10^h 15'$ und 741^{mm} Bar. = 0,361 gr.

Wenn demnach dieselbe Taube bei circa 0° und 741^{mm} Bar. in 2 Morgenstunden im Mittel dreier Versuche = 0,362 gr. Kohlensäure excernirt, so exhaliren 1000 gr. Feldtauben unter gleichen Verhältnissen in 1 St. = 10,438 gr.

Dieselbe Taube exspirirte bei einer weitern Versuchsreihe, wo die Temperatur zwischen + 35 und 40° C. erhalten wurde *a*) bei 741^{mm} von $8^h 55'$ bis $10^h 55'$ = 0,147 gr. Kohlensäure, *b*) bei 746^{mm} von $7^h 41'$ bis $9^h 41'$

= 0,156 gr., *c*) bei 751 mm von $8^h 2'$ bis $10^h 2'$ = 0,162 gr. Wenn demnach diese Taube bei + 37° C. in 2 Morgenstunden im Mittel dreier Versuche 0,155 gr. Kohlensäure exhalirte, so würden 1000 gr. Tauben unter gleichen Verhältnissen in 1 St. = 4,469 gr. excerniren.

Ganz anders stellte sich aber die Wirkung der Wärme heraus, als ich dieselbe Taube auf die oben beschriebene Weise in *feuchter* Luft bei verschiedenen Temperaturen athmen liess. Die Taube hatte während der oben mitgetheilten Versuchen 1,3 gr. an Gewicht verloren, so dass ihr Körpergewicht für die folgende Versuchsreihe = 172,1 gr. angenommen wurde.

In drei Versuchen, die bei einer Temperatur zwischen + 20° und 25° C. angestellt wurden, exspirirte die Taube *a*) bei 753 mm von $9^h 43'$ bis $11^h 43'$ = 0,227 gr. Kohlensäure, *b*) bei 749 mm von $9^h 7'$ bis $11^h 7'$ = 0,235 gr., *c*) bei 747 mm von $7^h 56'$ bis $9^h 56'$ = 0,236 gr. Wenn also diese Taube in *feuchter* Luft bei circa 750 mm und + 23° C. in 2 Morgenstunden im Mittel dreier Versuche = 0,233 gr. Kohlensäure exhalirt, so geben 1000 gr. unter gleichen Verhältnissen in 1 Morgenstunde 6,769 gr. aus.

In drei Versuchen, die zwischen + 35° und 40° C. angestellt wurden, exhalirte die Taube an Kohlensäure *a*) bei 738 mm von $8^h 51'$ bis $10^h 51'$ = 0,246 gr., *b*) bei 747 mm von $8^h 16'$ bis $10^h 16'$ = 0,241 gr., *c*) bei 754 mm von $8^h 5'$ bis $10^h 5'$ = 0,251 gr. Demnach exhalirte diese Taube im Mittel dreier Versuche bei + 37° C. in *feuchter* Luft in 2 Morgenstunden = 0,247 gr. Kohlensäure; 1000 gr. aber würden unter gleichen Verhältnissen in 1 St. = 7,176 gr. excernirt haben

Das Resultat der mit dieser Taube angestellten Versuche würde demnach folgendes sein:

1000 gr. männliche Feldtauben exspiriren in 1 Morgenstunde

in trockner Luft bei	0°	= 10,438	gr. Kohlensäure
„ „ „ „	+ 23°	= 6,055	„ „
„ „ „ „	+ 37°	= 4,469	„ „
„ feuchter „ „	+ 23°	= 6,769	„ „
„ „ „ „	+ 37°	= 7,176	„ „

Eine ähnliche Versuchsreihe wurde mit 3 Zeisigen angestellt; diese 3 Thiere hatten nach 3 angestellten Wägungen im nüchteren Zustande ein Körpergewicht = 33,54 gr.

In 3 Versuchen, die zwischen + 15 und 20° C. in den Nachmittagsstunden angestellt wurden, exhalirten diese Thiere an Kohlensäure *a*) bei 753 mm von $2^h 12'$ bis $4^h 12'$ = 0,387 gr., *b*) bei 757 mm von $2^h 1'$ bis $4^h 1'$ = 0,381 gr, *c*) bei 759 mm von $2^h 15'$ bis $4^h 15'$ = 0,315 gr.

Wenn 3 Zeisige bei circa + 18° C. in 2 Nachmittagsstunden in trockner Luft im Mittel 0,381 gr. Kohlensäure excerniren, so würden 1000 gr. in 1 Nachmittagsstunde unter gleichen Verhältnissen = 5,679 gr. Kohlensäure ausgeben.

Zwischen — 2° und + 3° C. exhalirten dieselben Thiere in 3 Versuchen an Kohlensäure *a*) bei 757 mm von $2^h 13'$ bis $4^h 13'$ = 0,488 gr., *b*) bei 754 mm von $1^h 47'$ bis $3^h 47'$ = 0,477 gr., *c*) bei 762 mm von $2^h 20'$ bis

$4^h 20' = 0{,}495$ gr. Wenn hiernach 3 Zeisige bei circa 758^{mm} und 0° in 2 Nachmittagsstunden im Durchschnitt = 0,487 gr. Kohlensäure excerniren, so würden 1000 gr. in 1 Stunde unter gleichen Verhältnissen = 0,267 gr. exspirirt haben.

In 3 weiteren Versuchen, bei welchen jene Thiere bei einer Temperatur zwischen + 35° und 40° C. athmeten, wurde an exhalirter Kohlensäure gefunden *a*) bei 759^{mm} von $2^h 21'$ bis $3^h 21'$ = 0,098 gr. von $2^h 27'$ bis $3^h 27'$ bei 760^{mm} = 0,107 gr. von $2^h 41'$ bis $3^h 41'$ bei 759^{mm} = 0,119 gr. Das Mittel dieser 3 Versuche giebt an exhalirter Kohlensäure = 0,108 gr.; sonach würden 1000 gr. bei + 37° C. in einer frühen Nachmittagsstunde bei 760^{mm} Bar. = 0,220 gr Kohlensäure abscheiden.

Bei diesen, wie bei den folgenden Versuchen, liess ich diese Thiere nur 1 Stunde lang im Apparate, da dieselben ausserordentlich empfindlich gegen höhere Temperatur und besonders gegen Feuchtigkeit sind; bemerkt man auch während des Versuchs keine Veränderung an ihnen, so findet man sie doch nachher oft sichtlich unwohl; meist aber verräth sich ihr Unwohlsein schon im Recipienten entweder durch äusserst frequente Respiration, die eine Vermehrung der Kohlensäure bedingt, oder durch Somnolenz, die eine Verminderung jener Säure mit sich führt. Viele unglückliche Versuche haben den Verf. gelehrt, dass diese Thiere, nachdem sie einige Male zu Versuchen benutzt worden waren, nicht mehr recht munter herumhüpften, sehr zänkisch wurden und ohne sichtbare Ursache abstarben. Selbst durch Sectionen habe ich über die eigentliche Todesursache mir nicht Aufschluss verschaffen können. Da bei einem der Athmungsversuche in feuchter Luft einer der Zeisige erkrankte und Tags darauf starb, so wurde an dessen Stelle ein andres Exemplar zu den fernern Versuchen verwendet; alle 3 Thiere zusammengenommen hatten nun ein Körpergewicht = 34,01 gr.

In *feuchter* Luft zwischen + 15 und 20° C. exspirirten diese Thiere *a*) bei 738^{mm} von $2^h 10'$ bis $3^h 10'$ = 0,219 gr., *b*) bei 749^{mm} von $2^h 41'$ bis $3^h 41'$ = 0,208 gr., *c*) bei 746^{mm} von $2^h 50'$ bis $3^h 50'$ = 0,221 gr., also im Mittel = 0,261 gr. Kohlensäure; somit würden 1000 gr. Zeisige bei + 12,5° C. in feuchter Luft bei circa 745^{mm} in 1 Nachmittagsstunde = 6,351 gr. Kohlensäure excerniren.

Zwischen 35° und 40° C. exspirirten dieselben Thiere in feuchter Luft *a*) bei 750^{mm} von $2^h 50'$ bis $3^h 50'$ = 0,231 gr., *b*) bei 753^{mm} von $2^h 37'$ bis $3^h 37'$ = 0,227 gr., *c*) bei 751^{mm} von $2^h 14'$ bis $3^h 14$ = 0,240 gr., also im Mittel = 0,233 gr. Kohlensäure; 1000 gr würden demnach bei + 37° C. in feuchter Luft in einer frühern Nachmittagsstunde = 6,851 gr. Kohlensäure exhaliren.

Die Resultate lassen sich in folgender Weise leicht übersehen:

1000 gr. Zeisige exspiriren in 1 Nachmittagsstunde

in trockner Luft bei	0°	= 7,260	gr. Kohlensäure
„ „ „ „	+ 17°,5	= 5,679	„ „
„ „ „ „	+ 37°,5	= 3,220	„ „
„ feuchter „ „	+ 17°,5	= 6,351	„ „
„ „ „ „	+ 37°,5	= 6,851	„ „

Ein altes männliches Kaninchen im nüchternen Zustande 2030 gr. schwer, wurde zu einer ähnlichen Versuchsreihe verwendet.

Zwischen + 10° und 15°C. exspirirte dieses Kaninchen in 3 Versuchen an Kohlensäure: *a*) bei 754^{mm} von $9^h 18'$ bis $12^h 18'$ = 3,631 gr., *b*) bei 759^{mm} von $8^h 22'$ bis $11^h 22'$ = 3,744 gr., *c*) bei 749^{mm} von $8^h 45'$ bis $11^h 45'$ = 3,705 gr., im Mittel = 3,693 gr. Sonach würden 1000 gr. Kaninchen bei + 12°,5 und 754^{mm} Bar. in 1 Morgenstunde = 0,606 gr. Kohlensäure exhaliren.

Zwischen + 35° und 40°C. exspirirte in trockner Luft dasselbe Kaninchen an Kohlensäure: *a*) bei 755^{mm} von $9^h 16'$ bis $12^h 16'$ = 2,863 gr., *b*) bei 748^{mm} von $8^h 47'$ bis $11^h 47'$ = 2,683 gr., *c*) bei 749^{mm} von $8^h 38'$ bis $11^h 38'$ = 2,698 gr , im Mittel = 2,748 gr. Hiernach exspiriren 1000 gr. Kaninchen bei 37°,5 in trockner Luft in 1 Morgenstunde 0,451 gr. Kohlensäure.

Dasselbe Kaninchen exspirirte in *feuchter* Luft zwischen 35° und 40° an Kohlensäure: *a*) bei 738^{mm} von $8^h 53'$ bis $12^h 53'$ = 4,568 gr., *b*) bei 741^{mm} von $8^h 27'$ bis $11^h 27'$ = 4,606 gr., *c*) bei 746^{mm} von $9^h 26'$ bis $12^h 26'$ = 4,330 gr.; demnach im Mittel in 1 Stunde = 1,374 gr., folglich exspiriren 1000 gr. Kaninchen in feuchter Luft bei + 37°,5 = 0,677 gr. Kohlensäure.

1000 Kaninchen exspiriren in 1 Morgenstunde

in trockner Luft bei	+ 12°,5	=	0,606	gr.	Kohlensäure
„ „ „ „	+ 37°,5	=	0,451	„	„
„ feuchter „ „	+ 37°,5	=	0,677	„	„

Aus allen diesen Versuchen stellt sich also die auffallende Thatsache heraus, dass der Einfluss der Temperatur auf die Grösse der beim Athmen exspirirten Kohlensäure ausserordentlich durch den Feuchtigkeitsgrad der respirirten Atmosphäre modificirt wird. Der Verf. hätte gern gewünscht, für diese Verhältnisse bestimmte arithmetische Proportionen aufstellen zu können, allein bis jetzt musste er wegen der vielen theils ganz verunglückten theils wenigstens nicht schlussgerechten Versuche noch davon absehen.

Welche Folgerungen sich aus der einfachen im Endresultate dieser Versuche liegenden Thatsache nicht blos für die Physiologie, sondern auch für die Pathologie ziehen lassen, ist leicht ersichtlich; ich erinnere z. B. nur an die verschiedenen Sanitätsverhältnisse unter gleichen Breiten gelegener Orte, an die alltägliche Erfahrung, dass Tuberculöse bei feuchtem Wetter sich weit besser befinden als bei trocknem u. s. w. Doch diese Folgerungen müssen einer spätern Betrachtung überlassen bleiben.

Ebensowenig ist der Verf. für jetzt geneigt, auf eine Deutung des ursächlichen Zusammenhangs jener Erscheinung einzugehen, da dieselbe ohne anderweitige Versuche nicht füglich gegeben werden kann.

Dass aber jene Thatsache keineswegs isolirt dastehe, geht aus einer andern Beobachtung hervor, die von mir und auch von Wilh. Weber im hiesigen physiologischen Institute gemacht wurde. Lässt man nämlich einen Frosch in gewöhnlicher feuchter atmosphärischer Luft athmen, so verliert er

weit mehr an seinem Körpergewichte, als wenn man ihn in durch Chlorcalcium entwässerter Luft respiriren lässt.

Vom 12. Apr. 12 Uhr Mittags bis zum 13. Apr. 9 Uhr brachte ich einen frisch eingefangenen Frosch unter eine Glasglocke, durch die ich mittelst Chlorcalcium entwässerte Luft streichen liess; vor dem Versuche wog das Thier = 70,222 gr., nach dem Versuche = 69,100 gr.; er hatte also in 21 St. nur 1,122 gr. an Gewicht verloren. Temperatur = + 10° bis 14°C. Ein andrer frisch eingefangener Frosch blieb vom 13. Apr. $7^h 45'$ Morgens bis zum 14. Apr. $9^h 30'$ Morgens unter einer Glocke, durch welche atmosphärische Luft von dem zufälligen Feuchtigkeitsgrade geleitet wurde; Gewicht dieses Frosches vor dem Versuche = 51,321 gr., nach dem Versuche = 48,910. Die Temperatur schwankte während des Versuchs zwischen + 9° und 14°C., dieser Frosch hatte also in $25\frac{3}{4}$ St. = 2,411 gr. an Körpergewicht verloren.

Ein dritter Frosch wurde vom 16. Apr. $11^h 30'$ bis zum 17. Apr. $10^h 45'$ in trockner Luft gelassen; Temp. zwischen + 10° und 14°C.; Körpergewicht vor dem Versuche = 57,945 gr., nach dem Versuche = 57,550 gr.; folglich hatte dieser Frosch in $23\frac{1}{4}$ St. nur 0,395 gr. an Gewicht verloren.

Ein männlicher frischeingefangener Frosch blieb vom 16. Apr. $10^h 45'$ bis zum 17. Apr. $10^h 0'$ in einer Glocke, durch welche trockne Luft geleitet wurde; Temperatur = + 10° bis 14°C. Körpergewicht vor dem Versuche = 31,272 gr., nach dem Versuche = 29,602 gr.; also hatte dieser Frosch in $23\frac{1}{4}$ St. = 1,670 gr. an Körpergewicht verloren.

Leicht lassen sich die Resultate dieser einfachen Versuche in folgender Weise übersehen:

					an Gewicht
Nach Vers. 1.	verlieren	100 gr. Frosch	in trockner Luft	in 24 St.	= 1,820 gr.
„ „ 2.	„	„ „	„ feuchter „	„ „ „	= 4,376 gr.
„ „ 3.	„	„ „	„ trockner „	„ „ „	= 0,681 gr.
„ „ 4.	„	„ „	„ feuchter „	„ „ „	= 5,340 gr.

Leicht einzusehen ist der Grund dieser für den ersten Blick vielleicht paradoxen Erscheinung; in entwässerter Luft trocknet die Haut des Frosches und wird für die Flüssigkeiten weniger penetrabel, und somit zu gehöriger Transspiration untauglich, was beim Aufenthalte in atmosphärischer Luft von gewöhnlichem Feuchtigkeitsgrade nicht der Fall ist.

Der Verf. führte diese Versuche nur an, um auf die mehrfachen Versuche aufmerksam zu machen, welche zur Erklärung von Beobachtungen, wie die oben angeführten, anzustellen sind; er möchte sich aber durchaus gegen die leicht mögliche Meinung verwahren, als glaubte er einen Zusammenhang dieser an Fröschen gemachten Beobachtung mit dem Hauptresultate dieses Kapitels gefunden zu haben.

Versuche über den Einfluss des Luftdrucks auf die Kohlensäureexcretion.

Obgleich die Zahl der über diesen Gegenstand von mir angestellten Versuche bereits mehr als 50 ist, so haben dieselben doch leider noch nicht zu einem sichern Resultate geführt; der Verf. würde daher lieber die Erwähnung der hierher gehörigen Experimente unterlassen haben, wenn nicht vielleicht auch eine vorläufige Mittheilung derselben von einigem Interesse sein könnte. Soviel geht nämlich aus diesen Versuchen hervor, dass der gesunde thierische Organismus für die Schwankungen im Luftdrucke ein ziemlich bedeutendes Accommodationsvermögen besitzt. Wir wissen alle, dass wir, uns selbst unbewusst, durch äussere Einflüsse bald zu tiefern bald zu frequentern Athenbewegungen disponirt werden; beide Actionen führen aber im normalen Zustande fast zu demselben Erfolge, nämlich zu einer reichlichern Ausscheidung der Kohlensäure aus dem Blute. Es ist daher sehr schwer, die Veränderungen bei jenem Processe, die noch als normal zu betrachten sind, von denen zu unterscheiden, die bereits abnorm sind. Allein die Unsicherheit der von dem Verf. erhaltenen Resultate liegt zum grossen Theil gewiss weniger in diesem Umstande als vielmehr darin, dass die Thiere durch den schnellen Wechsel des Luftdrucks mehr afficirt wurden als durch die absolute Grösse desselben; denn fast möchte ich das Ergebniss der meisten meiner Versuche als die Summe beider Einwirkungen, ja mehr noch des Druckwechsels betrachten. Dazu kommt noch, dass ich mittelst der oben beschriebenen Vorrichtung zum Athmen in verdichteter Luft diese doch nicht so schnell im Recipienten wechseln konnte als bei den gewöhnlichen Versuchen. Bei schnellem Durchlassen der Luft durch den Apparat gerieth die Quecksilbersäule in zu häufige Schwankungen, als dass dann ein bündiger Schluss auf die Einwirkung des blossen Luftdrucks gezogen werden konnte. Das Durchtreten der Luft geschah zwar nie so langsam, dass ein Mangel an Sauerstoff im Recipienten oder eine Erfüllung desselben mit Kohlensäure entstanden wäre; allein die Athmosphäre, in der die Thiere athmeten, wurde wegen des langsamern Luftwechsels feuchter, und somit eine reichlichere Ausscheidung von Kohlensäure bedingt; andrerseits wurden aber die Thiere selbst nass, was sie unruhig machte und bald frequenter athmen liess.

Hier mögen bloss einige Versuche mitgetheilt sein, denen der Verf. nach genauer Beobachtung der Thiere während des Versuchs noch die meiste Schlussfertigkeit zuerkennt.

Zwei Zeisige, 20,9 gr. schwer, exspirirten in 2 Versuchen an Kohlensäure *a*) bei 738^{mm} Bar. und + 12° C. von 8^{h}15′ bis 10^{h}15′ Morgens = 0,254 gr. *b*) bei 741^{mm} und + 13° C. von 8^{h}17′ bis 10^{h}17′ Morgens = 0,241 gr., im Mittel also 0,2475 gr.; 1000 gr. folglich in 1 Morgenstunde bei circa 739^{mm} Bar. und + 12° C. = 5,921 gr.

Dieselben Thiere konnten noch zu 3 Versuchen in verdichteter Luft verwendet werden; sie exspirirten *a*) bei einem Luftdruck, der = einer Quecksilbersäule von 809^{mm} war, und + 13°C. von 9^{h}11′ bis 11^{h}11′ = 0,283 gr. Kohlensäure, *b*) bei 800^{mm} und + 14° C. von 8^{h}54′ bis 10^{h}54′ = 0,261 gr., *c*) bei 810^{mm} und + 13° C. von 9^{h}0′ bis 11^{h}0′ = 0,248 gr.

Wollen wir von der Inconcinnität, dass in Versuch c bei einem um 72^{mm} stärkern Luftdrucke kaum so viel Kohlensäure exspirirt worden ist als in Versuch a der normalen Respiration, einmal absehen und dennoch ein Mittel aus den 3 letzteren Versuchen ziehen, so würden 1000 gr. Zeisig bei circa 805^{mm} Luftdruck und + 13° C. in 1 Morgenstunde = 6,313 gr. Kohlensäure exhaliren.

Drei Zeisige, 31,8 gr. schwer, exspirirten bei gewöhnlichem Luftdrucke in 3 Versuchen an Kohlensäure a) bei 744^{mm} und + 13° C. von $2^h 7'$ bis $4^h 7'$ = 0,376 gr., b) bei 751^{mm} und + 13° C. von $2^h 16'$ bis $4^h 16'$ = 0,389 gr., c) bei 752^{mm} und + 12° C. von $2^h 17'$ bis $4^h 17'$ = 0,368 gr. im Mittel gleich 0,378 gr.; folglich exhaliren 1000 gr. Zeisig dieser Art bei + 13° C. in einer frühern Nachmittagsstunde = 5,943 gr. Kohlensäure.

Dieselben 3 Zeisige wurden zu Athmungsversuchen in verdünnter Luft benutzt; sie exspirirten an Kohlensäure a) bei 708^{mm} Luftdruck (Barometerstand = 747^{mm}) und + 12° C. von $2^h 0'$ bis $4^h 0'$ = 0,322 gr., b) bei 602^{mm} und + 13° C. von $2^h 17'$ bis $4^h 17'$ = 0,406 gr. Nach dem ersten dieser Versuche wurde beim Athmen in verdünnter Luft die Kohlensäureexcretion eben so sehr vermindert, als sie nach dem zweiten Versuche vermehrt erscheint. Da einer der 3 Zeisige mir nicht recht munter schien, so stellte ich nur mit den 2 andern noch 2 Versuche an; ihr Gewicht war = 20,72 gr.; sie exspirirten an Kohlensäure c) bei 692^{mm} Luftdruck und + 13° C. von $2^h 35'$ bis $4^h 35'$ = 0,235 gr., d) bei 699^{mm} und + 14° C. von $2^h 42'$ bis $4^h 42'$ = 0,248 gr. Sieht man Vers. b als ungültig an und zieht aus den Vers. a, c und d ein Mittel, so exspiriren 1000 gr. Zeisige bei circa 700^{mm} Luftdruck und + 13° C. in 1 Nachmittagsstunde = 5,810 gr. Kohlensäure.

Noch einige andre mit Vögeln angestellte Versuche der Art führten zu keinem sicheren Resultate; obwohl gerade die Vögel noch die meisten Schwankungen in der Kohlensäureexcretion zeigen, so sind sie doch zu empfindlich, machen abnorme Athembewegungen und werden kränklich; daher hoffte ich durch Benutzung von Nagethieren, die zwar weit weniger Kohlensäure exhaliren als die Vögel, aber doch weniger empfindlich sind, vielleicht eher zum Ziele zu kommen. Leider aber war der Erfolg kein besserer. Ich übergehe daher hier die in mancher andern Beziehung noch brauchbaren Versuche und führe nur eine Reihe von Versuchen an, die ich mit einem ausgewachsenen weiblichen Kaninchen, welches im nüchternen Zustande = 2015 gr. wog, im Bezug auf die Einwirkung verschiedenen Luftdrucks anstellte.

Dieses Kaninchen exspirirte unter dem gewöhnlichen Druck der Atmosphäre an Kohlensäure in folgenden 3 Versuchen: a) bei 447^{mm} und + 15° C. früh von $8^h 53'$ bis $11^h 53'$ = 3,513 gr., b) bei 749^{mm} und 15° C. von $7^h 55'$ bis $10^h 55'$ = 3,643 gr., c) bei 746^{mm} und + 16° C. von $8^h 14'$ bis $11^h 14'$ = 3,584 gr. im Mittel = 3,580 gr.

1000 gr. Kaninchen exspiriren folglich bei + 15° C. und circa 746^{mm} in 1 Morgenstunde = 0,596 gr. Kohlensäure.

Dasselbe Kaninchen wurde nun 4 Versuchen bei erhöhtem Luftdruck unterworfen. Es exspirirte nämlich an Kohlensäure a) bei 821^{mm} Luftdruck (Atmosphärendruck = 754^{mm}) und + 14° C. von $8^h 19'$ bis $11^h 19'$

= 3,597 gr., *b*) bei 815 mm (Atmosphärendruck = 750 mm) und + 12 °C. von $8^h 43'$ bis $11^h 43'$ = 3,618 gr., *c*) bei 810 mm (Atmosphärendruck = 750 mm) und 10 ° C. von $8^h 58'$ bis $11^h 58'$ = 3,712 gr., *d*) bei 792 mm (Atmosphärendruck = 747 mm) und + 11 ° C. von $9^h 0'$ bis $12^h 0'$ = 3,589 gr.

Würden meine übrigen Versuche mit Hamstern, Meerschweinchen und jungen Kaninchen constant ein ähnliches Resultat gegeben haben, so würde ich selbst diesen Versuchen mehr Zutraun schenken. Es würde sich hiernach für erhöhtem Luftdrck eine Vermehrung der Kohlensäurexcretion herausstellen. Während 1000 gr. Kaninchen bei mittlerem Luftdruck in 1 Morgenstunde im Mittel = 0,596 gr. Kohlensäure exhalirten, würden unter einem Druck von circa 810 mm davon = 0,6003 gr. exhaliren; freilich eine sehr geringe Differenz.

Dasselbe Kaninchen wurde ebenfalls 4 Versuchen bei vermindertem Luftdruck unterworfen. Es exspirirte an Kohlensäure *a*) bei 710 mm Luftdruck (Atmosph. = 745 mm) und + 14°C. von $8^h 15'$ bis $11^h 15'$ = 3,151 gr., *b*) bei 704 mm (Atmosph. = 748 mm) und + 15 ° C. von $8^h 32'$ bis $11^h 32'$ = 3,095 gr., *c*) bei 697 mm (Atmosph. = 733 mm) und + 13 ° C von $9^h 3'$ bis $12^h 3'$ = 3,242 gr., *d*) bei 704 mm (Atmosph. = 742 mm) und + 15°C. von $8^h 55'$ bis $11^h 55'$ = 3,321 gr.; im Mittel dieser 4 Versuche = 3,202 gr. 1000 gr. Kaninchen würden sonach bei verringertem Luftdruck (circa 700 mm) und + 13°C. in 1 Morgenstunde = 0,529 gr. Kohlensäure exhaliren.

1000 gr. weibliches Kaninchen exspirirten folglich in 1 Morgenstunde bei + 15°C.

unter circa 748 mm	Luftdruck	= 0,596 gr.	Kohlensäure
„ „ 810 „	„	= 0,600 gr.	„
„ „ 704 „	„	= 0,529 gr.	„

Weitere Versuche mit einem verbesserten Apparate und besonders mit Vermeidung des schnellen Wechsels des Luftdrucks müssen zeigen, ob das Resultat dieser Versuche ein richtiges ist; bis dahin muss der Verf. sich ebensowohl aller Erklärung einer solchen Beobachtung als aller etwaigen Folgerungen enthalten.

Versuche über den Einfluss der Entzündung auf die Kohlensäureexcretion.

Wer je sich bemüht hat, in Thieren gewisse pathologische Erscheinungen hervorzurufen, weiss, welchen Hindernissen dabei man nur zu oft begegnet, und wie viel Versuche fehlschlagen, ehe einer das gewünschte Resultate giebt. Am allerwenigsten sollte man aber erwarten, dass es so schwierig ist, künstlich eine ausgedehntere Entzündung in einem Organe eines Thieres hervorzurufen. Vögel und jüngere vierfüssige Thiere sind zu dergleichen Versuchen fast gar nicht zu gebrauchen; denn entweder unterliegen solche Thiere in kurzer Zeit

oder unmittelbar dem operativen Eingriff, oder die gemachte Wunde verheilt, so gross sie auch sei, prima intentione. Dem Verf. ist es z. B. mehr als einmal vorgekommen, dass selbst penetrirende Brustwunden und noch dazu bei ausgewachsenen Thieren in kurzer Zeit ohne alle nachtheiligen Folgen verheilt sind.

Nur selten gelingt es, ein Thier in irgend einem Organe so zu verletzen, dass sich an dem Aeusseren des Thieres die Entzündung jenes Organes oder wohl gar verschiedene Stadien des Entzündungsprozesses wahrnehmen lassen. Will man nun in solchen Fällen einzelne Erscheinungen an dem verletzten Thiere, z. B. die Respiration, genauer erforschen, so müssen eine Menge Versuche aufs Gerathewohl angestellt werden. Darin mag wohl auch hauptsächlich der Grund liegen, warum man über das Verhalten der Kohlensäureexcretion bei Entzündungen fast noch gar keine Versuche angestellt hat, und dennoch diesen Process von chemischer Seite im Wesentlichen als einen jähen Oxydationsprocess, als eine wahre Verbrennung darstellt, während die folgenden Versuche beweisen, dass hierbei fast gerade das Gegentheil von dem statt findet, was man erwartete oder gar für ausgemacht hielt. Doch lassen wir die Versuche selbst sprechen.

Am 14. März wurde einem kräftigen, männlichen Kaninchen, dessen Körpergewicht im nüchternen Zustande = 2037 gr. war, zwischen der 5ten und 6ten Rippe die Pleurahöhle geöffnet und etwas rother Wein in dieselbe geträufelt. Unmittelbar nach dieser Verwundung sprang das Thier noch ziemlich lebhaft herum, frass wie gewöhnlich; an der Bewegung der Nase konnte ein erschwertes Athmen des Thiers nicht wahrgenommen werden, wohl aber war die Abdominalrespiration sichtlich stärker als vor der Verwundung.

Dieses Thier, welches vor der Verwundung bei + 16°C. in 3 Morgenstunden *a*) = 3,725 gr. Kohlensäure, *b*) = 3,905 gr., im Mittel also 3,825 gr. exspirirt hatte, wurde ungefähr 30 Min. nach der Verwundung in den Respirationsapparat gebracht; von $9^h 38'$ bis $12^h 38'$ exspirirte es bei + 17°C. = 3,887 gr. Kohlensäure.

Am 15. März war das verwundete Thier noch ziemlich munter; nur bei manchen Bewegungen konnte man ein Durchpfeifen der Luft zwischen den Rippen wahrnehmen, was aber nur selten geschah, da die Wunde meist subcutan geführt worden war; das Athmen war etwas beschwerlicher als gestern; seine frühere Gefrässigkeit hatte etwas nachgelassen. Von $7^h 27'$ bis $10^h 27'$ exspirirte es bei + 15°C. = 2,951 gr. Kohlensäure.

Am 16. März zeigte sich an der äussern Wunde eine bei Kaninchen ungewöhnlich starke, übelriechende Eiterung; im Grunde hatte sich die Wunde aber mit Granulationen erfüllt, so dass weder durch das Eingehen mit einer Sonde noch durch lebhafte Bewegung des Thiers eine Oeffnung der Pleurahöhle nach Aussen wahrgenommen werden konnte. Athemfrequenz sehr bedeutend. Das Thier frass wenig und blieb meist auf einer Stelle sitzen. Bei + 16°C. exspirirte es von $8^h 15'$ bis $11^h 15'$ = 3,217 gr. Kohlensäure.

Am Nachmittage desselben Tages bildete sich oberhalb der Verwundung auf der rechten Seite der Brust über den Hals bis an die rechte Seite des Kopfs

eine bedeutende, wahrscheinlich emphysematische Geschwulst aus; das Athmen wurde sehr beschwerlich, das Thier frass nicht und sass meist ruhig.

Am 17. März war jene Geschwulst grösstentheils wieder verschwunden; doch blieb das Athmen sehr beschwerlich, oft war es pfeifend, was aber immer nur kurze Zeit anhielt. Von $9^h 15'$ bis $12^h 15'$ exspirirte es bei + 16°C. = 2,308 gr. Kohlensäure.

Am 18. März war der Zustand des Kaninchens noch verschlimmert; die Athemzüge sehr kurz und beschwerlich; nur mit Mühe liess es sich zu Bewegungen bringen; es frass gar nicht mehr. Früh von $8^h 57'$ bis $11^h 57'$ bei 16°C. exspirirte es = 1,838 gr. und Nachmittags von $3^h 10'$ bis $6^h 10'$ bei 17°C. = 1,731 gr. Kohlensäure. In der Nacht vom 18. zum 19. März verendete das Thier.

Bei der am folgenden Morgen angestellten Section fand sich das Zellgewebe auf der rechten Seite zwischen Fell und Rippen-, Bauch- und Halsmuskeln ödematös infiltrirt; die die Wunde umgebenden Muskeln: M. pector. major, MM. intercostales, M. serrat. ant. maj. u. s. w., waren blauschwarz gefärbt und von einer übelriechenden jauchigen Flüssigkeit umgeben; die Bauchmuskeln stark gespannt (wegen der Todtenstarre); im Unterleibe fand sich ausser den bei Kaninchen so gewöhnlichen Hydatiden nichts Abnormes; der rechte Theil des Zwergfells, so wie ein Theil der convexen Oberfläche der Leber waren gleich den Rumpfmuskeln dunkelblaugrau gefärbt und schlaff. Nach Eröffnung der Brusthöhle zeigte sich das Herz schlaff, der linke Ventrikel desselben mit wenig, der rechte Ventrikel mit etwas mehr flüssigem, dunkelkirschrothem Blute erfüllt, die grossen Hohlvenen strotzend vom Blute; die linke Lunge hatte ziemlich das normale ganz blassrothe Ansehen, nur liessen sich schon mit blossem Auge hie und da erweiterte Gefässverzweigungen wahrnehmen; sie schwamm auf dem Wasser und liess sich leicht und vollständig aufblasen. Die rechte Lunge war dagegen völlig verändert; der untere Lappen fand sich in einem gangränösen Zustande; liess sich an dieser Stelle leicht zu Brei drücken; der obere und mittlere Lappen waren dunkelbraunroth gefärbt und dicht, schwammen nicht auf Wasser, liessen sich nicht aufblasen; die mikroskopische Untersuchung liess nirgends grössere Luftblasen mehr auffinden, wohl aber zeigten sich neben einigen Blutkörperchen Eiterzellen und Entzündungskugeln in grosser Menge. Es kann sonach kein Zweifel obwalten, dass es gelungen war, diesem Thiere eine ausgedehnte Entzündung der äussern Brustmuskeln und der rechten Lunge zuzuziehen, die mit Gangrän endete. Vergleichen wir nochmals die Resultate der Respirationsversuche, so ergiebt sich folgendes:

In 3 Stunden excernirte das Kaninchen bei mittlerer Temperatur an Kohlensäure:

Vor der Verwundung in 3 Morgenstunden	= 3,820 gr.
Unmittelbar nach der Verwundung in 3 Morgenstunden	= 3,877 gr.
Den 1. Tag „ „ „ „ „ „	= 2,951 gr.
„ 2. „ „ „ „ „ „ „	= 3,217 gr.
„ 3. „ „ „ „ „ „ „	= 2,308 gr.
„ 4. „ „ „ „ „ „ „	= 1,838 gr.
„ „ „ „ „ „ „ „ Nachmittagsst.	= 1,731 gr.

Einem weiblichen, 1750 gr. schweren Kaninchen wurde am 7. Mai ein Troiquart zwischen die 4. und 5. Rippe rechter Seite in die Pleurahöhle eingesenkt und durch die Canüle etwas mit Wasser verdünnte Arnicatinctur eingespritzt. Während das Thier an 2 Tagen vor der Operation innerhalb dreier Morgenstunden bei + 16°C. = 3,206 gr. und bei + 17°C. = 3,134 gr., also im Mittel = 3,170 gr. exspirirt hatte, lieferte es $\frac{1}{2}$ St. nach der Operation von früh $10^h 2'$ bis $1^h 2'$ = 3,392 gr. Kohlensäure.

Am 8. Mai Morgens war das Thier scheinbar ganz munter; es sprang mit andern herum, fiel mit grosser Gier über das ihm dargebotene Futter her; am Athmen konnte keine deutliche Veränderung wahrgenommen werden; die Athemzüge der Kaninchen lassen sich theils der immerwährenden Unruhe der Thiere wegen, theils wegen der grossen Frequenz der Athemzüge selbst nicht gut zählen. Von $9^h 38'$ bis $12^h 38'$ exspirirte es bei + 16°C. = 3,199 gr. Kohlensäure.

Am 9. Mai befand sich das Thier minder wohl; an der starken Abdominalrespiration liess sich eine bedeutende Vermehrung der Frequenz der Athemzüge wahrnehmen; das Thier frass jedoch noch ziemlich viel und bewegte sich mit Leichtigkeit. Von $9^h 8'$ bis $12^h 8'$ exspirirte es bei + 15°C. = 2,914 gr. Kohlensäure.

Am 10. Mai war die Frequenz der Athemzüge sehr bedeutend, das Athemholen selbst erschwert und mit einem leisen Geräusch verbunden; das Thier rührte nur wenig Futter an, jedoch leckte es von ihm vorgehaltenem Wasser. Von $10^h 15'$ bis $1^h 15'$ bei + 16°C. exspirirte es = 1,877 gr. Kohlensäure.

Unmittelbar nach dem Respirationsversuche wurde es auf die Weise getödtet, dass ihm an einer Seite des Halses ein spitzes Scalpell vor den Halswirbeln vorbei durch den Hals gestossen und dann nach vorn alle Weichtheile des Halses durchschnitten wurden; das hierbei abfliessende Blut wurde zum grössten Theil in einem mit Wasser gefüllten, vorher genau abgewogenen Becherglase aufgefangen; letzteres wog dann um 20,436 gr. mehr, also war so viel Blut gesammelt worden, um es zur Bestimmung des Faserstoffs zu verwenden. Zu dem Zwecke wurde jenes bereits stark gewässerte Blut noch mit so viel Wasser vermischt, dass das Wasser etwa die 400fache Menge des Blutes betrug. Bis den andern Morgen blieb dieses Gemisch in einem grossen Becherglase stehen, worauf sich der Faserstoff in Flocken auf den Boden des Gefässes abgesetzt hatte; derselbe lässt sich nun leicht durch Papier filtriren und vollständig aussüssen; das Gewicht des im Vacuo über Schwelsäure wohl ausgetrockneten Faserstoffs wog (nach Abzug des Filters) = 0,094 gr. In 1000 Th. dieses Blutes wären sonach = 4,550 Th. Faserstoff enthalten gewesen. Da ich nach mehrern auf dieselbe Weise ausgeführten Analysen des Blutes ausgewachsener Kaninchen an Faserstoff = 3,63 pro Mille gefunden hatte (Nasse fand 3,80 p. M.), so würde also auch die chemische Analyse des Blutes hier die entzündliche Beschaffenheit desselben beweisen. Aus dem wenigen Blute, was ausser dem zur Analyse verwendeten gesammelt worden war, schied sich beim Gerinnen nicht mehr Serum als gewöhnlich ab; der Blutkuchen war dicht, zeigte aber keine Entzündungshaut.

Bei der Section, die nach 5 Stunden angestellt wurde, zeigte sich die gewöhnliche Todtenstarre, daher waren auch hier die Abdominalorgane stark comprimirt. Unter den Hautdecken verbreitete sich von der Stichwunde nach den Bauchmuskeln der rechten Seite eine Blutsugillation.

Bei Eröffnung der Brusthöhle zeigte sich das Herz im Allgemeinen schlaff; der linke Ventrikel enthielt sehr wenig dunkelrothes Blut, der rechte war dagegen von braunschwarzem, festerem Blutgerinsel erfüllt; jedoch fand sich kein Coagulum reinen Faserstoffs vor; die Hohlvenen enthielten geronnenes Blut; jedoch nicht in grosser Menge. Die linke Lunge schien in ihrer ganzen Ausdehnung etwas stärker roth gefärbt; an drei Stellen fanden sich erbsengrosse Flecke von blutrother Farbe, die bei der mikroskopischen Untersuchung nichts als Blutkörperchen zeigten. An der Pleura linker Seite war keine Veränderung wahrzunehmen. In dem rechten Pleurasacke fand sich eine gelbliche, milchige Flüssigkeit, welche unter dem Mikroskop granulirte Zellen zeigte, die auf Zusatz von Essigsäure oder höchst verdünnter Salzsäure meistens 3 Kerne wahrnehmen liessen. Die rechte Lunge selbst erschien verkleinert und verdichtet, von dunkelrothbrauner Farbe auf der Oberfläche, im Innern etwas lichter roth gefärbt; keiner ihrer Lappen liess sich aufblasen oder schwamm auf Wasser; die dunkelrothe von der Schnittfläche abgeschabte Flüssigkeit enthielt, wie das Mikroskop zeigte, viel Blutkörperchen, Entzündungskugeln und einige granulirte Zellen, die auf Zusatz höchst verdünnter Salzsäure meist nur einen Kern hervortreten liessen. Die Schleimhaut der Trachea war schwach geröthet.

Es ist nach diesem chemischen und anatomischen Befunde wohl kaum ein Zweifel, dass dieses Thier von einem Leiden behaftet gewesen ist, welchem man gewöhnlich die Namen Pleuritis und Pneumonie beilegt; die Respirationsversuche zeigten aber, dass dieses Thier an Kohlensäure innerhalb dreier Stunden exhalirte:

an 2 Tagen vor der Verwundung = 3,470 gr.
unmittelbar nach „ „ = 3,392 gr.
am 1. Tage „ „ „ = 3,499 gr.
„ 2. „ „ „ „ = 2,914 gr.
„ 3. „ „ „ „ = 1,877 gr.

Nachträglich muss ich hier bemerken, dass es mir nie gelungen ist, durch blosse Eröffnung der Pleurahöhle (d. h. ohne Injection einer deleteren Flüssigkeit) irgend eine solche Entzündung hervorzurufen, dass sie auf das Allgemeinbefinden von sichtbarem Erfolge gewesen wäre. In 2 Fällen, wo ich in grösserer Ausdehnung die Pleurahöhle eröffnete, starben mir die Thiere fast unter den Händen, d. h. eines war wirklich todt, als wir es freiliessen; das andre starb $1\frac{1}{2}$ Stunde darauf im Respirationsapparate.

Da sich demnach erwarten liess, dass die Behandlung einer grössern Wunde in einem weniger edeln Organe als dem der Lungen mit einer reizenden Substanz vielleicht eher eine Wirkung auf das Allgemeinbefinden oder mit einem Worte ein entzündliches Fieber hervorrufen könne, so wurde einem kräftigen männlichen Kaninchen von 1950 gr. Körpergewicht das Fell, ungefähr $\frac{1}{2}''$ entfernt von der Basis scapulae, durchschnitten, dann unter der Haut der

M. serrat. ant. maj. nahe an seiner Insertionsstelle an der Basis des Schulterblatts durchschnitten, das Zellgewebe zwischen M. subscapularis und Brustkasten gelöst und Spirit. vini rectificatus eingespritzt; der Schnitt war sonach möglichst subcutan geführt worden; die äussere Wunde verklebte sehr bald von geronnenem Blute und mit eingeschlossenen Haaren; der Blutverlust war übrigens bei der Operation nur gering gewesen.

Eine halbe Stunde nach der Operation (am 29. Aug.) wurde das Thier in den Respirationsapparat gebracht, wo es von $3^h 0'$ bis $6^h 0'$ bei + 22° C. = 3,947 gr. Kohlensäure respirirte, während es an 2 Tagen vor der Operation in je 3 Stunden *a*) = 3,514 gr. *b*) = 3,670 gr., also im Mittel = 3,592 gr. von jenem Gase exhalirt hatte. Im Recipienten verhielt sich das Thier während der ersten 2 Stunden ziemlich ruhig, die Respiration war aber sichtlich frequenter als im normalen Zustande; darauf fing es aber an, die Vorderpfoten zu lecken und sich zu bewegen. Aus dem Recipienten entlassen, verzehrte es mit grosser Gier eine nicht geringe Menge Kohl und Hafer; obgleich es auf der rechten Vorderpfote (der verwundeten Seite) etwas lahm ging, so jagte es sich doch bald mit einem weiblichen Kaninchen herum.

Am 30. August früh von $7^h 58''$ bis $10^h 58'$ exhalirte es bei + 20° C. = 3,533 gr. Kohlensäure. Ausser dem, dass es heute etwas mehr lahm ging, wurde nichts Krankhaftes an ihm bemerkt.

Am 31. August zeigte sich an dem Thiere wieder eine frequentere Respiration; es frass nicht sehr viel, höchstens Kohl, rührte aber den ihm vorgehaltenen Hafer nicht an, kümmerte sich nicht um das weibliche Thier; die Wunde zeigte äusserlich Spuren von Eiter und verbreitete einen übeln Geruch Von $8^h 15'$ bis $11^h 14'$ bei 20° C. exspirirte es = 2,711 gr. Kohlensäure.

Am 1. September befand sich das Thier noch wie Tags vorher; das Wundsecret verbreitete aber einen sehr übeln Geruch; dem Aeussern nach erschien das Thier fast wie abgemagert. Von $11^h 43'$ bis $2^h 43'$ bei + 22° C. exspirirte es = 2,179 gr. Kohlensäure.

Am 2. September zeigte sich unterhalb der rechten Schulter eine stark fluctuirende Geschwulst; das Athmen sehr frequent und beschwerlich, keine Neigung zum Fressen; es rührte sich nicht von der Stelle. In den Recipienten gebracht, drehte es sich nur mit grosser Schwierigkeit um und machte dabei sehr auffallende Athembewegungen; es exspirirte von $9^h 15'$ bis $15^h 15'$ bei + 20° C. = 2,098° gr. Kohlensäure.

Am spätern Nachmittage desselben Tags fand ich die Geschwulst verschwunden, die Wunde war äusserlich offen, von einer eitrigen Kruste bedeckt; das Thier befand sich sichtlich besser, wiewohl die Athemfrequenz noch sehr bedeutend war; es frass etwas.

Am 3. September war der Zustand, wie gestern Abend. Von $8^h 34'$ bis $11^h 34'$ exspirirte es bei + 20° C. = 2,413 gr. Kohlensäure. Kurz nach dem Respirationsversuche wurde es mittelst Durchschneidung des Halses getödtet und 18,564 gr. Blut in Wasser aufgefangen. Dieses Blut enthielt 0,074 gr. = 3,986 p. M. Faserstoff.

Tags darauf wurde die Section gemacht; der Leichnam war noch in völliger Todtenstarre, die Bauchmuskeln gespannt; von der Wundstelle aus ver-

breitete sich bereits ein cadaveröser Geruch; beim Abpräpariren des Felles zeigte sich zwischen den von der Verwundung getroffenen Muskelparthien kein eigentlicher Eiter, sondern nur ein wenig einer missfarbigen Flüssigkeit; die Muskeln selbst waren schlaff und von schmuzig-blaugrauer Farbe; an einzelnen waren scharfe Abgrenzungen dieser Färbung wahrzunehmen; hier sowie in der weitern Umgebung waren die Muskeln mehr geröthet als in entferntern muskulösen Theilen. An den Abdominalorganen fand sich keine Veränderung; in der Brusthöhle zeigte sich das Herz schlaff, der linke Ventrikel blutleer, der rechte mit etwas breiigem, dunkelkirschrothem Blute erfüllt; Lungen sehr zusammengefallen, hie und da traten deutlich Gefässnetze hervor, namentlich am rechten untern Lappen, sie liessen sich übrigens vollständig aufblasen und schwammen auf Wasser. Bei diesem Versuche war das Ergebniss der Kohlensäurebestimmungen folgendes gewesen:

am 2ten Tage vor der Verwundung	in 3 Stunden	=	3,592 gr.
unmittelbar nach „ „	„ 3 „	=	3,947 „
am 1sten Tage „ „ „	„ 3 „	=	3,533 „
„ 2ten „ „ „ „	„ 3 „	=	2,711 „
„ 3ten „ „ „ „	„ 3 „	=	2,179 „
„ 4ten „ „ „ „	„ 3 „	=	2,098 „

Von ähnlichen Versuchen, eine intensivere Entzündung in muskulösen Theilen hervorzurufen, ist mir bis jetzt nur noch ein einziger gelungen. Dieser Versuch betraf ein altes weibliches Kaninchen, 1682 gr. schwer, welchem subcutan mehrere Muskeln am Oberschenkel zerschnitten und in die Wunde Spiritus injicirt worden war. Dieses Thier befand sich, wie das vorige, die ersten 2 Tage nach der Verwundung bis auf das Lahmen ziemlich wohl; erst am dritten Tage schwollen die äussern Theile des Schenkels an; auch hier stellte sich bald die Absonderung eines übelriechenden Eiters ein; Vermehrung der Athemfrequenz war am 2ten Tage nach der Verwundung schon sehr bedeutend; jedoch schien das Athmen nicht beschwerlich; am 4ten Tage frass das Thier nicht mehr; das Athmen schien beschwerlich; am Anfange des 5ten Tages nach dem letzten Respirationsversuche wurde das Thier getödtet; der Sectionsbefund war ganz ähnlich dem des vorher mitgetheilten Versuchs. Bei der Section ergab sich übrigens auch, dass das Thier trächtig gewesen war.

17,584 gr. des Blutes enthielten = 0,069 gr. Faserstoff = 3,924 p. M.

Das Thier hatte übrigens in je drei Stunden bei circa + 20° C. an Kohlensäure exspirirt:

unmittelbar *vor* dem Versuche	=	3,004 gr.
12 Stunden *nach* „ „	=	2,941 „
am 2ten Tage „ „ „	=	2,968 „
„ 3ten „ „ „ „	=	2,213 „
„ 4ten „ „ „ „	=	2,347 „
„ 5ten „ „ „ „	=	2,066 „

Viel Mühe hat sich der Verfasser gegeben, katarrhalische Entzündungen der Luftwege hervorzubringen, allein bis jetzt sind ihm alle Versuche der Art verunglückt; in mit schwefliger Säure, salpetriger Säure, Chlorgas oder Essigsäuredämpfen gemischter Luft athmen die Kaninchen oft längere Zeit ohne auffallende Beschwerde, oder sie bekommen Erstickungszufälle und werden asphyktisch; bringt man sie bald wieder in reine Luft, so erholen sie sich sehr schnell, und man merkt an ihnen durchaus keine krankhafte Erscheinung mehr. Lässt man die Thiere aber einige Zeit asphyktisch in der mit Dämpfen gefüllten Atmosphäre liegen, so bringt man sie nicht wieder zum Leben. A. Mendelssohn führt in seinem classischen Werke (Der Mechanismus der Respiration und Circulation u. s. w.) verschiedene Methoden an, in Thieren entzündliche Affectionen der Brustorgane hervorzurufen; der Verfasser würde schon mehrere dieser Methoden versucht haben, wenn er nicht lieber ein Leiden der Lungen vermeidend, den directen Einfluss einer grössern Entzündung auf die Respiration hätte erforschen wollen; doch sind ihm, ausser den oben angeführten Versuchen, in Hervorbringung von Entzündungen anderer Organe als der Lungen in neuerer Zeit keine so genügend gelungen, dass sie hier angeführt zu werden verdienten. Nervenexcisionen brachten entweder einen paralytischen Zustand der betroffenen Theile hervor, bei dem die Thiere sich ganz wohl befanden, oder jene Theile gingen zu schnell in eine gangränöse Entzündung über, als dass eine reine Beobachtung über den Effect der Entzündung auf die Respiration hätte gemacht werden können. Verwundungen der Unterleibsorgane, Injection von Säuren oder spirituösen Flüssigkeiten (wie letztere C. G. Mitscherlich versucht hat) sind mir bis jetzt eben so wenig gelungen, wenigstens nicht insoweit, dass ich eine den obigen ähnliche Reihe von Untersuchungen und Beobachtungen hätte anstellen können.

Auf solche Schwankungen, wie sie kurz nach einem stärkern operativen Eingriff in den Grössen der exspirirten Kohlensäure vorkommen, ist sicher nicht viel zu geben.

In ganz ähnlichen Fällen, wo die Thiere nach circa 24 — 36 Stunden verendeten, zeigte sich 3 bis 5 Stunden nach der Operation fast eben so häufig eine Vermehrung als eine Verminderung der exhalirten Kohlensäure.

Der Verfasser ist noch unausgesetzt bemüht, in Thieren sogenannte inflammatorische Dyskrasien hervorzurufen, deren langsamerer Verlauf eine genauere Untersuchung der Mischung des Blutes und Vergleichung der Kohlensäureausscheidung zulässt; er verschiebt daher auch die etwa aus diesen vorläufigen Versuchen hervorgehenden Folgerungen auf eine spätere Mittheilung. So viel indessen kann der Verfasser sich nicht enthalten anzudeuten, dass auch jene von einigen Chemikern aufgestellte und von manchen Pathologen willig aufgenommene Ansicht, das chemische Moment der Entzündung beruhe in einer zu jähen Oxydation der Blutbestandtheile, auch in den wenigen hier mitgetheilten Versuchen keinen Halt findet. Das Vorkommen der Proteinoxyde in entzündlichem Blute ist eine ausser allem Zweifel gestellte Thatsache; allein man kann aus diesem Vorkommen mit demselben Rechte auf eine verminderte Oxydation des Bluts schliessen, insofern durch den freien Sauerstoff die Proteinverbindungen nicht vollkommen zerstört, d. h. in Harnsäure, Harn-

stoff, Gallenstoff u. s. w. verwandelt, sondern nur bis zu jenen Oxyden oxydirt werden, als man daraus eine zu jähe Verbrennung des Proteins und seiner Bestandtheile erschliessen zu können geglaubt hat. Die wenigen oben mitgetheilten Versuche machen gewiss mehr für die erste Ansicht geneigt, wenn auch nicht schon der ganze Mechanismus der Respiration und Circulation darauf hindeutete, dass in der Entzündung weniger Luft mit dem Blute und weniger Blut mit der Luft in Berührung gesetzt werde.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

